

---

---

# Геометрия: классика и современность

---

---

## Изгибания поверхностей и многогранников

И. Х. Сабитов

### § 1. ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с происхождением своего названия *геометрия* (т. е. измерения на земле) изучает в первую очередь закономерности, связывающие такие численные характеристики различных объектов, как длина, площадь, объём, а также описание их взаиморасположения с использованием таких понятий, как угол, расстояние, кратчайший путь и т. д. И ещё в древности было замечено, что измерения и способы вычисления всех таких характеристик зависят от того, расположены ли изучаемые объекты на ровном плоском участке земли или на неровной местности (например, в горах) или, более общо, на плоскости или на какой-либо поверхности. В идеализированной форме такой поверхностью чаще всего была сфера как самая простая и широко распространённая форма поверхности, тем более, что небесная сфера открывалась взору людей каждую ночь, доставляя любознательным умам мучительные загадки и радости открытия.

Разницу между измерениями на равнинной и на гористой местности проще всего объяснить примером поведения птицы и какого-нибудь не умеющего летать животного (назовите сами!) для скорейшего попадания из точки  $A$  в точку  $B$  на земле: в гористой местности птица может просто полететь из точки  $A$  по прямой в точку  $B$ , а неназванному несчастному животному придётся двигаться по земле, спускаясь

и поднимаясь в соответствии с рельефом местности, да ещё и угадать, какой путь будет самым коротким. Очевидно, этот путь и его длина будут зависеть от конкретного рельефа данной местности<sup>1)</sup>.

Мы видим, проблема в том, что при нахождении кратчайшего пути между точками на поверхности и вычисления его длины как расстояния между точками нужно, чтобы этот путь располагался *только на самой* поверхности. И если даже эти точки в пространстве одни и те же, но рассматриваются на разных поверхностях, то в зависимости от поверхностей кратчайший путь, а значит, и расстояния между точками могут быть разными. Более того, предположим, что кривая задана как пересечение двух поверхностей, например, окружность задана как пересечение некоторой сферы радиуса  $R$  и плоскости. Предположим, что жители плоскости просто видят окружность и не знают, что она получена пересечением со сферой. Тогда они будут измерять её длину своими методами, применяя законы планиметрии на плоскости. А если есть разумные существа на сфере, тоже не знающие, что окружность получена пересечением их мира с плоскостью, то они будут измерять длину этой окружности тоже своими методами, присущими геометрии на сфере, т. е. они должны будут применять все вспомогательные построения, оставаясь на сфере, а на сфере, например, не верна теорема Пифагора (однако, если они знают радиус своей сферы и поступают правильно, то длина этой окружности получится та же, что и на плоскости, но её дуги могут оказаться кратчайшими линиями между концами дуги, в то время как на плоскости кратчайшим путём между концами любой дуги является соответствующая хорда). Таким образом, каждой поверхности присущи свои собственные законы измерения длин расположенных на ней линий. Эти законы определяют то, что называется *метрикой* поверхности, а все свойства поверхности, которые можно получить на основании только знания и использования её метрики, составляют содержание *внутренней геометрии* поверхности. Очевидное, но важное свойство внутренней геометрии состоит в наблюдении, что она *не изменяется* при движении поверхности в пространстве как твёрдого тела, т. е. конгруэнтные поверхности имеют одинаковую внутреннюю геометрию. В природе это проявляется, например, в том, что при движении Земли в пространстве (вращение вокруг своей оси и вокруг Солнца) расстояния на Земле не изменяются.

---

<sup>1)</sup> Про общее понятие *расстояния* и связанное с ним понятие *метрического пространства* можно прочитать, например, в работах [3, 11, 13].

§ 2. ПРИМЕРЫ

*Первый пример.* Пусть дана поверхность в виде двугранного угла  $S$ , составленного из двух треугольников  $AOO_1$  и  $BOO_1$  (далее  $T_1$  и  $T_2$ ) с вершинами  $A(a, 0, 0)$ ,  $O(0, 0, 0)$ ,  $O_1(0, 0, 1)$  и  $B(0, b, 0)$  в указанной на рис. 1 а системе координат. Длина произвольной линии и расстояния между точками в пределах одного треугольника совпадают с обычными длинами и расстояниями на плоскости, и поэтому кратчайший путь между ними идёт по соединяющему их прямолинейному отрезку. Если же некоторая кривая имеет участки как в одном, так и в другом треугольнике, то её длина равна сумме длин этих участков. А кратчайший путь на  $S$  между точками  $M(m, 0, z_1) \in T_1$  и  $N(0, n, z_2) \in T_2$  находится следующим образом: повернём один треугольник, скажем,  $T_1$ , вокруг оси  $Oz$  на  $90^\circ$  по часовой стрелке и получим новый двугранный угол  $S'$  (рис. 1 б) с гранями, каждая из которых в отдельности конгруэнтна исходной грани (грань  $T_2$  и, в частности, точка  $N$  остаются на месте, а первая грань вращается по часовой стрелке, в частности, точка  $M(m, 0, z_1)$  переходит в точку  $M'(0, -m, z_1)$ , положение которой относительно вершин первой грани не изменяется). В новом положении точки  $M'$  и  $N$  находятся в пределах одного плоского треугольника  $A'O_1B$  и соединяющая их линия кратчайшей длины идёт по прямолинейному отрезку  $M'N$ . Концевые точки отрезка известны, поэтому расстояние  $d$  между ними вычисляется по известной формуле

$$d(M', N) = \sqrt{(m + n)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

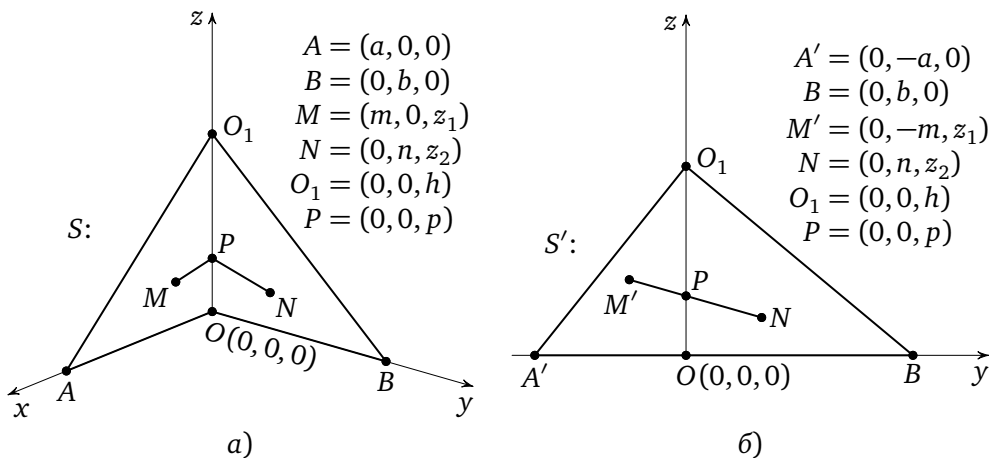


Рис. 1

Пусть теперь  $P$  — точка пересечения отрезка  $M'N$  со стороной  $OO_1$ . Так как отрезок  $M'N$  лежит на плоскости  $yOz$ , найти  $P$  — точку его пересечения с осью  $Oz$  — легко. Получим

$$P = (0, 0, p), \quad \text{где } p = \frac{nz_1 + mz_2}{m+n}.$$

При вращении вокруг оси  $Oz$  точка  $P$  остаётся на месте. Вычисляем длины  $|MP|$  и  $|PN|$  на  $S$  и находим, что сумма  $|MP| + |PN|$  равна вычисленному ранее значению  $d(M', N)$ . Теперь ясно, что длина пути в виде ломаной  $MPN$  на исходном угле  $S$  является кратчайшей среди длин всех путей на  $S$ , соединяющих точки  $M$  и  $N$ , так как любой другой путь перейдёт на  $S'$  в равный ему по длине путь, который заведомо длиннее, чем длина прямолинейного отрезка  $M'N$ . Значит, длина пути  $MPN$  является *расстоянием* между точками  $M$  и  $N$  в метрике поверхности  $S$ . В частности, кратчайший путь между  $A$  и  $B$  имеет длину  $a + b$  (в этом случае  $P = O$ ), что и равно расстоянию между ними. Тем самым мы убедились, что расстояния между соответствующими точками на двугранных углах  $S$  и  $S'$  одни и те же. Заметим также, что и угол между отрезками  $AO$  и  $OB$ , *измеренный на  $S$*  (т. е. как сумма  $\sphericalangle AOO_1 + \sphericalangle O_1OB = \pi$ ), равен углу между соответствующими отрезками  $A'O$  и  $OB$ , *измеренному на  $S'$*  (т. е. сумме  $\sphericalangle A'OO_1 + \sphericalangle O_1OB = \pi$ ). Менее очевидно, но такое же равенство верно для сумм  $\sphericalangle MPO_1 + \sphericalangle O_1PB$  и  $\sphericalangle M'PO_1 + \sphericalangle O_1PB = \pi$ . Это значит, что на изометричных поверхностях сохраняются и углы между соответствующими отрезками. Но и расстояния, и углы в окружающем пространстве могут быть другими. В нашем примере пространственное расстояние между  $A$  и  $B$  из  $S$  равно  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , между их образами на  $S'$  оно равно  $a + b$ , а углы в пространстве между соответствующими отрезками равны  $\pi/2$  и  $\pi$ .

