О соосных окружностях и конфигурации типа Понселе

А. А. Шевцов

§ 1. Введение

Одной из наиболее известных теорем в геометрии является знаменитая теорема Понселе (см., например, [1, с. 63]). Это пример так называемых теорем о замыкании, когда процесс построения новых точек в результате проведения тех или иных линий (в данном случае — хорд одной окружности, касающихся другой окружности) зацикливается через некоторое количество шагов.

Цель данной статьи — доказательство теоремы, которая является некоторым синтезом конструкции, аналогичной конструкции из теоремы Понселе (т. е. связанной с проведением прямых, касающихся каких-то соосных окружностей), и знаменитой формулы Эйлера для расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника [2]. Как известно, из формулы Эйлера следует теорема Понселе для случая треугольника. По сути, в основной теореме нашей статьи предлагается обобщение формулы Эйлера для случая, когда две окружности не обязательно образуют вписанно-описанную пару для треугольника (или многоугольника). Отсюда в свою очередь будет следовать конфигурационная теорема, по конструкции похожая на классическую теорему Понселе.

Теорема 1 (основная теорема). *Рассмотрим две окружности ω и γ и произвольную точку X на окружности ω. Проведём две касательные из точки X к окружности γ и обозначим через A и B вторые точки пересечения этих касательных с ω. Пусть Z — полюс прямой AB относительно окружности ω. Обозначим через P и Q точки пересечения касательных, проведённых из точки Z к окружности γ, с касательной k к окружности ω в точке X. Тогда при движении точки X*

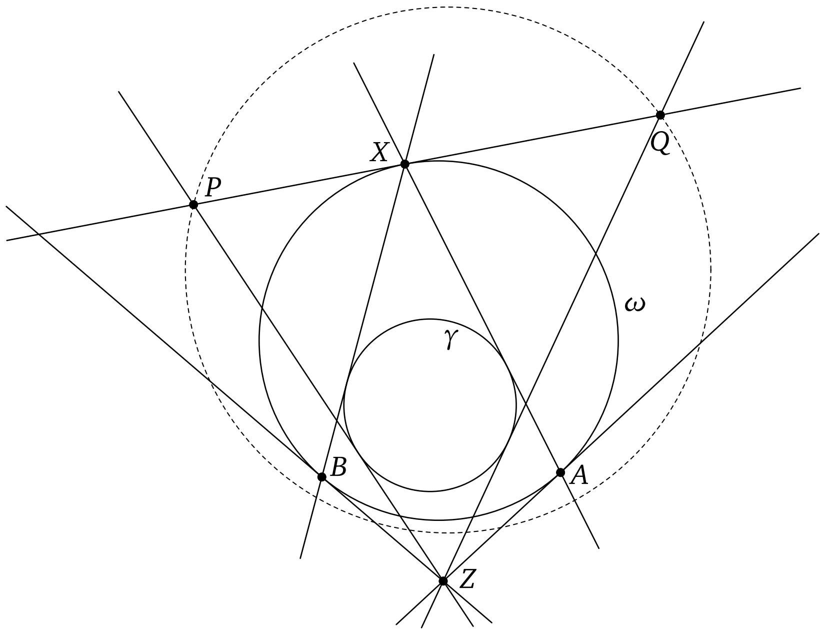

Рис. 1

по окружности ω точки P и Q движутся по окружности, соосной с окружностями ω и γ (рис. 1).

Замечание 1. Всюду далее мы предполагаем, что окружность γ целиком лежит внутри окружности ω, однако доказательство работает и в случае, когда окружности γ и ω пересекаются (рис. 2).

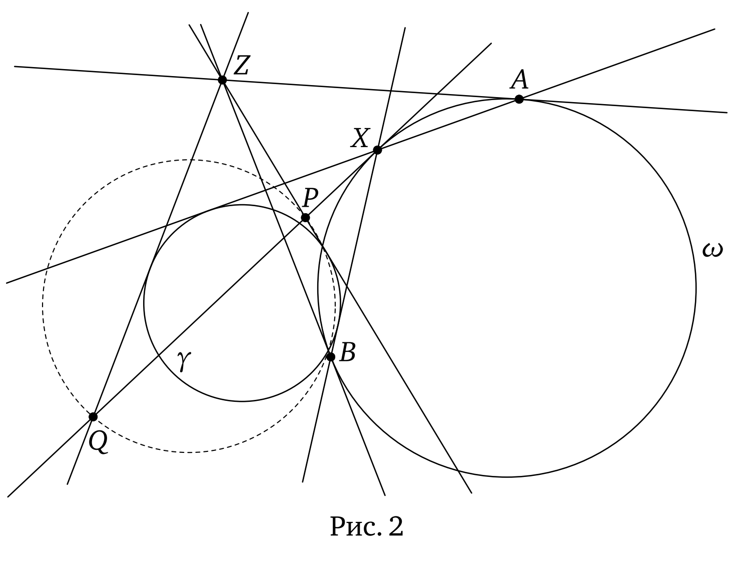

Рис. 2

Предыстория этой теоремы такова. В [5] П. Долгирев сформулировал следующую гипотезу, являющуюся более слабой версией основной теоремы.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Пусть его вписанная окружность ω касается его сторон в точках A', B' и C'. Обозначим через γ вписанную окружность треугольника $A'B'C'$. Проведём из вершин треугольника ABC касательные к окружности γ. Тогда шесть точек пересечения этих касательных с соответствующими сторонами треугольника ABC лежат на одной окружности, соосной с окружностями ω и γ (рис. 3).

