О фигурах с одинаковыми поперечниками

А. С. Кочуров, В. М. Тихомиров

§ 1. Введение

Через $\mathscr{X}^2$ обозначим евклидову плоскость. Точки плоскости будем обозначать большими латинскими буквами. Расстояние между точками X и Y из $\mathscr{X}^2$ обозначим $d(X, Y)$.

Любую совокупность точек из $\mathscr{X}^2$ будем называть *фигурой* (или множеством). Примерами фигур могут служить точки, прямые, отрезки, окружности, круги, треугольники, квадраты, их пересечения и объединения и т. п.

Один из наших замечательных соотечественников — Павел Самуилович Урысон (1898–1924) — ввёл некоторые понятия, которые назвал термином *поперечники*. Их стали именовать *поперечники по Урысону*, и эти величины связаны с размерностью фигур. Размерность изучается в топологии, которая изучает непрерывные отображения. Потом были введены другие величины, также получившие названия поперечников — поперечники по Александрову, по Колмогорову и др. Каждый из поперечников, помимо прочего, характеризуется *порядком*, т. е. числом, задающим размерность приближающих множеств, — точек, прямых или плоскостей и т. д., то есть нулём, единицей, двойкой… Отличными от нуля у плоских фигур могут быть лишь поперечники порядка 0 и 1.

§ 2. Поперечники по Колмогорову

Проще всего определить поперечник по Колмогорову. Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987) — один из крупнейших учёных прошлого столетия — ввёл поперечники, характеризующие, в случае плоских фигур, аппроксимативные возможности их приближения точками и прямыми.

Пусть $\mathscr{F}$ — плоская фигура и Z — точка плоскости. Наименьший радиус круга с центром в Z, содержащего $\mathscr{F}$, обозначим $d(\mathscr{F}, Z, \mathscr{X}^2)$. Наименьший радиус круга, покрывающего $\mathscr{F}$, называется *нульмерным* (или *порядка* 0) *поперечником по Колмогорову фигуры* $\mathscr{F}$ и обозначается $d_0(\mathscr{F}, \mathscr{X}^2)$. Он характеризует аппроксимативные возможности точек по отношению к данной фигуре.

Легко понять, что нульмерный поперечник по Колмогорову треугольника равен: для остроугольного треугольника радиусу описанного круга, для прямоугольного тоже радиусу описанного круга, но можно сказать точнее, что он равен половине длины максимальной стороны (т. е. половине длины гипотенузы), а для тупоугольного треугольника нульмерный поперечник равен половине длины максимальной стороны.

Одномерный (или *порядка* 1) *поперечник* фигуры $\mathscr{F}$ характеризует аппроксимативные возможности прямых по отношению к данной фигуре. Обозначим для прямой L через $d(\mathscr{F}, L, \mathscr{X}^2)$ половину ширины минимальной полосы с параллельными L сторонами, содержащей фигуру $\mathscr{F}$. Половину ширины наименьшей полосы, содержащей $\mathscr{F}$, называют одномерным поперечником по Колмогорову данной фигуры. Его обозначают $d_1(\mathscr{F}, \mathscr{X}^2)$.

Упражнение 1. Найдите поперечники прямоугольника с длинами сторон a и b и одномерный поперечник треугольника с длинами сторон a, b и c.

Как видно, понятие колмогоровского поперечника, введённое А. Н. Колмогоровым в 1936 году, относится к геометрии, оно является обобщением таких известных геометрических понятий как радиус описанного круга, ширина полосы и других. С понятиями, подобным поперечникам, каждый из нас сталкивается постоянно. Например, когда мы говорим о размере телевизора, мы указываем величину диагонали прямоугольного экрана, а это не что иное, как удвоенный нульмерный поперечник. Меньшая сторона экрана — это удвоенный одномерный поперечник экрана. А в прямоугольном бассейне половина его глубины — это двумерный поперечник бассейна.

Вместе с тем в понятия поперечников включён некий общезначимый смысл — термин «поперечник» фигурирует при обсуждениях фундаментальнейшей проблемы преобразования в конечную той бесконечной информации, которая заложена в наши понятия о числе, функции и отображении. Как мы знаем, число $\sqrt{2}$ не может быть выражено конечным набором целых чисел, даже если допустить возможность производить над ними всякие арифметические действия. Поэтому в теории чисел возникает проблема приближения чисел конечными совокупностями целых чисел — скажем, десятичными дробями с конечным числом знаков. В случае функций речь идёт об их аппроксимации каким-то множеством функций, которые допускают конечное описание, как, например, алгебраическими полиномами заданной степени. И именно поперечники призваны характеризовать точность, с которой можно достигнуть бесконечного чем-то более простым, в идеале конечным.