Далее, если мы будем поворачивать треугольник  $AOO_1$  на некоторый угол  $\alpha$  (со знаком « $\rightarrow$ » или « $+$ » в соответствии с поворотом по или против часовой стрелки), тогда двугранный угол перейдёт в двугранный угол  $S_\alpha$ , в котором точке  $A$  будет соответствовать точка  $A_\alpha$  с координатами  $(a \cos \alpha, a \sin \alpha, 0)$ , а точка  $M$  перейдёт в точку  $M_\alpha$  с координатами  $(m \cos \alpha, m \sin \alpha, z_1)$ . Сумма  $|M_\alpha P| + |PN|$  тогда будет равна

$$\begin{aligned} & \sqrt{(m \cos \alpha)^2 + (m \sin \alpha)^2 + (z_1 - b)^2} + \sqrt{n^2 + (z_2 - b)^2} = \\ & = \sqrt{m^2 + (z_1 - b)^2} + \sqrt{n^2 + (z_2 - b)^2} = d(M, N), \end{aligned}$$

следовательно, деформация  $S \mapsto S'$  сохраняет на поверхности  $S$  расстояния между всеми точками.

Этот пример заслуживает внимания с двух точек зрения. Во-первых, видим, что проделанное нами преобразование двугранного угла  $S$  не является его движением как твёрдого тела (так как один треугольник остаётся неподвижным), тем не менее его внутренняя геометрия при этом преобразовании не изменилась. Это же верно, если мы повернём треугольник  $T_1$  или  $T_2$  вокруг оси  $Oz$  на любой угол  $\alpha$ . Тем самым мы получаем *непрерывное семейство неконгруэнтных* двугранных углов  $S_\alpha$ , которые изменяют свою конфигурацию (т. е. внешнюю геометрию, так как изменяется, например, величина двугранного угла в пространстве), но все линии на них сохраняют свои длины и тем самым сохраняют внутреннюю геометрию поверхности. Такая деформация поверхности и называется её *изгибанием* (наряду с термином «изгибание» используют также слова *непрерывная изометрическая деформация*). При движении поверхности как твёрдого тела все кривые на ней тоже сохраняют свою длину. Такие деформации поверхности называются её *тривиальными изгибаниями*, а изгибания, не сводящиеся к движению поверхности как твёрдого тела, называются *нетривиальными*. Нетривиальные изгибания поверхности характеризуются тем, что при сохранении на ней длин кривых найдётся хотя бы одна хорда, у которой длина при её измерении по закону окружающего пространства изменяет свою величину.

Такую деформацию можно назвать деформацией поверхности с сохранением метрики. Имея в виду, что слово «изо» по-гречески значит «равное» или «одинаковое», получаемые при этом поверхности называют *изометричными*, т. е. имеющими одинаковую метрику.

Во-вторых, как показывает представление двугранного угла  $S'$  в виде одного треугольника  $A'O_1B$ , внутренняя геометрия двугранного угла локально (т. е. в некоторой малой окрестности каждой точки) оказалась обычной евклидовой геометрией. Про поверхности с такой метрикой говорят, что их метрика является *локально евклидовой* или что эти поверхности имеют *локально евклидову метрику* или ещё, что на этих поверхностях локально *реализована* евклидова метрика.

**Замечание 1.** Рассмотренное изгибание двугранного угла  $S$  можно связать и с изменением положения каждой грани. Действительно, такую деформацию можно описать так: в данной системе координат вершина  $A(a, 0, 0)$  переходит в вершину  $A_t(a \cos t, -a \sin t, 0)$ , вершина  $B(0, b, 0)$  переходит в вершину  $B_t(-b \sin t, b \cos t, 0)$ , а вершины  $O$  и  $O_1$  неподвижны. При  $t = 0$  имеем исходное положение двугранного угла  $S$ , при непрерывном изменении параметра  $t$  получаем непрерывное семейство изометричных поверхностей, в частности, при  $t = \pi/4$  при-

ходим к положению, когда величина двугранного угла равна  $\pi$  и вся поверхность имеет вид одного треугольника с основанием длины  $a + b$ , что и доказывает локальную евклидовость метрики.

**Задача 1.** Пусть треугольники  $T_1 : OO_1A$  и  $T_2 : OO_1B$  таковы, что после приведения их поворотом грани  $T_1$  вокруг оси  $Oz$  к одной плоскости  $x = 0$  получается невыпуклый четырёхугольник  $OA'O_1B$ . Каким будет кратчайший путь от точки  $M \in T_1$  до точки  $N \in T_2$  в зависимости от их расположения?

**Задача 2.** Изучите внутреннюю геометрию поверхности куба с ребром единичной длины. Для этого пронумеруйте следующие точки куба — все его вершины, центры граней и середины рёбер и найдите кратчайшие пути для каждой пары пронумерованных точек; вычислите их длины и сравните их с соответствующими расстояниями во внешней геометрии куба; определите и вычислите значения углов между диагоналями граней куба, сходящимися в одной вершине; установите вид окружностей радиуса 1 с центрами: а) в вершине куба; б) в середине ребра куба; в) в центре грани куба.

*Второй пример.* Пусть дан прямой круговой цилиндр конечной высоты  $h$ . Его строение можно описать следующим образом: в основании находится окружность некоторого радиуса  $R$ , и в каждой точке окружности перпендикулярно к плоскости основания проведён прямолинейный отрезок длины  $h$ . Эти отрезки называются (прямолинейными) образующими цилиндра. Пусть система координат  $Oxyz$  выбрана так, чтобы окружность  $C_1$  основания лежала на плоскости  $z = 0$  и имела центр в точке  $A_1(0, R)$ . Тогда её уравнение имеет вид  $x^2 + (y - R)^2 = R^2$  и координаты  $(x, y)$  её точек можно представить следующим образом:

$$x = R \sin \varphi, \quad y = R - R \cos \varphi, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi$$

(угол  $\varphi$  в точке  $O(0, 0)$  равен 0 и далее отсчитывается от радиуса  $A_1O$  к радиусу  $A_1M$ ,  $M \in C_1$ , в обе стороны с соответствующим знаком). Если положение точек на окружности описывать не с помощью угла  $\varphi$ , а длиной  $s$  дуги окружности от начала координат до рассматриваемой точки, тогда с учётом равенства  $s = R\varphi$  координаты точки  $M_s(x, y) \in C_1$  можно записать так:

$$x = R \sin \frac{s}{R}, \quad y = R - R \cos \frac{s}{R} = 2R \sin^2 \frac{s}{2R}, \quad -\pi R \leq s \leq \pi R.$$

Сначала предположим, что мы разрезали цилиндр вдоль некоторой его образующей. Тогда цилиндр можно аккуратно разворачивать, со-

•  $A_6(0, 6R)$

•  $A_5(0, 5R)$

•  $A_4(0, 4R)$

•  $A_3(0, 3R)$

$x = tR \sin \frac{\pi}{t} \rightarrow \pi R,$

$y = 2tR \sin^2 \frac{\pi}{2t} \rightarrow 0$

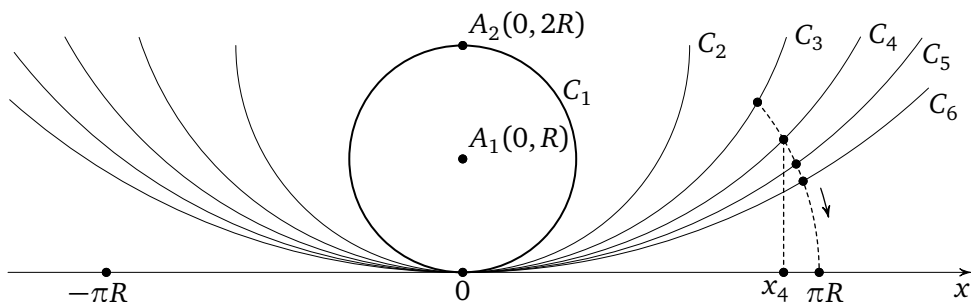


Рис. 2

храня образующие параллельными их исходным положениям, и в конце концов положить его поверхность на плоскость  $y = 0$ , т. е. на плоскость  $Oxz$  (рис. 2). Для этого достаточно уметь разворачивать окружность  $C_1$  с одной проколотой точкой на прямую. Это можно сделать многими способами. Опишем один из них. Пусть из окружности  $C_1$  удалена точка  $M(0, 2R)$ . Тогда полуокружности окружности  $C_1$  на полуплоскостях  $x > 0$  и  $x < 0$  можно постепенно положить с сохранением длин дуг на ось  $Ox$  с использованием семейства окружностей  $C_t, t \in [1, \infty)$ , возрастающего радиуса  $tR$  и с удаляющимся центром в точках  $A_t(0, tR)$ . При этом точка  $O(0, 0)$  остаётся на месте, а точка  $M$  раздвоится в точки  $M'_t$  и  $M''_t$ , которые на окружности  $C_t$  будут ограничивать дугу длины  $2\pi R$ . Каждая точка  $M_s$  окружности  $C_1$  при фиксированном  $s, |s| \in (0, \pi R)$ , опишет кривую  $\Gamma_{ts}$  с уравнениями

$$x = tR \sin \frac{s}{tR}, \quad y = 2tR \sin^2 \frac{s}{2tR},$$

которая при  $t \rightarrow \infty$  и  $s = \pm \pi R$  асимптотически имеет вид  $y \sim \gamma \sqrt{\pi R - |x|}$  с  $\gamma = \pi \sqrt{6\pi R}$  (рис. 2). Таким образом, проколотая точка  $M$  опишет справа кривую с уравнением  $x = tR \sin(\pi/t), y = tR - tR \cos(\pi/t)$  и в пре-