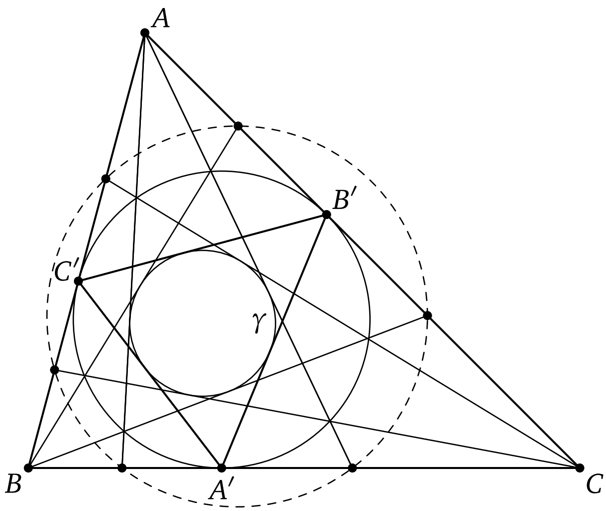

Рис. 3

Затем в [4] А. Шутов и Ф. Герасимов доказали эту гипотезу, после чего А. Заславский сформулировал в виде гипотезы утверждение основной теоремы. Наша цель — доказать эту гипотезу.

§ 2. Степени точек

В этом разделе мы переформулируем основную теорему в терминах степеней точек. Будем доказывать основную теорему только для точки P, поскольку для точки Q доказательство совершенно аналогично. Прежде всего заметим, что достаточно доказать (см. [1, с. 62]) равенство

$$\frac{\deg_\gamma P}{\deg_\omega P} = \mathrm{const}\,.$$

Разберёмся, как можно преобразовать левую часть этого равенства.

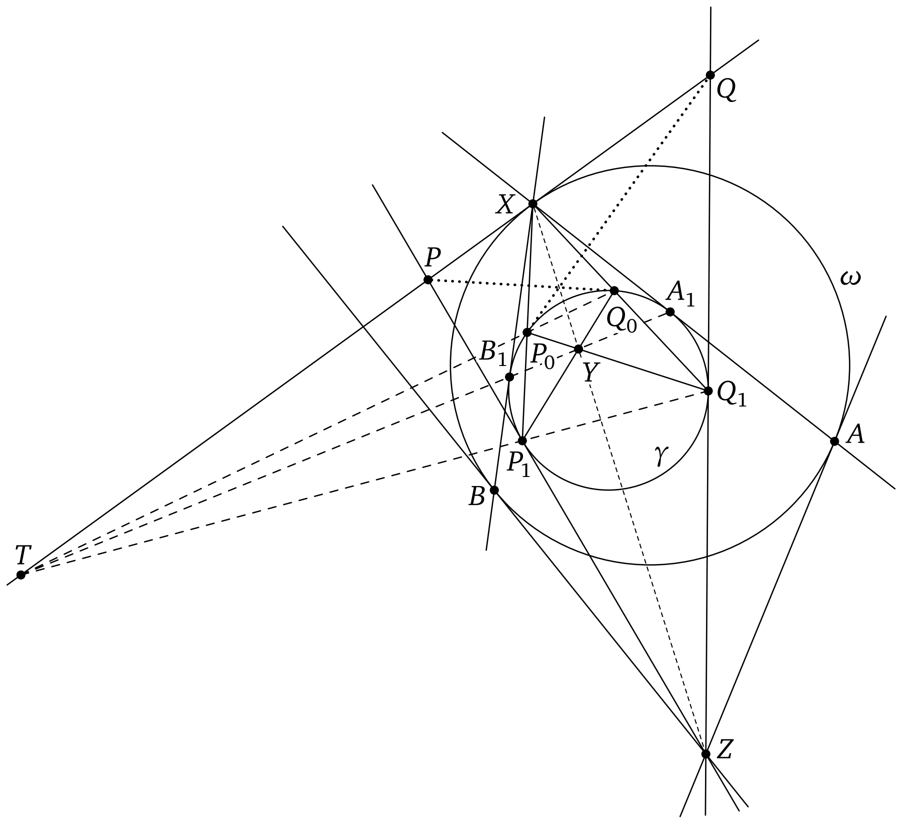

Рис. 4

Для этого обозначим через P_1 и Q_1 точки касания прямых ZP и ZQ с окружностью γ, через P_0 и Q_0 — вторые точки пересечения прямых XP_1 и XQ_1 с окружностью γ, а через A_1 и B_1 — точки касания прямых XA и XB с окружностью γ. Исследуем более подробно получившуюся конфигурацию (рис. 4).

Предложение 1. (*а*) *Прямые* P_0Q_1, P_1Q_0 *и* A_1B_1 *пересекаются в одной точке* Y.

(*б*) *Точки* X, Y *и* Z *лежат на одной прямой.*

(*в*) *Прямые* P_0Q_0, P_1Q_1, A_1B_1 *и* k *пересекаются в одной точке* T.

Доказательство. Определим точку Y как точку пересечения прямых P_0Q_1 и P_1Q_0, а точку T — как точку пересечения прямых P_0Q_0 и P_1Q_1. Заметим, что точки A_1, B_1, Y и T лежат на поляре точки X относительно γ. Отсюда сразу следует п. (а).

Далее, рассмотрим поляры точек X, Y и Z относительно окружности γ. Эти поляры — в точности прямые A_1B_1, XT и P_1Q_1 соответственно. Поскольку эти прямые пересекаются в одной точке T, по принципу двойственности (см., например, [3, с. 39]) точки X, Y и Z лежат на одной прямой — поляре точки T относительно γ. Таким образом, п. (б) также доказан.