Таким образом, понятие поперечников подготовлено формированием и развитием той части математики, в которой изучаются методы вычислений. Среди теоретических баз, на которых основываются целесообразные методы вычисления, выделяется специальный раздел математики, называемый теория приближений. В этом разделе исследуются структуры, где можно ввести расстояния между точками, где имеются аналоги прямых, плоскостей, пространств большего числа измерений. Такие пространства называются нормированными. Для подмножеств этих пространств ставится задача об определении подпространств заданного числа измерений, наилучшим образом аппроксимирующих эти подмножества. Таково общее определение поперечника по Колмогорову. Развитие теории поперечников привело ко многим интересным результатам в геометрии, математическом анализе, теории приближений, вычислительной математике и др.

§ 3. Линейные ко-поперечники

Определим ещё одно понятие поперечника, для которого нет устойчивого названия, а мы будем называть его *линейным ко-поперечником* и обозначать $d_\ell^n(\mathscr{F}, \mathscr{X}^2)$ (ℓ от «linear»). Нульмерный такой ко-поперечник — это просто диаметр множества, т. е. наибольшее расстояние между точками X и Y множества $\mathscr{F}$. Одномерный ко-поперечник определяется так. Проведём на плоскости прямую L, и пусть $d_\ell(\mathscr{F}, L, \mathscr{X}^2)$ — максимальная длина отрезка, параллельного L, концы которого расположены в $\mathscr{F}$. Тогда $d_\ell^1(\mathscr{F}, \mathscr{X}^2)$ — это минимум $d_\ell(\mathscr{F}, L, \mathscr{X}^2)$ по всем L.

Отметим, что величины поперечников по Колмогорову не меняются при овыпуклении множества $\mathscr{F}$ и при его замыкании. Напомним, что выпуклым множеством называется такое множество, которое вместе с любой парой точек X и Y содержит весь отрезок $[X, Y]$, а замкнутым — такое множество $\mathscr{F}$, для которого у любой точки, не принадлежащей $\mathscr{F}$, найдётся круг с центром в этой точке, с $\mathscr{F}$ не пересекающийся. Овыпуклением (замыканием) множества называется наименьшее выпуклое (замкнутое) множество, его содержащее.

Перейдём к вопросу о том, как описываются множества, поперечники (или ко-поперечники) которых одинаковы. В случае поперечников по Колмогорову этот вопрос решается очень просто. Имеет место

Предложение 1. *Выпуклое и замкнутое множество имеет равные поперечники по Колмогорову, нульмерный и одномерный, тогда и только тогда, когда оно является кругом.*

Доказательство этого предложения очень просто. Нульмерный поперечник множества по определению — это радиус минимального описанного круга, его содержащего. Если выпуклое множество расположено внутри этого круга, не заполняя его целиком, то легко построить полосу ширины меньше удвоенного радиуса круга, содержащую это множество. □

В отношении ко-поперечника дело обстоит по-другому. Напомним, что фигурой $\mathscr{F}$ постоянной ширины называется такая плоская фигура, у которой все минимальные полосы, её содержащие, имеют одинаковую ширину, т. е. $d(\mathscr{F}, L, \mathscr{X}^2)$ не зависит от L. Этой теме посвящён § 7 книги [2]. Нетривиальным примером такой фигуры может служить *треугольник Рёло* — объединение трёх секторов единичных кругов с центрами в вершинах равностороннего треугольника со стороной 1. Боковыми сторонами этих секторов являются стороны треугольника, рассматриваемые как радиусы.

Предложение 2. *Выпуклая и замкнутая фигура имеет равные линейные ко-поперечники, нульмерный и одномерный, тогда и только тогда, когда она является фигурой постоянной ширины.*

Доказательство. Нульмерный линейный ко-поперечник фигуры равен её диаметру и, очевидно, равен её ширине в направлении диаметра и не меньше её ширины в любом другом направлении. Поэтому одномерный ко-поперечник равен нульмерному тогда и только тогда, когда ширина в любом направлении одинакова. □

§ 4. Поперечники по Александрову

Прежде чем переходить к определению поперечника по Урысону, дадим определение поперечника по Александрову. Павел Сергеевич Александров (1896–1982) — один из крупнейших топологов прошлого века и близкий друг П. С. Урысона — дал определение поперечника, связанного с непрерывными отображениями в комплексы разной размерности. Нульмерным комплексом на плоскости является конечный набор отдельно взятых точек, одномерным комплексом — конечный набор отрезков.

