# Геометрическое доказательство теоремы об инцентрах и её аналогов

М. И. Толовиков

Биссектрисы разбивают произвольный треугольник на шесть треугольников. Теорема об инцентрах утверждает, что инцентры этих треугольников лежат на одной конике. Мы даём геометрическое доказательство теоремы об инцентрах и её аналогов, включающих центры вневписанных окружностей треугольника.

## Введение

Биссектрисы разбивают произвольный треугольник на шесть треугольников. Теорема об инцентрах утверждает, что инцентры этих треугольников лежат на одной конике (рис. 1). Утверждение теоремы об инцентрах появилось в печати в виде гипотезы в [4] и [5]. В [1] найдено доказательство этой теоремы, использующее вычисления в барицентрических координатах и тригонометрию. В [2] и [3] теорема об инцентрах доказана с помощью комплексных чисел. Вычисления при этом выполнялись с привлечением системы компьютерной алгебры. Там же сформулирована теорема, в которой, наряду с инцентрами,

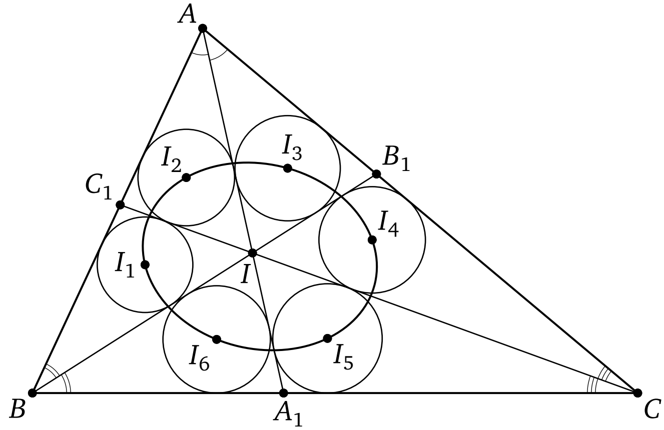


Рис. 1

рассматриваются центры вневписанных окружностей треугольников разбиения. Найденные доказательства вычислительные, причём вычисления относительно громоздки. Применение вычислительных методов выглядит вполне естественным, поскольку инцентры треугольников достаточно удобно описывать аналитически.

Нам удалось найти довольно простое геометрическое (или, как ещё говорят, синтетическое) доказательство теоремы об инцентрах. Это и послужило поводом к написанию данной статьи. В первом разделе мы приводим некоторые хорошо известные геометрические конструкции и утверждения. Цель — сделать статью доступной наиболее широкому кругу читателей. Все используемые в нашем доказательстве средства элементарны. Первый раздел описывает те из них, которые, пожалуй, наиболее далеко отстоят от стандартной школьной программы. Второй раздел содержит доказательство теоремы об инцентрах. В третьем разделе приводятся аналоги теоремы об инцентрах, в которых вместо центров вписанных окружностей треугольников разбиения или исходного треугольника рассматриваются центры их вневписанных окружностей. Доказательства при этом аналогичны доказательству исходной теоремы.

## § 1. Предварительные сведения

Многие теоремы о кониках естественно рассматривать в контексте проективной геометрии. Мы будем работать в модели проективно-евклидовой плоскости, в которой к обычной евклидовой плоскости добавлена бесконечно удалённая прямая. Впрочем, кроме использования проективного преобразования в одном шаге доказательства, всё остальное происходит в рамках обычной евклидовой геометрии. И для этого шага мы приводим эквивалентное рассуждение, не требующее рассмотрения бесконечно удалённых элементов.