Остаётся доказать, что прямая XT касается окружности ω. Для этого заметим, что $-1=(B_1,A_1;Y,T)=(XB_1,XA_1;XY,XT)=(XB,XA;XZ,XT)$. Но XZ — симедиана в треугольнике BXA, поэтому прямая XT касается окружности ω, что и требовалось доказать. □

Следствие 1. *Прямые PQ_0 и QP_0 касаются окружности γ.*

Доказательство. В самом деле, прямая XT — поляра точки Y относительно γ, поэтому по принципу двойственности прямая P_1Q_0 — поляра точки P относительно γ. Так как PP_1 — касательная к окружности γ, то и прямая PQ_0 — касательная к γ. Рассуждения для прямой QP_0 совершенно аналогичны. □

Теперь рассмотрим точку X_P пересечения прямой XP_1 с окружностью ω (рис. 5). Обозначая радиусы окружностей ω и γ через R и r, а их центры — через O и I, получаем следующую цепочку равенств:

$$\frac{\deg_\gamma P}{\deg_\omega P}=\left(\frac{PP_1}{PX}\right)^2=\left(\frac{\sin\angle PXX_P}{\sin\angle PP_1X}\right)^2=\left(\frac{XX_P/2R}{P_0P_1/2r}\right)^2=\left(\frac{XX_P}{P_0P_1}\cdot\frac{r}{R}\right)^2.$$

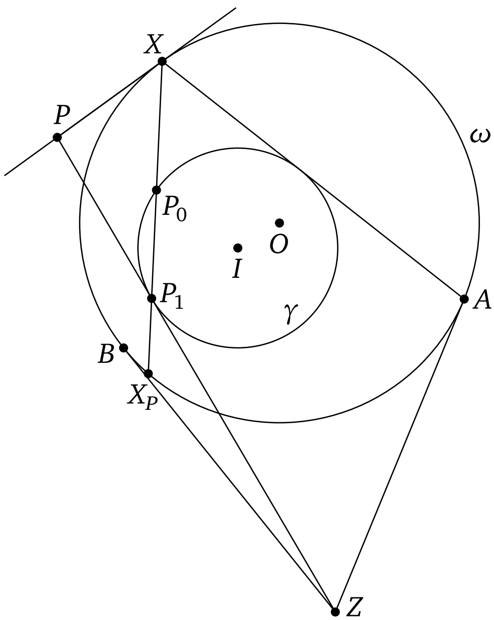

Рис. 5

Таким образом, для доказательства основной теоремы достаточно показать, что отношение $XX_P : P_0P_1$ не зависит от выбора точки X на окружности ω.

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$\frac{XX_P}{P_0P_1} = 1 + \frac{R^2 - OI^2}{2r^2}. \tag{1}$$

Именно эту теорему мы будем доказывать в следующих разделах.

§ 3. Переформулировка теоремы 2

Для доказательства теоремы 2 переформулируем её в терминах четырёхугольника $P_0P_1Q_1Q_0$, вписанного в окружность γ, и определим остальные точки в терминах этого четырёхугольника.

Итак, начнём строить наш чертёж 4, оставив на нём сначала лишь окружность γ с центром в точке I. Зафиксируем на этой окружности точки A_1, B_1, P_0, P_1. Далее, точку Y выберем на прямой A_1B_1 произвольным образом, точки Q_0 и Q_1 определим как вторые точки пересечения прямых P_0Y и P_1Y с окружностью γ, а точку X — как полюс прямой A_1B_1. Заметим, что по принципу двойственности прямая Q_0Q_1 проходит через X.

Теперь определим точку T как точку пересечения прямых P_1Q_1 и P_0Q_0, а точку Z — как полюс прямой P_1Q_1 относительно окружности γ. Нам осталось построить окружность ω. Для этого в свою очередь достаточно построить точку O.

Заметим, что прямая XT является полярой точки Y относительно окружности γ, а также она должна касаться окружности ω. Поэтому $TX \perp IY$ и $TX \perp OX$, откуда $IY \parallel OX$.

Теперь построим точки A_1 и B_1 как точки пересечения поляры X относительно окружности γ с самой окружностью γ. Заметим, что точка O должна лежать на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Но этот серединный перпендикуляр антипараллелен прямой OX относительно угла $\angle B_1XA_1$ и проходит через точку Z, поэтому мы можем построить его.

Таким образом, теорема 2 равносильна следующему утверждению.

Теорема 3. *На окружности γ с центром в точке I отмечены точки A_1, B_1, P_0, P_1, причём прямая P_0P_1 проходит через полюс X прямой A_1B_1. На прямой A_1B_1 произвольным образом выбрана точка Y. Определим точки Q_0 и Q_1 как вторые точки пересечения прямых P_0Y и P_1Y с окружностью γ. а точку Z — как полюс прямой P_1Q_1 относительно*