Далее мы рассматриваем только связные замкнутые ограниченные фигуры, т. е. такие, которые можно поместить в какой-то круг и нельзя разбить на две замкнутые непересекающиеся фигуры. Такие множества называют связными компактами. Образ связного множества при непрерывном отображении есть связное множество (непрерывность ничего не разрывает), и поэтому непрерывное отображение связного компакта в нульмерный комплекс есть не что иное, как отображение в точку. Пусть Z — это точка, в которую отображаются все точки фигуры $\mathscr{F}$. Разумеется, это будет непрерывное отображение. Расстояние от Z до наиболее удалённых точек фигуры $\mathscr{F}$ было обозначено $d(\mathscr{F}, Z, \mathscr{X}^2)$. *Нульмерным поперечником по Александрову* $a_0(\mathscr{F}, \mathscr{X}^2)$ *фигуры* $\mathscr{F}$ называется минимальная величина $d(\mathscr{F}, Z, \mathscr{X}^2)$ по всем Z. Конечно, это не что иное, как наименьший радиус круга, содержащего $\mathscr{F}$. Таким образом, нульмерный поперечник по Александрову равен нульмерному поперечнику по Колмогорову.

Далее рассмотрим отображение фигур в одномерные комплексы. Пусть K — связный одномерный комплекс и Φ — непрерывное отображение $\mathscr{F}$ в K. Обозначим через $d(\mathscr{F}, (\Phi, K), \mathscr{X}^2)$ максимальное расстояние $d(X, \Phi(X))$ по всем X из $\mathscr{F}$. *Одномерным поперечником по Александрову* $a_1(\mathscr{F}, \mathscr{X}^2)$ называется минимум всех $d(\mathscr{F}, (\Phi, K), \mathscr{X}^2)$ по всем (Φ, K). Понятно, что одномерный поперечник по Александрову не больше нульмерного. Мы будем рассматривать поперечники по Александрову только для компактных связных множеств.

Упражнение 2. Пусть единичный квадрат I разделён на n^2 подквадратов со стороной $1/n$, K — объединение границ этих квадратов. Тогда K — это одномерный комплекс. Сопоставим каждой точке X квадрата I какую-либо точку $\Phi(X)$ из K, ближайшую к X. Можно ли, пользуясь такими отображениями, показать, что одномерный александровский поперечник плоской фигуры I равен нулю?

Покажем, что *одномерный александровский поперечник треугольника не больше радиуса вписанного круга*. Пусть в треугольник с вершинами A, B и C вписан круг с центром в O. Соединим O с A, B и C. Объединение отрезков $[O, A]$, $[O, B]$, $[O, C]$ образует комплекс $\widehat{K}$. Определим непрерывное отображение $\widehat{\Phi}$ треугольника ABC в комплекс $\widehat{K}$. Для этого треугольник ABC представим как объединение трёх треугольников OAB, OBC и OCA. Через каждую точку $\Delta\, OAB$ проведём прямую, параллельную высоте этого треугольника, опущенной из вершины O

на сторону AB. Она пересекает этот треугольник по отрезку $[Z, Y]$, один из концов которого, Z, лежит на $[A, B]$, а другой, Y, — на одном из отрезков $[O, A]$ или $[O, B]$. Длина наибольшего из таких отрезков равна длине высоты. Каждой точке отрезка $X \in [Z, Y]$ сопоставим $\widehat{\Phi}(X) := Y$. Из этого построения видно, что $d(X, \widehat{\Phi}(X))$ не превосходит длины отрезка $[Z, Y]$ и, значит, не превосходит радиуса вписанного круга. Построенное отображение $\widehat{\Phi}$ непрерывно на треугольнике OAB, причём $\widehat{\Phi}(X) = X$, если X — точка одного из отрезков $[O, A]$ или $[O, B]$. Таким же способом построим отображение $\widehat{\Phi}$ и на треугольниках OBC, OCA. Эти три отображения, определённые на трёх различных частях треугольника ABC, можно соединить в одно, так как на общих частях их областей определения — отрезках $[O, A]$, $[O, B]$, $[O, C]$ — соответствующие отображения совпадают. Отображение $\widehat{\Phi}$ доказывает наше утверждение.