деле при  $t \rightarrow \infty$  правая полуокружность «ляжет» на отрезок  $[0, \pi R]$  на оси  $Ox$ , а левая полуокружность — на отрезок  $[-\pi R, 0]$  оси  $Ox$ . При такой непрерывной деформации окружности  $C_1$  с исключённой точкой  $M$  расположенная над  $C_1$  цилиндрическая поверхность непрерывно перейдёт на евклидову плоскость  $Oxz$  в прямоугольный лист с основанием длины  $2\pi R$  и высотой  $h$ . Рассмотренную деформацию можно описать формулами так: у разрезанного по образующей  $(0, 2R, z)$  цилиндра каждая точка с координатами  $x = R \sin(s/R)$ ,  $y = 2R \sin^2(s/(2R))$ ,  $z$ , где  $-\pi R < s < \pi R$ ,  $0 \leq z \leq h$ , непрерывно изменяет своё положение в пространстве, переходя в точки с координатами

$$x(t) = tR \sin \frac{s}{tR}, \quad y(t) = 2tR \sin^2 \frac{s}{2tR}, \quad z(t) = z$$

и, в частности, оказываясь в пределе при  $t \rightarrow \infty$  на плоскости  $xOz$ .

Процесс сворачивания листа бумаги в круговой цилиндр можно считать обратным к разворачиванию на плоскость цилиндра без одной образующей. Этот непрерывный процесс можно описать уравнениями

$$x = \frac{R}{\tau} \sin \frac{s\tau}{R}, \quad y = \frac{2R}{\tau} \sin^2 \frac{s\tau}{2R}, \quad z = z, \\ 0 \leq \tau \leq 1, \quad -\pi R < s < \pi R, \quad 0 \leq z \leq h,$$

где параметр  $\tau$  при значении  $\tau = 0$  соответствует (в предельном смысле) начальному положению листа бумаги, точки которого имеют координаты  $(s, z)$ , где  $-\pi R < s < \pi R$ ,  $0 \leq z \leq h$ , а при значении  $\tau = 1$  получается поверхность цилиндра без одной образующей.

Длины соответствующих дуг на окружностях  $z = \text{const}$  от  $t$  не зависят, так же как и длины соответствующих отрезков на образующих. Представляется довольно очевидным, и это мы формально докажем позже методами дифференциальной геометрии, что при этой деформации длины и остальных кривых на поверхностях не изменяются. Следовательно, мы описали *изгибание* поверхности цилиндра без одной образующей в плоский прямоугольник и, обратно, листа бумаги в круговой цилиндр без одной образующей.

Заметьте, что расстояние в пространстве между точками цилиндра  $O$  и  $A_2(0, 2R)$  в исходном положении равно  $2R$ , а между их образами  $O$  и  $M(\pm\pi R, 0)$  на листе в конце деформации оно равно  $\pi R \neq 2R$ , поэтому ни разворачивание, ни сворачивание не могут быть движениями, в частности, не могут быть вращениями.

Задача 3. Попробуйте найти уравнение траектории точки  $M$  в виде уравнения  $f(x, y) = 0$ .



ЗАМЕЧАНИЕ 2. Во-первых, мы видим, что цилиндр оказался новым примером поверхности с локально евклидовой метрикой. Во-вторых, при изгибании цилиндра в прямоугольник мы предполагали, что из цилиндра удалена одна образующая. Без этого условия провести изгибание невозможно. Действительно, рассмотрим на цилиндре две близкие точки, расположенные по разные стороны от удаляемой образующей. Если образующая не удалена, то на цилиндре между ними расстояние маленькое и их можно соединить короткой линией, а на прямоугольнике соединить их линией той же длины не удаётся, так как соответствующие им точки расположены близко к противоположным сторонам прямоугольника. Вот тут появляется новая тема исследований: построение поверхностей с локально евклидовой метрикой, не сводимых изгибанием к областям на плоскости. Про такие поверхности можно прочитать в статье автора [8].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. На самом деле цилиндрическая поверхность допускает изгибания и без удаления какой-либо её образующей. Проведите такой опыт: склейте модель прямого кругового цилиндра из листа бумаги, положите её на стол и слегка нажмите ладонью сверху, держа ладонь параллельно образующим. Модель деформируется так, что образующие останутся прямыми, а окружность основания перестанет быть окружностью и превратится в некоторую замкнутую кривую в форме овала или, если достаточно сильно нажать, в кривую с «талией». Общее утверждение такое. Пусть окружность основания превращена на той же плоскости в некоторую замкнутую кривую, на которой каждая дуга имеет ту же длину, что и её прообраз на окружности<sup>2)</sup>, а образующие в соответственных точках по-прежнему ортогональны плоскости кривой и сохраняют свою длину. Тогда новая цилиндрическая поверхность будет изометрична исходной поверхности  $C$ . При этом непрерывное изменение её формы в процессе надавливания будет изгибанием цилиндра  $C$ , в том числе и изгибанием всех новых положений поверхности. В частности, исходный цилиндр может быть приведён изгибанием в такое положение, когда он окажется дважды покрытым прямоугольником и тем самым не будет гладкой поверхностью (на боковых рёбрах прямоугольника направленная наружу нормаль к изометричным цилиндрам меняет своё направление скачком на  $180^\circ$ ). Как видим, в задачах изгибаний важным является и вопрос о классах регулярности рассматриваемых поверхностей.

---

<sup>2)</sup> Образно про возможность такой деформации говорят, что окружность не сделана из эластичного материала, т. е., например, она не резиновая.

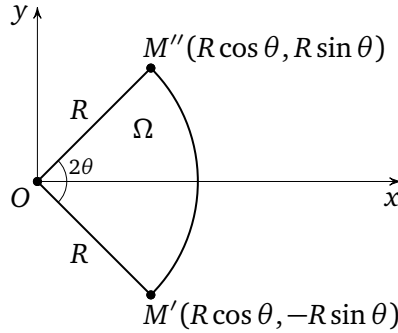


Рис. 3

*Третий пример.* Покажем, что боковая поверхность кругового конуса  $K_0$  без одной образующей изгибается в некоторую область на плоскости.

Пусть у прямого кругового конуса  $K_0$  с вершиной внизу в начале координат  $O(0, 0, 0)$  образующие имеют длину  $R$ , высоту  $H$ , а длина окружности основания равна  $2l$ . Считаем, что угол между образующими конуса и осью конуса, идущей вдоль оси  $Oz$ , равен  $45^\circ$ . Тогда радиус  $\rho$  окружности основания равен  $H$ , причём  $\rho = l/\pi$ ,  $R = (l/\pi) \cdot \sqrt{2}$ .

Рассмотрим теперь на плоскости  $z = 0$  сектор  $\Omega$  круга радиуса  $R$  с центром в начале координат  $O(0, 0)$ , ограниченный двумя радиусами  $OM'$  и  $OM''$ , расположенными симметрично относительно оси  $Ox$  (рис. 3). Считаем, что длина дуги  $M'M''$  равна  $2l$ , так что угол  $2\theta$  между радиусами  $OM'$  и  $OM''$  определяется из соотношения  $2\theta = 2l/R$ . Так как  $R = (l/\pi) \cdot \sqrt{2}$ , получаем, что  $\theta = \pi\sqrt{2}/2$ , а координаты точек дуги  $M'M''$  представимы в следующем виде:

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad -\theta \leq \varphi \leq \theta.$$

Покажем, что если из конуса удалить одну образующую (включая вершину), то боковую поверхность конуса можно непрерывной деформацией перевести в сектор  $\Omega$  с сохранением длин кривых, т. е. существует *изгибание* любой области на данном конусе в некоторую область на плоскости (тем самым мы покажем, что геометрия на конусе является локально евклидовой).