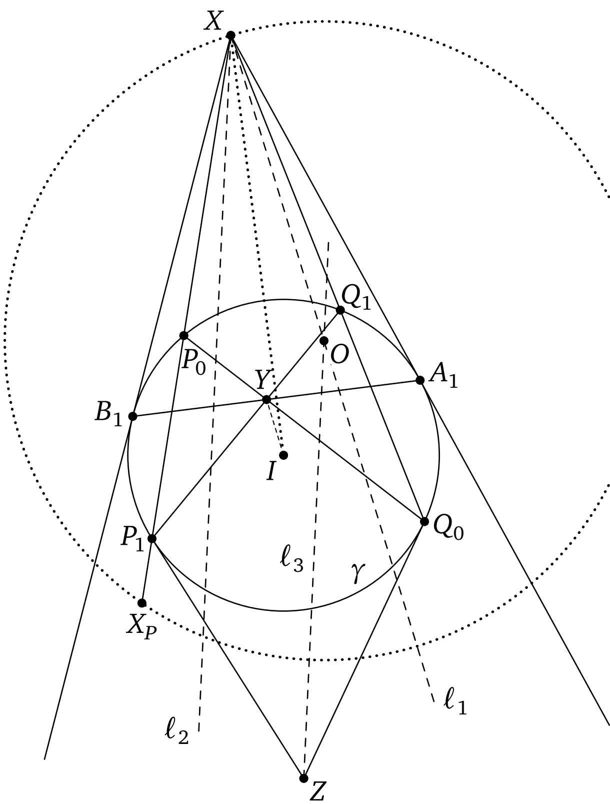

Рис. 6

окружности γ. Далее, пусть ℓ_1 — прямая, проходящая через X параллельно IY, ℓ_2 — образ прямой ℓ_1 при отражении относительно IX, а ℓ_3 — прямая, проходящая через Z параллельно ℓ_2. Обозначим через O точку пересечения прямых ℓ_1 и ℓ_3. Наконец, пусть X_p — вторая точка пересечения прямой P_0P_1 с окружностью с центром в O и радиусом $R = OX$. Тогда имеет место равенство (1) (рис. 6).

§ 4. Проективные движения

Ключевую роль в доказательстве теоремы 3 играют проективные движения точек и проверка формулы (1) в трёх положениях. Для этого мы будем двигать не точку X по окружности ω, а точку Y по прямой A_1B_1. Поймём, как меняются левая и правая части формулы (1), если точка Y двигается проективно. Для этого нам потребуется

Предложение 2. *Если проективно двигать точку Y по прямой A_1B_1, то точка O будет проективно двигаться по некоторой прямой.*

Доказательство. Определим Z как точку пересечения прямой XY и касательной к окружности γ в точке P_1. Обозначим через O_{A_1} и O_{B_1} положения точки O, соответствующие ситуациям $Y = B_1$ и $Y = A_1$ соответственно. Пусть O' — точка пересечения прямых $O_{A_1}O_{B_1}$ и ℓ_1. Докажем, что $O' = O$.

Сразу отметим, что если это верно, то наше предложение будет доказано, поскольку прямая $O_{A_1}O_{B_1}$ неподвижна, точка Y движется проективно, значит, прямая IY проективно вращается вокруг точки I, откуда следует, что прямая ℓ_1 вращается проективно вокруг точки X. Поэтому точка $O' = O$ будет двигаться проективно.

Итак, докажем, что $O'=O$. Для этого достаточно доказать, что $ZO' \parallel \ell_2$.

Обозначим через A' и B' точки пересечения касательной к окружности γ в точке P_1 и прямых XA_1 и XB_1 соответственно (рис. 7). Несложно видеть, что тогда

$$XO_{A_1} \perp XA' \perp B'O_{B_1}, \quad XO_{B_1} \perp XB' \perp A'O_{A_1}.$$

Отсюда $\angle XO_{A_1}A' = \angle A'XB' = \angle B'O_{B_1}X$ и треугольники $A'XO_{A_1}$ и $B'XO_{B_1}$ подобны. По определению точек O_{A_1}, O_{B_1} и O' имеют место следующие параллельности:

$$XO_{A_1} \parallel IA_1, \quad XO_{B_1} \parallel IB_1, \quad XO' \parallel IY.$$

Отсюда получаем цепочку равенств:

$$\frac{O'O_{A_1}}{O'O_{B_1}} = \frac{XO_{A_1}}{XO_{B_1}} \cdot \frac{\sin\angle O'XO_{A_1}}{\sin\angle O'XO_{B_1}} = \frac{XA'}{XB'} \cdot \frac{\sin\angle YIA_1}{\sin\angle YIB_1} = \frac{XA'}{XB'} \cdot \frac{YA_1}{YB_1}.$$