На самом деле *одномерный александровский поперечник треугольника ABC равен радиусу вписанного круга*. Действительно, этот поперечник не меньше, чем одномерный поперечник вписанного круга, поэтому достаточно доказать следующее

Предложение 3. *Связная компактная фигура $\mathscr{F}$ на плоскости имеет одинаковый нульмерный и одномерный поперечник по Александрову в том и только в том случае, если она является кругом.*

Обобщение этого результата на n-мерный случай было доказано К. А. Ситниковым [1].

Доказательство. Как было сказано выше, нульмерный поперечник по Александрову фигуры $\mathscr{F}$ — это наименьший радиус круга, содержащего $\mathscr{F}$. Пусть александровские поперечники нулевого и первого порядка равны 1 и круг B радиуса 1 с центром O содержит $\mathscr{F}$. Допустим, что $\mathscr{F} \neq B$, точка D лежит строго внутри круга B и не принадлежит $\mathscr{F}$. Рассмотрим окружность S с центром в середине отрезка $[O, D]$ и радиусом $1/2$. Эта окружность лежит внутри круга B. Впишем в эту окружность правильный многоугольник с числом сторон k, пусть S_k — объединение его сторон. Тогда S_k — это одномерный комплекс. Устроим непрерывное отображение, сопоставив точке X из $\mathscr{F}$ точку на пересечении S_k с лучом, начинающимся в D и проходящим через X. Легко понять, что, выбрав число сторон k достаточно большим, можно найти такое α, $0 < \alpha < 1$, для которого построенное отображение является α-сдвигом $\mathscr{F}$ в S_k, т. е. таким отображением, для которого при любом $X \in \mathscr{F}$ выполняется неравенство $d(X, \Phi(X)) \leqslant \alpha$. Это означает, что александровский поперечник первого порядка множества $\mathscr{F}$ меньше единицы. Противоречие.

А то, что ненулевые поперечники круга одинаковы, следует из известного в топологии результата о том, что для непрерывного отображения Φ, являющегося α-сдвигом единичного круга B при $\alpha < 1$, образ $\Phi(B)$ содержит круг радиуса $1-\alpha$, т. е. не может быть нульмерным или одномерным комплексом, и поэтому одномерный поперечник единичного круга не может быть меньше единицы. Этот результат об α-сдвиге выполняется и в трёхмерном пространстве. Для его формулировки нужно в сделанном утверждении заменить слова «круг» на «шар». □

§ 5. Трёхмерный случай

Все определения поперечников и полученные для них результаты могут быть рассмотрены и в трёхмерном пространстве $\mathscr{X}^3$. В этом случае кроме поперечников порядка нуль и один появляются поперечники порядка два. Они позволяют судить о том, сколь хорошо трёхмерная фигура $\mathscr{F}$, связная, ограниченная и замкнутая, может быть приближена плоскостью или, в случае александровского поперечника, конструкцией, определяемой парой (Φ, K), где Φ — непрерывное отображение $\mathscr{F}$ в комплекс K размерности 2, т. е. конечный набор треугольников, расположенных в $\mathscr{X}^3$.

Определения поперечников порядка нуль переносятся в пространство $\mathscr{X}^3$ с минимальными изменениями: в них «круг» заменяется на «шар». Как и для поперечников на плоскости $\mathscr{X}^2$, поперечник порядка нуль трёхмерной фигуры $\mathscr{F}$ в пространстве $\mathscr{X}^3$ — это наименьший возможный из радиусов шаров, содержащих $\mathscr{F}$. Для колмогоровских поперечников основой их определения служит величина $d(\mathscr{F}, L, \mathscr{X}^2)$. Если L — прямая в трёхмерном пространстве, то $d(\mathscr{F}, L, \mathscr{X}^3)$ — это минимальный радиус основания цилиндра, ось которого параллельна L и который содержит $\mathscr{F}$. А если L — плоскость, то $d(\mathscr{F}, L, \mathscr{X}^3)$ — это половина ширины $\mathscr{F}$ в направлении, перпендикулярном L. Минимум величин $d(\mathscr{F}, L, \mathscr{X}^3)$ по всем прямым L, лежащим в $\mathscr{X}^3$, называют поперечником 1-го порядка по Колмогорову фигуры $\mathscr{F}$ и обозначают $d_1(\mathscr{F}, \mathscr{X}^3)$, а минимум $d(\mathscr{F}, L, \mathscr{X}^3)$ по всем плоскостям L в $\mathscr{X}^3$ — поперечником 2-го порядка по Колмогорову $d_2(\mathscr{F}, \mathscr{X}^3)$. Подобный принцип обобщения соблюдается также и при определении александровских поперечников и линейных ко-поперечников.