Проведём сферу радиуса  $R$  с центром в начале координат. Тогда основание конуса окажется на сфере окружностью  $C_0$  радиуса  $\rho$  на высоте  $z = H = \rho$ , сам конус будет внутри сферы, его образующие будут радиусами, проведёнными из начала координат — вершины конуса — к точкам окружности  $C_0$ , а область  $\Omega$  будет расположена тоже внутри сферы на плоскости её экватора  $z = 0$  (рис. 4а). Удалим из конуса обра-

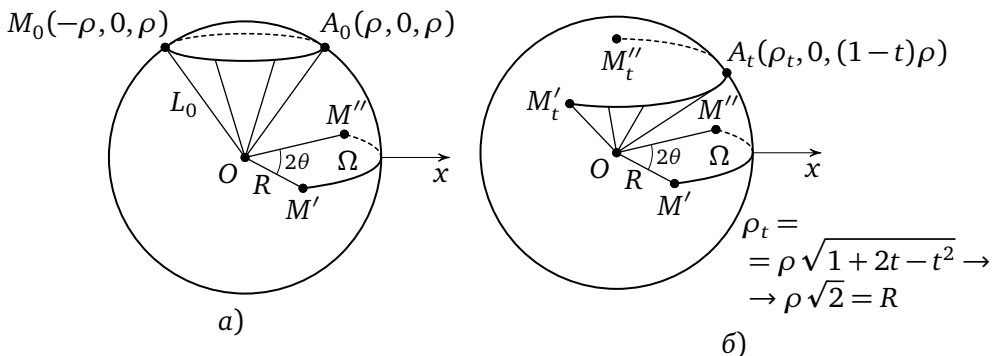


Рис. 4

зующую  $L_0$ , лежащую на полуплоскости  $y = 0, x < 0$ , тогда из окружности  $C_0$  удалится точка  $M_0(-\rho, 0, \rho)$ . Будем изменять конус, расширяя его угол при вершине, и следя при этом за его частью, ограниченной образцами удалённой образующей. Основанием этих конусов  $K_t$  будут окружности  $C_t, 0 \leq t < 1$ , расположенные на горизонтальных плоскостях  $z = z_t = \rho - t\rho$  и имеющие радиус

$$\rho_t = \sqrt{R^2 - (\rho - t\rho)^2} = \rho \sqrt{1 + 2t - t^2},$$

а точка  $M_0$  раздвоится и перейдёт в две точки

$$M_t' \left( \rho_t \cos \frac{R\theta}{\rho_t}, -\rho_t \sin \frac{R\theta}{\rho_t}, (1-t)\rho \right)$$

и

$$M_t'' \left( \rho_t \cos \frac{R\theta}{\rho_t}, \rho_t \sin \frac{R\theta}{\rho_t}, (1-t)\rho \right)$$

(эти значения координат получены из условия, что длина дуги  $M_t'M_t''$  на окружности  $C_t$  остаётся равной  $2l$ ).

При такой деформации образующие конуса  $K_0$ , идущие от его вершины к точкам окружности  $C_0$ , переходят в конусе  $K_t$  в образующие той же постоянной длины  $R$ , идущие от неподвижной вершины к соответствующим по длине дуги точкам окружности  $C_t$  (для ориентировки: точка  $A_0(\rho, 0, \rho) \in C_0$  переходит в точку  $A_t(\rho_t, 0, (1-t)\rho) \in C_t$ , остающуюся на плоскости  $y = 0$ , см. рис. 4 б). Для описания траекторий остальных точек конуса вспомним, как получаются координаты точек конической поверхности. По определению, коническая поверхность состоит из лучей, проведённых из одной точки, называемой *вершиной*, к точкам некоторой кривой, называемой *направляющей*. В нашем случае вершина конуса  $K_t$  — это начало координат  $O(0, 0, 0)$ , а направляющая — дуга окружности  $C_t$  постоянной длины  $2l$ . Точки дуги  $M_t'M_t''$

окружности  $C_t$  имеют следующую параметризацию в функциях от  $s$ :

$$x(s, t) = \rho_t \cos \frac{s}{\rho_t}, \quad y(s, t) = \rho_t \sin \frac{s}{\rho_t}, \quad z(s, t) = (1 - t)\rho,$$

$$-R\theta \leq s \leq R\theta, \quad \rho_t = \rho \sqrt{1 + 2t - t^2}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Точки отрезков образующих от вершины до точек дуги  $M'_t M''_t$  на окружности  $C_t$  имеют следующие координаты (использованы координаты векторов постоянной длины  $R$  с началом в вершине конуса и с концом на дуге  $M'_t M''_t$  окружности  $C_t$ ):

$$x(s, t, r) = \frac{r}{R}x(s, t), \quad y(s, t, r) = \frac{r}{R}y(s, t), \quad z(s, t, r) = \frac{r}{R}z(s, t), \quad 0 < r \leq R. \quad (1)$$

Пусть  $B_h^0$  — произвольная точка конуса  $K_0$  на высоте  $h < H$ . Длина отрезка образующей, идущей до неё от вершины, равна  $h\sqrt{2}$ . Найдём на отрезках прямых (1) точки, отстоящие от вершины на то же расстояние  $h\sqrt{2}$ . Поскольку концевые точки отрезков образующих лежат на сфере радиуса  $R$ , достаточно взять  $r = h\sqrt{2}$ , т. е. все они лежат на горизонтальной плоскости

$$z = \frac{h\sqrt{2}}{R}(1 - t)\rho.$$

Следовательно, все образующие конусов  $K_t$  при  $t \rightarrow 1$  переходят на плоскость  $z = 0$  в отрезки

$$x(s, 1, r) = r \cos \frac{s}{R}, \quad y(s, 1, r) = r \sin \frac{s}{R}, \quad z = 0, \quad 0 \leq r \leq R,$$

т. е. боковая поверхность конуса без одной образующей непрерывным образом переходит в круговой сектор  $\Omega$ , при этом горизонтальные сечения в виде круговых дуг тоже переходят в дуги окружностей той же длины. Позже мы покажем, что сохранится также и длина *любой* кривой.

Таким образом, мы продемонстрировали существование изгиба боковой поверхности конуса (без одной образующей) в область на плоскости. В частности, если мы выделили на конусе с самого начала произвольную область, то она при изгибании всей поверхности непрерывным образом перейдёт в некоторую плоскую область с сохранением длин всех кривых, значит, любая область конуса изгибается в плоскую область (в такой ситуации говорят, что одна поверхность *наложима* на другую).

**Задача 4.** Проведите аналогичные построения в случае, когда угол между осью конуса и его образующими имеет произвольное значение  $\alpha < \pi$ .

Задача 5. Исследуйте, в каком случае между боковыми поверхностями двух круговых конусов можно установить изометрическое соответствие.

Задача 6 (трудная). Пусть на прямом круговом цилиндре с осью  $Oz$  есть «прямоугольная заплатка»  $\Pi$  в виде куска, ограниченного двумя образующими и двумя дугами окружностей, полученных сечениями цилиндра плоскостями, ортогональными образующим. Найдите на прямом круговом конусе с той же осью  $Oz$  область, изометричную  $\Pi$ . (Представьте себе, что вы хотите заклеить прямоугольной неэластичной, но изгибаемой заплаткой дыру на поверхности в виде прямого кругового конуса. Вопрос — какую форму примет заплатка на конусе?)

### § 3. ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ МЕТРИКИ И ИЗГИБАНИЙ

КАК ИЗМЕРЯЮТСЯ ДЛИНЫ КРИВЫХ И РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ТОЧКАМИ НА ПЛОСКОСТИ В РАЗНЫХ КООРДИНАТАХ?

Пусть на плоскости введена прямоугольная декартова система координат  $Oxy$  с выбранной единицей длины. Пусть  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$  — две точки с указанными координатами (рис. 5). Тогда длина  $s(M_1, M_2)$  отрезка между ними на основании теоремы Пифагора вычисляется по формуле

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (2)$$

Эта величина одновременно является и расстоянием между точками  $M_1$  и  $M_2$ , так как отрезок прямой является кратчайшей линией между его концевыми точками (а *расстоянием* между данными точками и называется *длина кратчайшей линии* между этими точками). Формула (2) верна для всех положений точек  $M_1$  и  $M_2$  независимо от того, расположены они близко или далеко друг от друга. Чтобы не указывать каждый раз расположение точек, закон вычисления расстояния

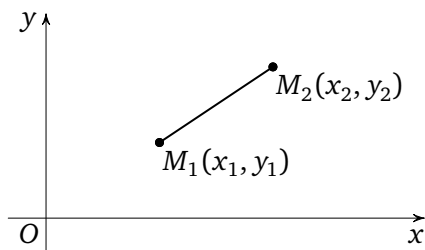


Рис. 5

между точками кратко записывают в следующем виде:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

или, более изящно,

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2, \quad (3)$$

где  $\Delta s$  обозначает расстояние между точками, а  $\Delta x$  и  $\Delta y$  обозначают, соответственно, разности абсцисс и ординат рассматриваемых точек. Если одна из точек фиксирована, то  $\Delta x$  и  $\Delta y$  называют *приращениями* координат.

Используем формулу (3) для вычисления длины произвольной кривой на плоскости. Идея состоит в следующем: данную кривую  $L$  разобьём точками  $M_i \in L$ ,  $1 \leq i \leq n$ , на маленькие дуги  $M_i M_{i+1}$  и, вычислив длины хорд  $M_i M_{i+1}$  по формуле (3), примем сумму их длин за приближённое значение длины всей кривой. Очевидно, чем мельче разбиение кривой  $L$  на дуги, тем меньше хорды этих дуг отличаются от самих дуг и тем ближе сумма их длин к интуитивно ожидаемой длине всей кривой. Пусть кривая  $L$  задана уравнением  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , а точки  $M_i$  имеют координаты  $(x_i, y_i = f(x_i))$ , где  $x_1 = a$ ,  $x_n = b$ . Предположим, что функция  $f(x)$  имеет производную  $f'(x)$ . Тогда

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i) \approx f'(x_i) \Delta x_i$$

(вспомним, что производная  $f'(x)$ , как предел отношения  $\Delta f / \Delta x$ , близка к  $\Delta f / \Delta x$  при малых  $\Delta x$ ). Выражение  $f'(x_i) \Delta x_i$  обозначается  $df(x_i)$ , и называется оно *дифференциалом* функции  $f(x)$  в точке  $x = x_i$  (рис. 6). Основное его свойство состоит в том, что его значение при малых приращениях аргумента  $\Delta x$  мало отличается от значения соответствующего приращения функции<sup>3)</sup>. Если переменная независимая, то её приращение одновременно принимается за её дифференциал, так что в нашем случае  $\Delta x = dx$  и тогда для дифференциала имеем более симметричную запись  $df = f'(x) dx$ . Соответственно, неизвестная пока функция  $s(x)$  имеет дифференциал  $ds = s'(x) dx$ . (Величины  $dx$ ,  $dy$  и  $ds$  являются *главными членами* или *главными частями* бесконечно малых величин  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta s$  при бесконечном приближении соседних точек к рассматриваемой точке, и все они называются *дифференциалами* соответствующих величин).