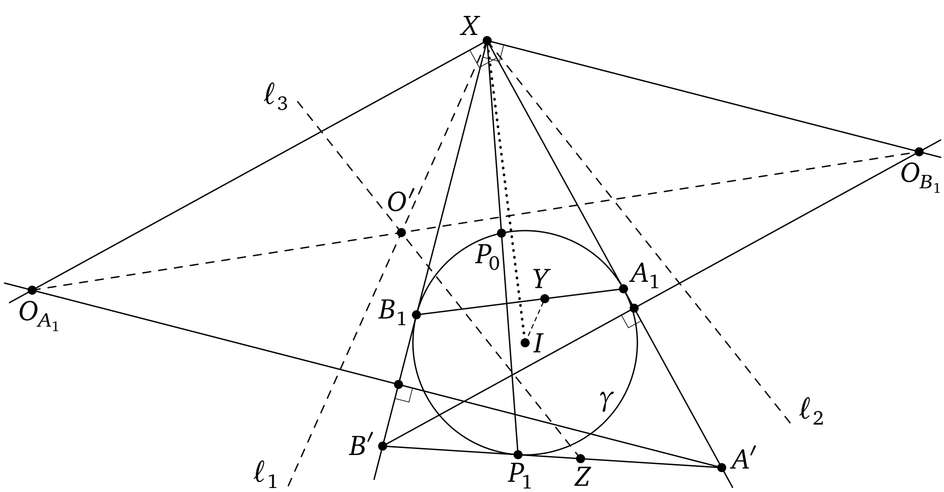

Рис. 7

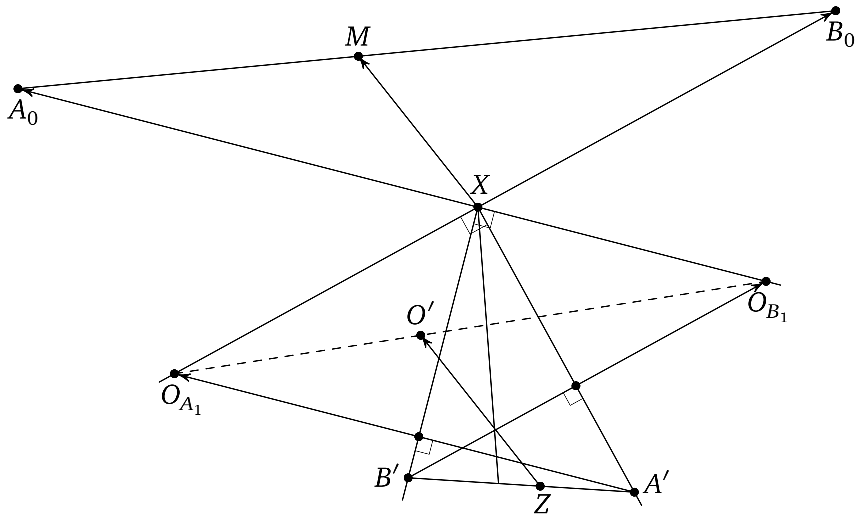

Рис. 8

В то же время
$$\frac{A'Z}{B'Z} = \frac{XA'}{XB'} \cdot \frac{\sin\angle A'XY}{\sin\angle B'XY} = \frac{XA'}{XB'} \cdot \frac{YA_1}{YB_1},$$
откуда мы получаем, что
$$\frac{O'O_{A_1}}{O'O_{B_1}} = \frac{ZA'}{ZB'} = \frac{\alpha}{\beta}.$$
Выразим отсюда вектор $\overline{ZO}'$:
$$\overline{ZO}' = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \overline{B'O}_{B_1} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \overline{A'O}_{A_1}.$$

Пусть точки A_0 и B_0 таковы, что $\overline{XA}_0 = \overline{A'O}_{A_1}$ и $\overline{XB}_0 = \overline{B'O}_{B_1}$ (рис. 8). Ясно, что точка B_0 лежит на прямой XO_{A_1}, а точка A_0 лежит на прямой XO_{B_1}. Тогда $\overline{XM} = \overline{ZO}'$, где M — точка, делящая отрезок A_0B_0 в таком же отношении, в каком точка O' делит отрезок $O_{A_1}O_{B_1}$.

Заметим, что
$$\triangle A_0XO_{A_1} = \triangle A'O_{A_1}X \sim \triangle B'O_{B_1}X = \triangle B_0XO_{B_1},$$
откуда следует, что треугольники A_0XB_0 и $O_{A_1}XO_{B_1}$ подобны. Значит, точки M и O' соответствуют друг другу при подобии, переводящем треугольник A_0XB_0 в треугольник $O_{A_1}XO_{B_1}$. Отсюда следует, что прямые XO' и XM антипараллельны относительно угла $\angle O_{A_1}XO_{B_1}$, а значит, и относительно угла $\angle B'XA'$. Наконец, мы получаем, что $O'Z \parallel XM \parallel \ell_2$, что и требовалось доказать. $\square$

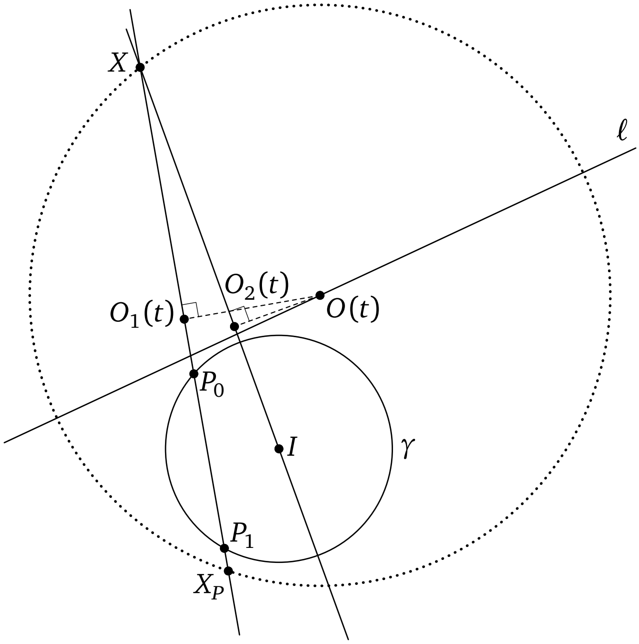

Рис. 9

Итак, мы доказали, что при проективном движении точки Y по прямой A_1B_1 точка O движется проективно по некоторой прямой ℓ. Посмотрим, как ведут себя обе части равенства (1) при таком движении.

Введём на прямых A_1B_1 и XI оси координат с началом в точке X. Через t обозначим координату точки Y, а через $O_1(t)$ и $O_2(t)$ — координаты проекций точки O на прямые P_0P_1 и XI соответственно (рис. 9).

Ясно, что функции $O_1(t)$ и $O_2(t)$ дробно-линейны, поэтому

$$\frac{XX_P}{P_0P_1} = \frac{2O_1(t)}{P_0P_1}$$

— дробно-линейная функция. Таким образом, левая часть равенства (1) меняется дробно-линейно.