Основные инструменты, которые будут использованы при доказательстве, — теорема Паскаля и двойные отношения четвёрок точек. Теорема Паскаля утверждает, что шесть точек $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ лежат на одной конике тогда и только тогда, когда три точки $X = AB \cap DE$, $Y = BC \cap EF$, $Z = CD \cap AF$ лежат на одной прямой (рис. 2). Символом $a \cap b$ мы обозначаем точку пересечения прямых $a$ и $b$. Из точек $X$, $Y$ и $Z$ одна или все три точки могут принадлежать бесконечно удалённой прямой. В этом случае на евклидовой плоскости соответствующие прямые параллельны. Например, противоположные стороны центрально-симметричного шестиугольника попарно параллельны. На проек-

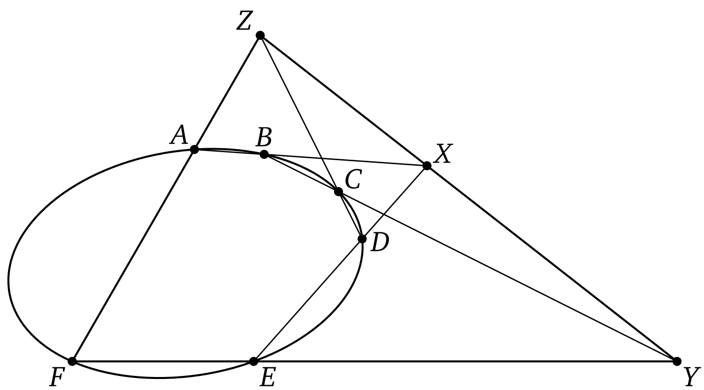


Рис. 2

тивной плоскости они пересекаются в точках бесконечно удалённой прямой. По теореме Паскаля вершины такого шестиугольника лежат на одной конике. С учётом теоремы Паскаля, принадлежность шести точек одной конике можно рассматривать просто как утверждение о принадлежности трёх точек одной прямой. В теореме об инцентрах это точки пересечения прямых $I_1I_2$ с $I_4I_5$, $I_2I_3$ с $I_5I_6$, $I_3I_4$ с $I_1I_6$.

Ещё один инструмент, который мы будем использовать, — двойное отношение четвёрки точек. Для упорядоченной четвёрки различных точек $(A, B, C, D)$ одной прямой их двойным отношением называется число

$$[A, B; C, D] = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}.$$

Отрезки здесь считаются ориентированными. Отношение одинаково направленных отрезков равно отношению их длин, а отношение противоположно направленных противоположно отношению их длин. Двойное отношение считается определённым и в тех случаях, когда числитель и знаменатель некоторой дроби одновременно равны бесконечности. Значение дроби при этом считается равным 1. Бесконечные значения получаются тогда, когда один конец некоторого отрезка — бесконечно удалённая точка, а другой конец не принадлежит бесконечно удалённой прямой.

Важное свойство двойных отношений — их сохранение при центральном проектировании одной прямой на другую. Пусть точка $S$ не принадлежит прямым $a$ и $b$. Проекцией из центра $S$ точки $A$ прямой $a$ на прямую $b$ называется точка $A'$ пересечения прямой $SA$ с прямой $b$. Если $SA$ параллельна $b$ на евклидовой плоскости, то $A'$ — бесконечно удалённая точка прямой $b$. Можно доказать, что для любых точек $A$,