Назовём слоем в пространстве $\mathscr{X}^3$ множество точек, расположенных между двумя параллельными плоскостями, а минимальным слоем, содержащим $\mathscr{F}$, — слой, который не может быть уменьшен за счёт сближения граничных плоскостей без потери того, что $\mathscr{F}$ лежит внутри слоя. Так же как в плоском случае, в трёхмерном пространстве существуют нетривиальные трёхмерные фигуры $\mathscr{F}$ постоянной ширины — такие фигуры, все минимальные слои которых имеют одинаковую ширину. Тривиальной фигурой постоянной ширины является шар. Нетривиальный пример такой фигуры получается при вращении вокруг оси симметрии двухмерной фигуры постоянной ширины, рассмотренной выше.

Предложение 4. 1) *Выпуклое замкнутое множество в* $\mathscr{X}^3$ *имеет одинаковые колмогоровские поперечники* 0*-го,* 1*-го и* 2*-го порядков тогда и только тогда, когда оно — шар.*

2) *Связная компактная фигура в пространстве* $\mathscr{X}^3$ *имеет одинаковые александровские поперечники* 0*-го,* 1*-го и* 2*-го порядков в том и только в том случае, если она является шаром.*

3) *Выпуклое и замкнутое множество в* $\mathscr{X}^3$ *имеет равные линейные ко-поперечники* 0*-го,* 1*-го и* 2*-го порядков тогда и только тогда, когда оно является множеством постоянной ширины.*

Доказательство предложения 4 предоставляется провести читателю.

§ 6. Ко-поперечники по Александрову

В заключение давайте вернёмся к тому, с чего мы начинали. Не приводя определения поперечника по Урысону, дадим ему эквивалентное, которое естественно назвать ко-поперечником по Александрову. Пусть K — комплекс размерности 0, 1 или 2. Любое непрерывное отображение Φ множества $\mathscr{F}$ в K разбивает $\mathscr{F}$ на подмножества $\Phi^{-1}(Z)$, $Z \in K$, для которых значение $\Phi(X)$ одинаково при $X \in \Phi^{-1}(Z)$ (эти подмножества называются прообразами точек $Z \in K$ при отображении Φ). Пусть $a(\mathscr{F}, (\Phi, K), \mathscr{X}^3)$ — максимальный из диаметров подмножеств $\Phi^{-1}(Z)$, $Z \in K$. Тогда $a^n(\mathscr{F}, \mathscr{X}^3)$, $n = 0, 1, 2,$ — это минимум $a(\mathscr{F}, (\Phi, K), \mathscr{X}^3)$ по всем парам (Φ, K), для которых размерность комплекса K равна n.

Проблема совпадения ненулевых поперечников порядка $0, 1, 2, \ldots$ по Урысону (т. е. ко-поперечников по Александрову) была поставлена Л. А. Тумаркиным для сферы в пространстве $\mathscr{X}^3$ и в пространствах размерности больше 3. Она оказалась не простой. В пространстве $\mathscr{X}^2$ сфера является окружностью и для неё имеется только один ненулевой поперечник по Урысону — поперечник порядка 0. В пространстве $\mathscr{X}^3$ ненулевые поперечники Урысона единичной сферы — поперечники порядка 0 и порядка 1 — совпадают и равны двум (Д. О. Шклярский [3]).

В пространстве размерности больше 3 ненулевые поперечники по Урысону единичной сферы уже не совпадают. Этот результат был получен Е. В. Щепиным [4].

Вопрос о выпуклом компакте с равными поперечниками по Урысону остаётся открытым.

Список литературы

[1] *Sitnikov K.* Über die Rundheit der Kugel // Nachr. Akad. Wiss. Göttingern. 1958. Kl. IIa. P. 213–215.

[2] *Болтянский В. Г., Яглом И. М.* Выпуклые фигуры. М.-Л.: ГТТИ, 1951.

[3] *Шклярский Д. О.* О разбиениях двумерной сферы // Матем. сб. 1945. Т. 8(58), № 2. С. 25–128.

[4] *Щепин Е. В.* Об одной проблеме Л. А. Тумаркина // ДАН СССР. 1974. Т. 217, № 1. Р. 42–43.

Александр Савельевич Кочуров, мехмат МГУ

kchrvas@yandex.ru

Владимир Михайлович Тихомиров, мехмат МГУ

vmtikh@gmail.com