Теперь посмотрим на правую часть этого равенства. Обозначим через i координату точки I на прямой XI. Тогда

$$1+\frac{OX^2-OI^2}{2r^2} = 1+\frac{O_2(t)^2-(O_2(t)-i)^2}{2r^2} = 1+\frac{2i\cdot O_2(t)-i^2}{2r^2},$$

т. е. правая часть равенства (1) тоже меняется дробно-линейно.

Таким образом, для доказательства равенства (1) нам достаточно проверить его при трёх положениях точки Y.

§ 5. Три положения точки Y

В качестве первого положения точки Y выберем полюс прямой P_0P_1 (ясно, что такая точка лежит на A_1B_1). Тогда $X = X_P$. Обозначим через M середину отрезка P_0P_1, через K — основание перпендикуляра из точки Y на прямую XI, а через N — точку пересечения прямых OY и XI. Тогда $\angle OXN = \angle NIY = \angle YNI$, т. е. $OX = ON$ (рис. 10). Тогда

$$1+\frac{OX^2-OI^2}{2r^2}=1-\frac{\deg_\omega I}{2r^2}=1-\frac{IX\cdot IN}{2r^2}=1-\frac{IK\cdot IX}{r^2}=1-\frac{IM\cdot IY}{r^2}=0,$$

что и требовалось доказать.

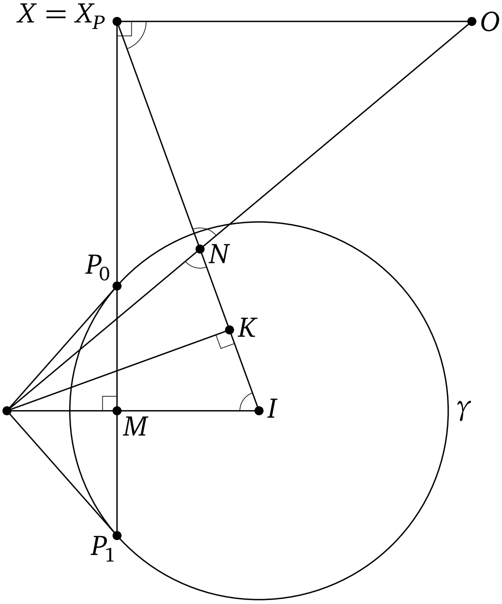

Рис. 10

В качестве оставшихся двух положений выберем $Y = B_1$ и $Y = A_1$. Будем рассматривать только положение $Y = B_1$, поскольку второе положение разбирается аналогично (рис. 11). Здесь вычисления несколько сложнее.

Обозначим через M середину отрезка B_1P_1, через N — точку пересечения прямых BO и XI, а через K — проекцию точки X на прямую B_1P_1. Положим $\angle B'XI = \angle IXA_1 = \alpha$ и $\angle XB'I = \beta$. Заметим, что

$$\angle XNO = 90^\circ - \angle NXA_1 = 90^\circ - \alpha = \angle IXO,$$

т. е. снова $OX = ON$.

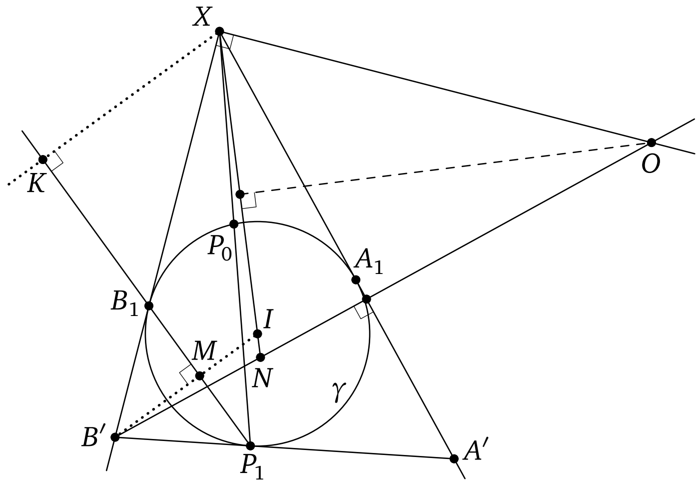

Рис. 11

Вычислим правую часть равенства (1). Имеем:

$$1+\frac{OX^2-OI^2}{2r^2}=1-\frac{\deg_\omega I}{2r^2}=1-\frac{IN\cdot IX}{2r^2}=1-\frac{IX}{2r}\cdot\frac{IN}{IB'}\cdot\frac{IB'}{r}=$$
$$=1-\frac{1}{2\sin\alpha}\cdot\frac{\sin(\beta-(90^\circ-2\alpha))}{\sin(90^\circ-\alpha)}\cdot\frac{1}{\sin\beta}=1+\frac{\cos(\beta+2\alpha)}{\sin2\alpha\sin\beta}=\operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{ctg}\beta.$$

Теперь вычислим левую часть равенства (1). Имеем:

$$\frac{XX_P}{P_0P_1}=\frac{2OX\cdot\sin\angle B_1XP_1}{XP_1-XB_1^2/XP_1}=\frac{2(XB'\operatorname{ctg}2\alpha)\cdot\sin\angle B'XP_1\cdot XP_1}{XP_1^2-XB_1^2}=$$
$$=\operatorname{ctg}2\alpha\cdot\frac{2XB'\cdot XP_1\cdot\sin\angle B'XP_1}{KP_1^2-KB_1^2}=\operatorname{ctg}2\alpha\cdot\frac{4S_{\triangle B'XP_1}}{B_1P_1\cdot(B_1P_1+2KB_1)}=$$
$$=\operatorname{ctg}2\alpha\cdot\frac{2XB'\cdot B'P_1\cdot\sin2\beta}{2P_1M\cdot2KM}=\operatorname{ctg}2\alpha\cdot\frac{XB'\cdot B'P_1\cdot\sin\beta\cos\beta}{P_1B'\sin\beta\cdot XB'\sin\beta}=\operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{ctg}\beta.$$

Таким образом, равенство (1) для оставшихся двух положений доказано. Значит, оно верно всюду, откуда и следует основная теорема. Доказательство закончено.