<sup>3)</sup> Например, для функции  $y = x^2$  в точке  $x = 1$  имеем  $y(1) = 1$  и  $\Delta y(1) = (1 + \Delta x)^2 - 1 = 2\Delta x + (\Delta x)^2$ , так что  $\Delta y(1)$  отличается от  $dy(1) = 2\Delta x$  при малых  $\Delta x$  на величину, на порядки меньшую самого значения  $\Delta y(1)$ , скажем, если  $\Delta x \approx 10^{-2}$ , то  $\Delta y(1)$  отличается от  $dy$  на величину порядка  $10^{-4}$ .

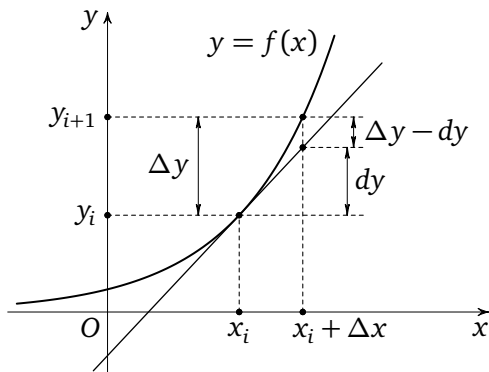


Рис. 6

Теперь формулу (3) можно представить в виде

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + f'^2(x_i)} \Delta x_i,$$

и сумма величин  $\Delta s_i$  по всем  $i$  будет не чем иным, как интегральной суммой для функции  $\sqrt{1 + f'^2(x_i)}$ , и после предельного перехода при бесконечном измельчении кривой  $L$  на малые дуги длина кривой представится как определённый интеграл

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \tag{4}$$

По-другому, в дифференциалах эту формулу можно получить так: заменим в (3) равенства в приращениях равенствами в дифференциалах и получим соотношение

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow ds = \sqrt{1 + f'^2(x)} dx,$$

определённый интеграл которого от  $a$  до  $b$  и даст ту же самую формулу (4).

Пусть теперь на плоскости введена *косоугольная* система координат, в которой угол между осями равен  $\omega$ . Координаты точек в такой системе получаются как длины проекций точки на оси параллельно другой оси (рис. 7), а расстояние  $s$  между точками  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$

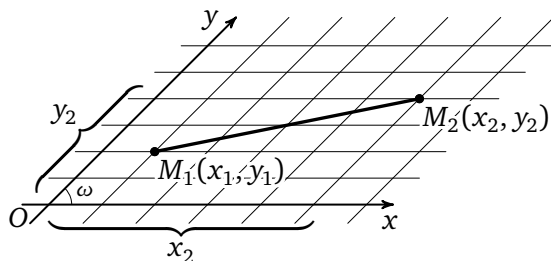


Рис. 7

вычисляется по формуле

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + 2 \cos \omega (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + (y_2 - y_1)^2$$

или, по аналогии с (3),

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + 2 \cos \omega \Delta x \Delta y + \Delta y^2 \quad (5)$$

(для получения этой формулы используется теорема косинусов).

В общем случае, на осях  $Ox$  и  $Oy$  могут быть введены разные единицы длины (или разные масштабы), тогда закон измерения расстояний принимает более общий вид

$$\Delta s^2 = a \Delta x^2 + 2b \Delta x \Delta y + c \Delta y^2, \quad (6)$$

где  $a, b, c$  — некоторые постоянные с условиями

$$ac - b^2 > 0, \quad a > 0, \quad c > 0. \quad (7)$$

Формула (6) называется *представлением евклидовой метрики в аффинных координатах*. То, что эта метрика изометрична обычной евклидовой метрике (3) в стандартных декартовых координатах, доказывается следующим образом. Перепишем формулу (6), переобозначив аффинные координаты, чтобы отличать их от декартовых, как  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$ :

$$\Delta \tilde{s}^2 = a \Delta \tilde{x}^2 + 2b \Delta \tilde{x} \Delta \tilde{y} + c \Delta \tilde{y}^2. \quad (8)$$

Введём взаимно однозначное и непрерывное в обе стороны соответствие между точками с декартовыми координатами  $(x, y)$  и с аффинными координатами  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  по закону

$$\begin{cases} x = \sqrt{a} \tilde{x} + \frac{b}{\sqrt{a}} \tilde{y}, \\ y = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{\sqrt{a}} \tilde{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{x} = \frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{b}{\sqrt{a} \sqrt{ac - b^2}} y, \\ \tilde{y} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ac - b^2}} y. \end{cases} \quad (9)$$

Нетрудно подсчитать, что расстояние между двумя соответствующими точками, вычисленное в метриках (3) и (8), т. е. как в (6), но с пониманием, что буквы  $x, y$  обозначают уже аффинные координаты, получается одинаковым (рис. 8). Значит, отображение (9) является изометрией между плоскостью с евклидовой метрикой (3) и плоскостью, на которой расстояния измеряются по закону метрики (6).

Это наблюдение можно истолковать так: пусть на двух плоскостях введены обычные декартовы координаты с разными обозначениями  $(x, y)$  и  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  и с разными законами измерения расстояний (3) и (8), см. рис. 8. Так вот, для соответствующих по формуле (9)



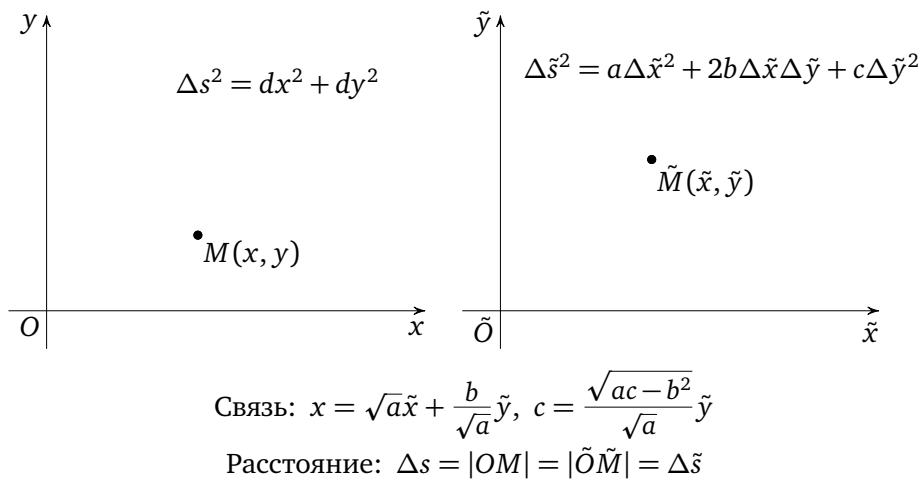


Рис. 8

пар точек эти законы дают одинаковые значения расстояний. Это и означает, что плоскости с этими законами измерения расстояний изометричны и изометрия между ними задаётся формулой (9). Как видим, на плоскости закон измерения расстояний между точками можно задать в двух видах — в виде (3) и в виде (6), в обоих случаях геометрия получится одинаковая — евклидова, а разница будет в том, что наглядные представления взаиморасположения геометрических объектов будут разными. Например, если две прямые перпендикулярны, то в первом случае они изобразятся прямыми, пересекающимися визуально под прямым углом, а во втором случае видимый на рисунке угол между ними не обязательно будет прямым: прямые  $x = 0$  и  $y = 0$  в метрике (3) будут ортогональными, но в случае метрики (6) или (8) соответствующие прямые визуально не будут ортогональными. Если считать, что оба закона измерения расстояний даны на одной и той же плоскости, тогда расстояние между любой парой точек можно измерять по двум разным законам, и на плоскости в принципе могут получиться две разные геометрии (для описания такой ситуации как раз и подходит термин Лобачевского «воображаемая геометрия»).

**Задача 7.** Возьмите конкретные числовые значения коэффициентов  $a, b, c$ , удовлетворяющие условиям (7), и нарисуйте несколько пар прямых на плоскости  $xOy$  и, соответственно, на плоскости  $\tilde{x}\tilde{O}\tilde{y}$ . В силу изометричности метрик углы в парах между соответствующими прямыми должны быть равными, но визуально они, вообще говоря, будут разными. Бывают ли случаи, когда углы будут равными?

Способы задания евклидовой и локально евклидовой метрики на плоскости можно расширить ещё больше. Например, положение точек на плоскости можно описать также *полярными координатами*  $r$  и  $\varphi$ . Координата  $r$  называется *полярным радиусом* и имеет значения  $0 \leq r < \infty$ . Геометрически значение  $r$  равно расстоянию от некоторой точки  $P$ , называемой *полюсом*, до рассматриваемой точки  $M$ . Координата  $\varphi$  называется *полярным углом*, и она равна величине в радианах угла между лучом  $PM$  и некоторым исходящим из полюса лучом, называемым *полярной осью* (рис. 9). Значение угла  $\varphi$  обычно считается положительным, и тогда он принимает значения от 0 до  $2\pi$ , или же он берётся со знаком по обычному правилу выбора знака, и тогда он принимает значения в промежутке  $(-\pi, \pi]$ .