§ 6. Обобщения и приложения

В этом разделе мы рассмотрим одно обобщение основной теоремы, а также один её частный случай.

Начнём с обобщения. Как мы уже отмечали во введении, конфигурация из основной теоремы напоминает конфигурацию из теоремы Понселе, принадлежащей к проективной геометрии. Это наводит

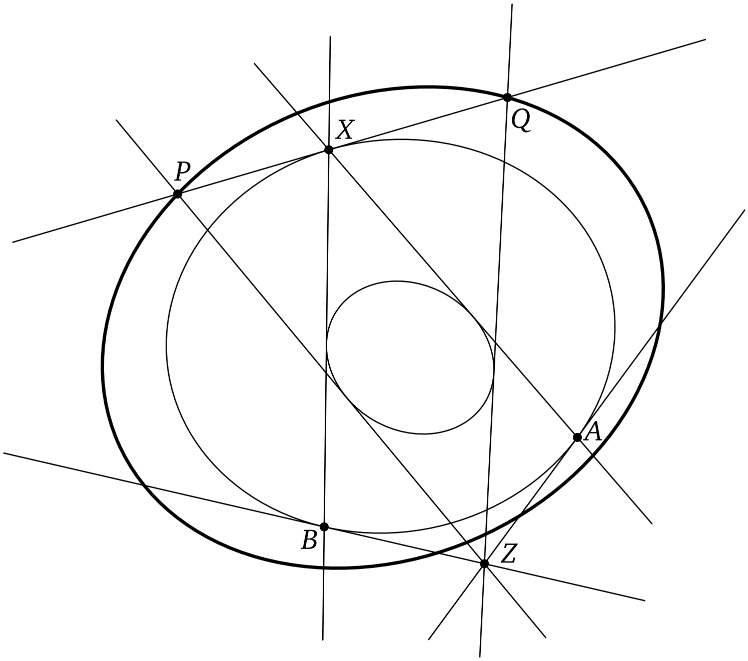

Рис. 12

на мысль о возможности заменить в формулировке основной теоремы слово «окружность» на слово «коника» (рис. 12).

Если коники γ и ω не пересекаются, то согласно известной теореме из проективной геометрии (см. [1, с. 73]) существует проективное преобразование, переводящее пару этих коник в пару окружностей. Таким образом, основная теорема справедлива в случае, когда γ и ω — непересекающиеся коники. Поскольку это свойство сохраняется при малом шевелении, отсюда в свою очередь следует справедливость основной теоремы и для произвольно расположенных коник: достаточно воспользоваться теоремой об аналитическом продолжении.

Теперь рассмотрим один частный случай основной теоремы. Формула (1) очень похожа на знаменитую формулу Эйлера для расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника. Поэтому рассмотрим ситуацию, когда γ является вписанной окружностью треугольника XAB (рис. 13).

В таком случае из основной теоремы следует, что

$$\frac{PP_1^2}{PX^2} = \frac{\deg_\gamma P}{\deg_\omega P} = \left(\frac{XX_P}{P_0P_1}\cdot\frac{r}{R}\right)^2 = \\ = \left(\frac{r}{R}\cdot\left(1+\frac{R^2-OI^2}{2r^2}\right)\right)^2 = \left(\frac{r}{R}\cdot\left(1+\frac{2rR}{2r^2}\right)\right)^2 = \left(1+\frac{r}{R}\right)^2,$$

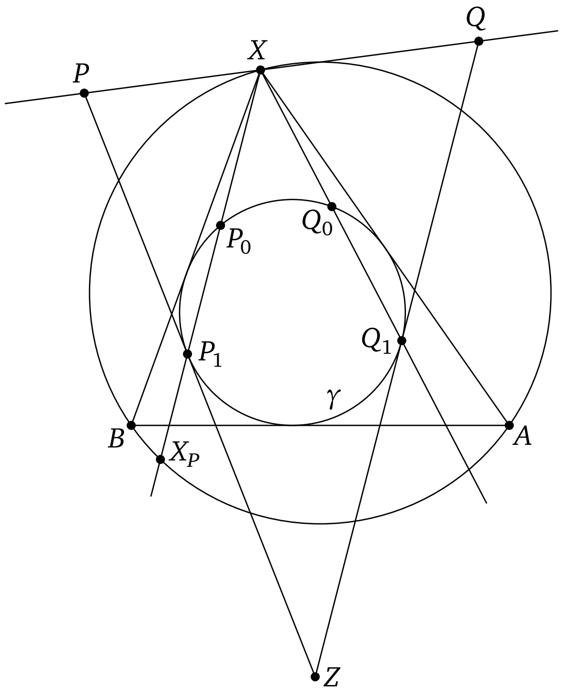

Рис. 13

откуда мы получаем красивую формулу:

$$\frac{PP_1}{PX} = \frac{QQ_1}{QX} = 1 + \frac{r}{R}.$$

Попробуем переписать её более удобным образом. Для этого обозначим через A_1, B_1 и X_1 точки касания окружности γ со сторонами треугольника ABX, через R и S — точки пересечения прямой A_1B_1 с окружностью ω, а через S' — вторую точку пересечения прямой X_1S с окружностью ω (рис. 14).

Предложение 3. *Точка Q_1 лежит на прямой X_1S.*

Доказательство. Обозначим через S_0 вторую точку пересечения прямой X_1S и окружности γ и докажем, что $S_0 = Q_1$. Для этого проведём касательную к окружности γ в точке S_0, и пусть она пересекает стороны AB и AX в точках E и F соответственно. Обозначим точку пересечения прямых XS и AB через G, а точку пересечения прямых XE и A_1B_1 — через V (рис. 14).

Заметим, что по принципу двойственности точки B, F и S лежат на поляре точки пересечения прямых B_1X_1 и A_1S_0 относительно окруж-

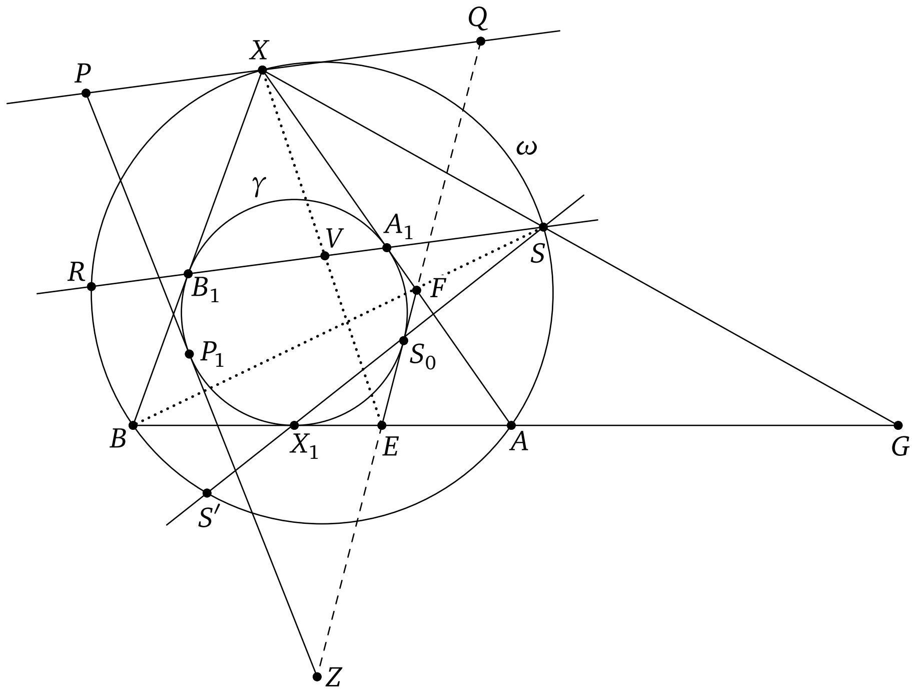

Рис. 14

ности γ. Далее, прямая XE является полярой точки S относительно γ, откуда следует, что

$$-1 = (B_1, A_1; V, S) = (B, A, E; E, G).$$

Значит, точка E лежит на поляре точки G относительно ω. Но точки Z и F тоже лежат на поляре точки G относительно ω. Поэтому прямая EF проходит через Z, а ZS_0 — касательная к окружности γ. Отсюда следует, что $S_0 = Q_1$, что и требовалось доказать. □

Предложение 4. *Прямая QS касается окружности ω.*

Доказательство. В самом деле, из доказательства предыдущего утверждения следует, что прямая FZ является полярой точки G относительно окружности ω, поэтому по принципу двойственности на ней также лежит точка пересечения касательных к ω в точках X и S. Но так как точка Q лежит на касательной в точке X и на прямой FZ, то QS — касательная к окружности ω, что и требовалось доказать. □

Теперь мы готовы преобразовать формулу

$$\frac{PP_1}{PX} = \frac{QQ_1}{QX} = 1 + \frac{r}{R}.$$

Имеем

$$1 + \frac{r}{R} = \frac{QQ_1}{QX} = \frac{QS_0}{QS} = \frac{\sin \angle S'SQ}{\sin \angle QS_0S} = \frac{SS'/(2R)}{X_1S_0/(2r)} = \frac{SS'}{X_1S_0} \cdot \frac{r}{R},$$

откуда получаем, что

$$\frac{SS'}{X_1S_0} = 1 + \frac{R}{r}.$$

Из данной формулы следует, в частности, что отношение $SS' : X_1S_0$ не зависит ни от выбора вершины треугольника XAB, ни от выбора самого треугольника XAB, вписанного в окружность ω и описанного около окружности γ. Удивительно, но даже этот, казалось бы, несложный факт, по-видимому, не допускает простого доказательства…

Благодарности

Автор благодарит П. В. Бибикова за внимание к работе и помощь в подготовке статьи.

Список литературы

[1] *Акопян А., Заславский А.* Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2007.

[2] *Кушнир И.* О двух формулах Эйлера // Квант. 1992. № 12. С. 43–46.

[3] *Жижилкин И.* Инверсия. М.: МЦНМО, 2009.

[4] *Shutov A., Gerasimov F.* On an interesting circle in a triangle. `https://www.mccme.ru/circles/oim/mmks/works2019/shutgera2.pdf`

[5] Problem section // Journal of Classical Geometry. 2014. Vol. 3. P. 53. `https://jcgeometry.org/articles/volume3/jcg2014v2pp53-55.pdf`

Андрей Алексеевич Шевцов, ученик лицея «Вторая школа»
`andreyshevtsov2003@gmail.com`