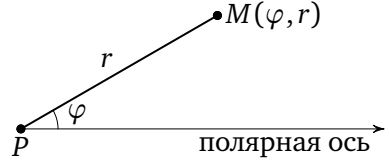


Рис. 9

Если на той же плоскости  $\Pi$  введена система декартовых координат, у которой начало координат совпадает с полюсом полярных координат, а ось  $Ox$  идёт по полярной оси, такие две системы координат называются *согласованными*. В согласованных системах координат декартовые координаты  $(x, y)$  и полярные координаты  $(\varphi, r)$  одной и той же точки связаны следующими соотношениями (рис. 10):

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Координаты на плоскости, отличные от декартовых, называются *криволинейными координатами*. Такое их название в случае полярных координат объясняется следующим построением. Введём отдельную вспомогательную плоскость  $\Pi_1$  с *декартовыми* координатами, которые обозначим как  $(\varphi, r)$  (рис. 11). Рассмотрим на  $\Pi_1$  вертикальную полуполосу  $\Omega$ :  $(0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq r < \infty)$ . Отображение  $\Phi: \Omega \rightarrow \Pi$  по фор-

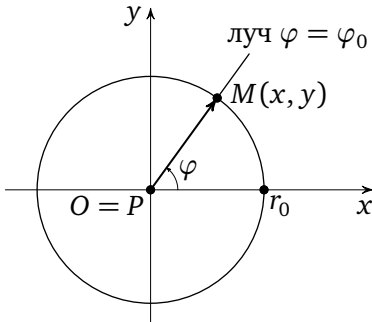


Рис. 10

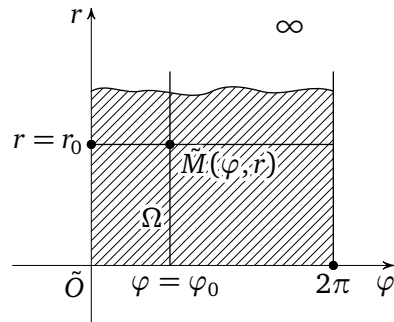


Рис. 11

муле

$$x = x(\varphi, r) = r \cos \varphi, \quad y = y(\varphi, r) = r \sin \varphi \quad (10)$$

переводит точку  $\tilde{M}(\varphi, r) \in \Omega$  в точку  $M(x, y) \in \Pi$ , для которой  $(\varphi, r)$  будут полярными координатами (рис. 11). При этом координатная полупрямая  $\varphi = \text{const} = \varphi_0 < 2\pi$  из  $\Omega$  переходит в основной плоскости  $\Pi$  в луч, исходящий из начала координат под углом  $\varphi_0$  к положительной полуоси  $Ox$ , отложенным в положительном направлении. Этот луч называется *r-линией*, так как вдоль него изменяется только полярный радиус  $r$ . Координатный отрезок  $r = \text{const} = r_0 > 0$  из  $\Omega$  отображается в  $\Pi$  в окружность радиуса  $r_0$  с центром в начале координат. Эта окружность называется *φ-линией*. Мы видим, что в полярных координатах одна из координатных линий, а именно  $\varphi$ -линия, является кривой. Существуют ещё другие системы координат, в которых обе координатные линии оказываются *кривыми* линиями, что и объясняет их название.

Из разных видов евклидовой метрики на плоскости выберем самый простой:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad (11)$$

соответствующий формуле (3). Мы помним, что  $dx \approx \Delta x$ ,  $dy \approx \Delta y$ , а из (11) имеем

$$\begin{aligned} dx \approx \Delta x &= x(\varphi + \Delta\varphi, r + \Delta r) - x(\varphi, r) = \\ &= (r + \Delta r) \cos(\varphi + \Delta\varphi) - r \cos \varphi = \\ &= ((r + \Delta r) - r) \cos(\varphi + \Delta\varphi) + r(\cos(\varphi + \Delta\varphi) - \cos \varphi) \approx \\ &\approx \Delta r \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \Delta\varphi \end{aligned}$$

(учтено, что  $\cos \Delta\varphi \approx 1$ ,  $\sin(\Delta\varphi/2) \approx \Delta\varphi/2$  при  $\Delta\varphi \rightarrow 0$ , и отброшены все произведения двух бесконечно малых величин). Аналогично получим, что

$$dy \approx \Delta y \approx \Delta r \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \Delta\varphi$$

(мы просто вычислили дифференциалы функций  $x(\varphi, r)$  и  $y(\varphi, r)$  из (10)). Подставляя найденные значения  $dx$  и  $dy$  в (11), с заменой  $\Delta r$  и  $\Delta\varphi$  соответственно на  $dr$  и  $d\varphi$  получим

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (12)$$

Полученную формулу называют *представлением евклидовой метрики в полярных координатах*. Проверим на двух примерах, что она действительно позволяет вычислять длины кривых на евклидовой плоскости. Пусть на луче  $L: x = t \cos \varphi_0$ ,  $y = t \sin \varphi_0$ ,  $t > 0$ , даны две точки

$M_1(t_1 \cos \varphi_0, t_1 \sin \varphi_0)$  и  $M_2(t_2 \cos \varphi_0, t_2 \sin \varphi_0)$ . Расстояние между ними вычисляется по формуле (3) и равно  $|t_2 - t_1|$ . С другой стороны, эти точки имеют полярные координаты  $(\varphi_0, t_1)$  и  $(\varphi_0, t_2)$ . Так как вдоль луча угол  $\varphi$  постоянен, получаем, что  $d\varphi = 0$ , поэтому по формуле (12) имеем  $ds = dr$  и  $s(M_1, M_2) = |r_2 - r_1| = |t_2 - t_1|$ , т. е. получаем ту же самую длину, что и вычислили в обычной метрике.

В качестве второго примера вычислим в полярных координатах длину окружности радиуса  $R$  с центром в начале координат. Она, как известно, равна  $2\pi R$ . Обратимся к формуле (11). В ней  $dr = 0$ , так как вдоль окружности  $r$  не изменяется, значит,  $ds = R d\varphi$ . А координата  $\varphi$  изменяется от 0 до  $2\pi$ . Интегрируя, как это объяснялось при получении формулы (4), получаем

$$s = \int_0^{2\pi} R d\varphi = 2\pi R,$$

что и требовалось показать.

#### ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИН КРИВЫХ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

Сначала рассмотрим, как задаются поверхности. В простейшем варианте они определяются как образы отображений плоских областей в пространство. Пусть  $D$  — некоторая область на плоскости с декартовыми координатами  $(u, v)$ , и  $\Phi: D \rightarrow R^3$  — некоторое отображение этой области в пространство, в котором введена декартова координатная система  $Oxyz$ . Тогда отображение  $\Phi$  задаётся тремя функциями

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in D. \quad (13)$$

Наглядно это иллюстрируется так: точка  $M(u, v) \in D$  отображением  $\Phi$  переводится в точку  $P \in R^3$  с координатами  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$ ; точка  $M$  «бегает» по области  $D$ , и при этом её образы  $P$  располагаются в пространстве в точках с координатами, определяемыми формулой (13), см. рис. 12, и их совокупность и образует то, что мы называем поверхностью. Если мы обозначим её буквой  $S$ , то можно написать, что  $S = \Phi(D)$ . Для каждой точки  $P \in S$  построим вектор

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\},$$

тогда можем сказать, что концевые точки этих векторов «пробегают» поверхность  $S$ . Вектор-функция  $\mathbf{r}(u, v)$  называется *радиус-вектором* поверхности, а значения величин  $(u, v)$  называются *внутренними координатами* точек поверхности (соответственно,  $(x, y, z)$  называются

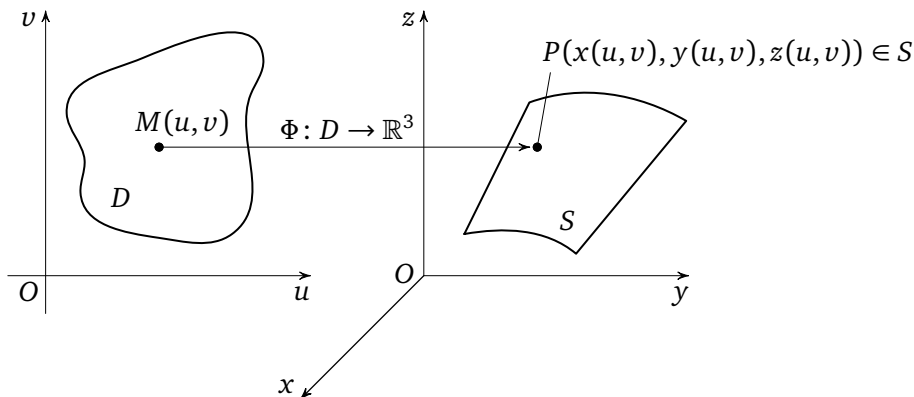


Рис. 12

пространственными координатами точек поверхности). Дополнительно предположим, что функции в отображении (13) непрерывны и, более того, имеют непрерывные производные по переменным  $u$  и  $v$ . Тогда их приращения

$$\begin{aligned} \Delta x &= x(u + \Delta u, v + \Delta v) - x(u, v), \\ \Delta y &= y(u + \Delta u, v + \Delta v) - y(u, v), \\ \Delta z &= z(u + \Delta u, v + \Delta v) - z(u, v) \end{aligned}$$

при малых  $\Delta u$  и  $\Delta v$  имеют линейные части вида  $A\Delta u + B\Delta v$ , где коэффициенты  $A$  и  $B$  выражаются соответственно производными по  $u$  и  $v$  от функций  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$ . Эти линейные части называются дифференциалами соответствующих функций и обозначаются  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \Delta x &\approx dx = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) du + \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) dv, \\ \Delta y &\approx dy = \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) du + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) dv, \\ \Delta z &\approx dz = \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) du + \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) dv. \end{aligned} \tag{14}$$

Эти формулы помогут нам найти правила вычисления длин кривых на поверхностях. Начнём с вычисления в пространстве с декартовыми координатами  $(x, y, z)$  расстояния  $s(M_1, M_2)$  между двумя точками  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ . Аналогично случаю плоскости, в пространстве тоже есть формула для расстояния, полученная двукратным применением теоремы Пифагора:

$$s^2(M_1, M_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

которую можно переписать в виде

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2.$$

Заменяя по (14) приращения функций их дифференциалами, получим формулу для вычисления элемента длины кривых на поверхности:

$$ds^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \mathbf{r}'_u{}^2 = \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_u = x_u'^2(u, v) + y_u'^2(u, v) + z_u'^2(u, v), \\ F(u, v) &= \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_v = x_u'(u, v)x_v'(u, v) + y_u'(u, v)y_v'(u, v) + z_u'(u, v)z_v'(u, v), \\ G(u, v) &= \mathbf{r}'_v{}^2 = \mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{r}'_v = x_v'^2(u, v) + y_v'^2(u, v) + z_v'^2(u, v). \end{aligned} \quad (16)$$

Формула (15) называется *первой основной квадратичной* или *метрической формой* поверхности, и она позволяет вычислять длины расположенных на ней кривых. Действительно, кривую на поверхности обычно задают следующим образом: сначала в области  $D$  изменения внутренних координат  $(u, v)$  задаётся некоторая кривая  $\gamma$  уравнением, связывающим переменные  $u$  и  $v$ , например,  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$ . Затем отображением  $\Phi: D \rightarrow R^3$  эта кривая переносится в  $R^3$  и на поверхности  $S$  получается кривая  $\Gamma$  с уравнением

$$\begin{aligned} x &= x(t) = x(u(t), v(t)), \\ y &= y(t) = y(u(t), v(t)), \\ z &= z(t) = z(u(t), v(t)). \end{aligned}$$

Если теперь вычислять длину кривой  $\Gamma$  по формуле  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ , то получится, что

$$\begin{aligned} ds^2 &= [E(u, v)u'^2(t) + 2F(u, v)u'(t)v'(t) + G(u, v)v'^2(t)] dt^2 = \\ &= E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2, \end{aligned}$$

т. е. каждой поверхности соответствует на плоскости внутренних координат  $(u, v)$  свой закон измерения длин. Теорема, установленная ещё в XVIII веке Эйлером, гласит, что для того, чтобы две поверхности с общей областью внутренних координат были изометричны, необходимо и достаточно, чтобы их первые основные квадратичные формы в этих координатах совпадали.

Отсюда имеем признак изгибаемости поверхности: для того, чтобы данная поверхность  $S$  с радиус-вектором  $\mathbf{r}(u, v)$ ,  $(u, v) \in D$ , была изгибаемой, необходимо и достаточно, чтобы её можно было включить в семейство поверхностей  $S_t$  с радиус-векторами  $\mathbf{r}(u, v, t)$ ,  $(u, v) \in D$ ,

непрерывно зависящими от параметра  $t$  в некотором интервале его изменений, и с одной и той же независимой от  $t$  первой основной квадратичной формой (15).

На самом деле проверка изгибаемости — операция не очень простая, так как предъявить конкретное семейство изгибаний  $S_t$  удаётся только в редких случаях. Сделаем это для рассмотренных выше примеров цилиндрических и конических поверхностей.

#### ИЗГИБАНИЕ ПРЯМОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА БЕЗ ОДНОЙ ОБРАЗУЮЩЕЙ

Пусть цилиндр расположен как это описано в пункте *Второй пример*. Тогда поверхности  $S_\tau$  с координатами точек

$$x = \frac{R}{\tau} \sin \frac{u\tau}{R}, \quad y = \frac{2R}{\tau} \sin^2 \frac{u\tau}{2R}, \quad z = v, \\ 0 \leq \tau \leq 1, \quad -\pi R < u < \pi R, \quad 0 \leq v \leq h$$

имеют при всех  $\tau$  первую основную квадратичную форму с коэффициентами  $E(u, v) = 1$ ,  $F(u, v) = 0$ ,  $G(u, v) = 1$ , т. е. у них у всех одна и та же евклидова метрика  $ds^2 = du^2 + dv^2$ . При  $\tau = 1$  поверхность  $S_1$  имеет уравнение

$$x = x(u, v) = R \sin \frac{u}{R}, \quad y = y(u, v) = 2R \sin^2 \frac{u}{2R}, \quad z = z(u, v) = v, \\ (u, v) \in D = -\pi R \leq u \leq \pi R, \quad 0 \leq v \leq h,$$

так что  $S_1$  совпадает с рассматриваемым прямым круговым цилиндром, а при  $\tau \rightarrow 0$  предельная поверхность  $S_0$  представляет собой прямоугольник  $D = -\pi R \leq x \leq \pi R, 0 \leq z = v \leq h$  в плоскости  $(x, z)$ , на который изгибанием наложился цилиндр  $S_1$  без одной образующей.

Рассмотрим теперь *третий пример*. В нём деформация прямого кругового конуса описывалась поверхностями с координатами точек (см. формулу (2))

$$x = x(\varphi, r, t) = \frac{r}{R} \rho_t \cos \frac{R\varphi}{\rho_t}, \\ y = y(\varphi, r, t) = \frac{r}{R} \rho_t \sin \frac{R\varphi}{\rho_t}, \\ z(\varphi, r, t) = \frac{r\rho}{R}(1-t), \tag{17}$$

$$0 < r \leq R, \quad -\theta \leq \varphi \leq \theta, \quad \rho_t = \rho \sqrt{1 + 2t - t^2}.$$

Если мы вычислим коэффициенты первой квадратичной формы этой поверхности, то при всех  $t \in [0, 1]$  получим

$$E = x_r'^2 + y_r'^2 + z_r'^2 = 1, \quad F = 0, \quad G = x_\varphi'^2 + y_\varphi'^2 + z_\varphi'^2 = r^2,$$

т. е.  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$ , а это есть в точности евклидова метрика (12) области  $\Omega$  в полярных координатах. Значит, семейство поверхностей (17) представляет собой наложение на евклидову область  $\Omega$  конуса  $K_0$  без одной образующей.

#### § 4. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ИЗГИБАНИЯХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Первый локальный результат об изгибаниях поверхностей, как сказано выше, был установлен ещё Л. Эйлером. Он же отметил, что фактическая проверка изгибаемости/неизгибаемости данной поверхности «в целом» (т. е. не в малых окрестностях точек) является чрезвычайно трудной задачей, и предположил, что замкнутая поверхность без края является неизгибаемой. Но это его предположение требует уточнений, так как свойство изгибаемости данной поверхности существенно зависит и от класса регулярности самой поверхности, и от того, в каком классе деформаций должны происходить изгибания. В классической постановке предполагается, что поверхность и её изгибания должны быть по крайней мере класса гладкости  $C^2$  (т. е. радиус-вектор поверхности должен иметь непрерывные вторые производные). В такой постановке проблема, известная в литературе под названием *гипотеза Эйлера о неизгибаемости компактной поверхности*, до сих пор остаётся не доказанной (но и не опровергнутой каким-нибудь контрпримером). Мы думаем, что гипотеза Эйлера верна в классе аналитических поверхностей<sup>4)</sup>, и есть основания предполагать, что она неверна в классе бесконечно дифференцируемых поверхностей.

Но есть классы поверхностей, для которых эта гипотеза доказана. К ним относятся выпуклые поверхности. Прежде всего в конце XIX века была доказана неизгибаемость сферы, затем постепенно доказательство распространялось на более широкие классы выпуклых поверхностей и, наконец, в 1949 г. харьковский математик А. В. Погорелов доказал это свойство выпуклых поверхностей в самом широком классе без всяких дополнительных условий регулярности: любая замкнутая выпуклая поверхность неизгибаема в классе выпуклых поверхностей, более того, любые две выпуклые изометричные поверхности конгруэнтны (т. е. априори не требуется даже предположение, что одна из них получена из другой путём изгибания). В применении

<sup>4)</sup> То есть заданных аналитическими функциями — это некоторый класс функций, например, все элементарные функции аналитические в области их существования, исключая их граничные точки, если они есть.



к многогранникам это означает, что любые два выпуклых многогранника, составленных из одинакового набора граней с одинаковым законом их взаимного соединения по рёбрам, будут конгруэнтны (доступное школьникам изложение доказательства неизгибаемости сферы и вообще более «продвинутое» и более подробное изложение обсуждаемых здесь вопросов можно найти в работе [12]).

Однако для многогранников гипотеза Эйлера оказалась неверной. Хотя первый общий результат, принадлежащий Лежандру (1794) и Коши (1813), о неизгибаемости выпуклых многогранников как будто и подтверждал предположение Эйлера, но в 1977 г., через более чем полтора века после Лежандра — Коши американский математик Р. Коннелли построил пример невыпуклого изгибаемого многогранника. Подробнее о теореме Лежандра — Коши см. в работах [7] и [4], а об изгибаемых многогранниках см. работы [1, 5, 6, 9, 10]. Более того, оказалось, что и выпуклые многогранники можно изгибать, если разрешать изменять их комбинаторное строение, т. е. разрешать разбивать их грани на меньшие треугольники и сгибать грани по проведённым линиям их разбиения, получая тем самым некоторые невыпуклые многогранники, изометричные исходному выпуклому многограннику, см. об этом работу [2]. Поскольку мы уже знаем, что область плоскости можно изометрически представить в виде части цилиндра или конуса, появилась задача о возможности построения кусочно-гладкой поверхности, которая была бы изометрична выпуклому многограннику (например, кубу или тетраэдру) и состояла бы из кусков цилиндрических и конических поверхностей. Эта задача тоже была решена в общем виде, с указанием алгоритма построения изгибаемых моделей в случаях правильных многогранников, см. [14].

Одним из важных достижений в теории изгибаемых многогранников было доказательство так называемой *гипотезы кузнечных мехов*, утверждающей постоянство объёма любого изгибаемого многогранника в ходе его изгибания. В свою очередь, доказательство этой гипотезы стало возможным благодаря открытию существования полиномиального уравнения, позволяющего находить объём многогранника только на основе знания его комбинаторного строения и длин его рёбер, что можно назвать обобщением формулы Герона (выражающей площадь треугольника через длины его сторон) на многогранники, подробности см. в [9] и [10]. Это полиномиальное уравнение для объёма многогранника замечательно тем, что его можно выписать, зная только натуральную развёртку будущего многогранника, т. е. схему соединения треугольных граней и длины всех рёбер, и поэтому мы

можем найти все *возможные* значения объёма многогранника ещё до его построения в пространстве. Параллельно с этим, во многих случаях мы можем заранее проверить, будет ли построенный многогранник изгибаемым или нет.

Первые результаты об изгибаниях конкретных классов поверхностей появились в середине XIX века. В России умением находить явные изгибания различных классов поверхностей прославился К. М. Петерсон (1828–1883), о котором другой знаток теории изгибаний Б. К. Младзеевский (1858–1923) писал, что Петерсон, по-видимому, обладал неизвестными нам общими методами для решения задачи об изгибании поверхностей. Для примера приведём найденные Петерсоном уравнения семейства поверхностей с координатами точек

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \cos u, & y &= r \sin \varphi \cos u, \\z &= \int \sqrt{a^2(1-t^2) \sin^2 u + c^2 \cos^2 u} \, du,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{a^2 t^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 v}, \\ \varphi &= \int \frac{a \sqrt{t^2(a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v) - (a^2 - b^2) \sin^2 v}}{a^2 t^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 v} \, dv,\end{aligned}$$

представляющих собой изгибание эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(конечно, рассматриваются эллипсоиды с разрезом, так как эллипсоиды в целом как выпуклые поверхности являются неизгибаемыми, а разрез может быть, например, вдоль линии  $y = 0$  на участке  $x < 0$ ).

**Задача 8.** Тем, кто знаком с операциями дифференцирования и интегрирования, предлагаем убедиться, что коэффициенты  $E, F, G$  метрических форм поверхностей указанного Петерсоном семейства действительно не зависят от параметра  $t$ , но уравнения самих поверхностей в элементарных функциях не выражаются (кроме исходного эллипсоида, получаемого при значении  $t = 1$ ). В случае сферы, когда  $a = b = c$ , поверхности семейства будут поверхностями вращения вокруг оси  $Ox$ .

Из общих результатов упомянем, что локально, т. е. в достаточно малой окрестности почти каждой своей точки, все поверхности являются изгибаемыми. Существование точек, никакая малая окрестность которых не является изгибаемой, доказано Н. В. Ефимовым в 1940 г.

Напомним, что поверхности с общей метрической формой называются *изометричными*. Таким образом, все поверхности, составляющие семейство изгибаний данной изгибаемой поверхности, являются изометричными между собой. Вместе с тем, существуют поверхности, имеющие одинаковую первую квадратичную форму, но не связанные *непрерывным* семейством изометричных поверхностей (т. е. не наложимые друг на друга). Тогда про них говорят, что они связаны *дискретной изометрией*<sup>5)</sup>. Так вот, в классе дискретно изометричных поверхностей гипотеза Эйлера неверна: существует бесконечная последовательность  $C^\infty$ -гладких (т. е. бесконечное число раз дифференцируемых) замкнутых поверхностей, которые дискретно изометричны между собой и в пределе стремятся к некоторой изометричной им всем  $C^\infty$ -гладкой поверхности  $S$ . Однако эти поверхности не составляют вместе с  $S$  непрерывное семейство, так что они не являются контрпримером к классической гипотезе Эйлера.

## § 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

О приложениях свойств изгибаемости/неизгибаемости поверхностей и многогранников можно прочитать, например, в [1, 2, 12]. Мы же хотим обратить внимание на следующее. Поверхности являются абстракцией, порождённой человеческим разумом. В природе их нет — как бы ни были тонки плёнка мыльного пузыря, сплетённая пауком паутина или листы графена, они имеют ненулевую толщину. Все поверхности, которые созданы природой или сделаны человеком, являются только приближением к идеальной поверхности. Но такие идеальные поверхности существуют не в виде материализованных объектов, а как подмножества точек пространства, объединённых некоторым общим свойством, например, сфера есть множество точек пространства, равноудалённых от одной точки. Предполагаемое гипотезой Эйлера свойство неизгибаемости замкнутых поверхностей позволяет охарак-

---

<sup>5)</sup> Для случая многогранников пример дискретной изометрии получается очень просто: удалим у куба (как поверхности) верхнюю грань и закроем полученное отверстие «крышкой», состоящей из боковых граней четырёхугольной пирамиды. Получится некоторый многогранник  $P$ , который не изгибается, поскольку он выпуклый. Прделаем такую же операцию, но расположим крышку вершиной вниз. Тогда получим новый многогранник  $P'$ , уже невыпуклый, составленный из тех же граней с тем же законом их взаимного соединения, поэтому изометричный многограннику  $P$ , но ему заведомо неконгруэнтный. Значит, эти два многогранника изометричны дискретно.

теризовать их как *высокоорганизованные множества*, стремящиеся сохранить свою форму (что таинственным образом уподобляет их живым формам материи). Обратим внимание, что в ходе эволюции живых организмов природа создала такие объекты, как, например, птичьи яйца, в форме выпуклых оболочек, которые как поверхности являются в математическом смысле неизгибаемыми, а в физическом смысле защищают яйца от разрушения (природа как будто «знает» неизгибаемость или устойчивость выпуклых поверхностей!). Это значит, что для описания изменения формы поверхностей с сохранением их метрики в уравнение их деформации надо добавить эффект действия какой-то силы или что в объединении точек в множестве, называемом замкнутой поверхностью, действует какой-то закон сохранения организации точек, требующий приложения энергии для его преодоления. Этот подход, возможно, приведёт к открытию новых законов связи между бесформенным пространством (хаосом) и его организованными (в каком-то смысле упорядоченными) подмножествами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Александров В. А. Изгибаемые многогранные поверхности // Соросовский образовательный журнал. 1997. № 5. С. 112–117.
- [2] Александров В. А. Как смять пакет от молока, чтобы в него вошло больше // Соросовский образовательный журнал. 2000. Т. 6, № 2. С. 121–127.
- [3] Васильев Н. Б. Метрические пространства // Квант. 1970. № 10. С. 11–21, 62; 1990. № 1. С. 16–23.
- [4] Долбиллин Н. П. Жемчужины теории многогранников. М.: МЦНМО, 2012.
- [5] Залгаллер М. А. Непрерывно изгибаемый многогранник // Квант. 1978. № 9. С. 13–19.
- [6] Медяник А. И. Модель многогранника Коннелли // Квант. 1979. № 7. С. 39.
- [7] Милка А. Д. Что такое геометрия «в целом». М.: Знание, 1986.
- [8] Сабитов И. Так ли прост евклидов мир? // Квант. 1984. № 1. С. 14–20.
- [9] Сабитов И. Х. Вторая молодость формулы Герона, или почему кузнечные меха нельзя сделать в форме многогранников // Природа. 2000. № 4. С. 19–26.
- [10] Сабитов И. Х. Объёмы многогранников. М.: МЦНМО, 2009.
- [11] Скворцов В. А. Примеры метрических пространств. М.: МЦНМО, 2002.

- [12] *Фоменко В. Т.* Изгибание поверхностей // Соросовский образовательный журнал. 1998. № 5. С. 122–127.
- [13] *Шрейдер Ю. А.* Что такое расстояние? М.: Физматгиз, 1963.
- [14] *Штогрин М. И.* Специальные изометрические преобразования поверхностей платоновых тел // УМН. 2005. Т. 60, вып. 4(364). С. 221–222.