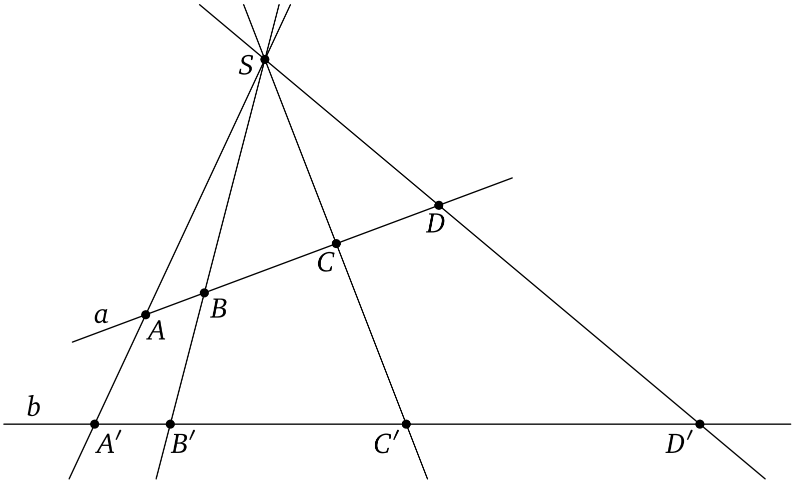


Рис. 3

$B$, $C$ и $D$ прямой $a$ и их проекций $A'$, $B'$, $C'$ и $D'$ на прямую $b$ двойные отношения равны: $[A, B; C, D] = [A', B'; C', D']$ (рис. 3). Ещё одно свойство двойных отношений: из равенства $[A, B; C, D] = [A, B; C, D_1]$ следует, что точки $D$ и $D_1$ совпадают (аналогичное верно для точек на любой другой позиции в четвёрке). Эти факты удобно использовать при решении ряда задач. Мы приведём один пример, который будет полезен в дальнейшем.

Задача 1. Пусть $AD$ и $BL$ — биссектрисы треугольника $ABC$, $CN$ — биссектриса его внешнего угла $C$. Через точку $D$ проведена прямая, пересекающая прямые $AB$ и $AC$ в точках $E$ и $F$, а прямые $BL$ и $CN$ в точках $P$ и $Q$ соответственно. Докажите, что $AD$ — биссектриса угла $PAQ$ (рис. 4).

Решение. По свойству биссектрисы (для внутренних и внешнего углов треугольника $ABC$)

$$\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC}, \quad \frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB}, \quad \frac{BN}{NA} = \frac{BC}{AC}.$$

Отсюда

$$\frac{\overline{AL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BN}}{\overline{NA}} = -1,$$

и по теореме Менелая заключаем, что точки $L$, $D$ и $N$ лежат на одной прямой. При проектировании из точки $B$ точки $E$, $P$, $D$ и $F$ прямой $EF$ переходят соответственно в точки $A$, $L$, $C$ и $F$ прямой $AC$. Следовательно, $[E, P; D, F] = [A, L; C, F]$. При проектировании из $D$

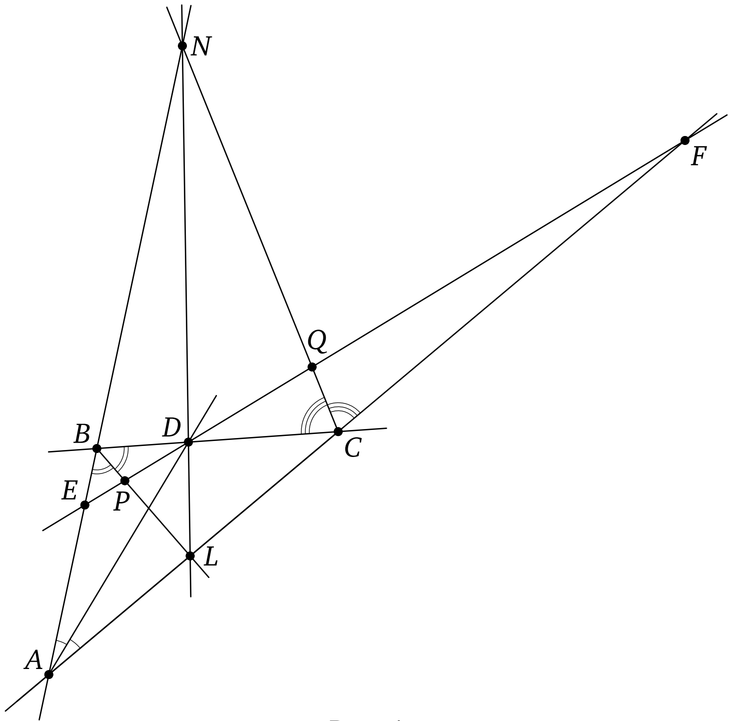


Рис. 4

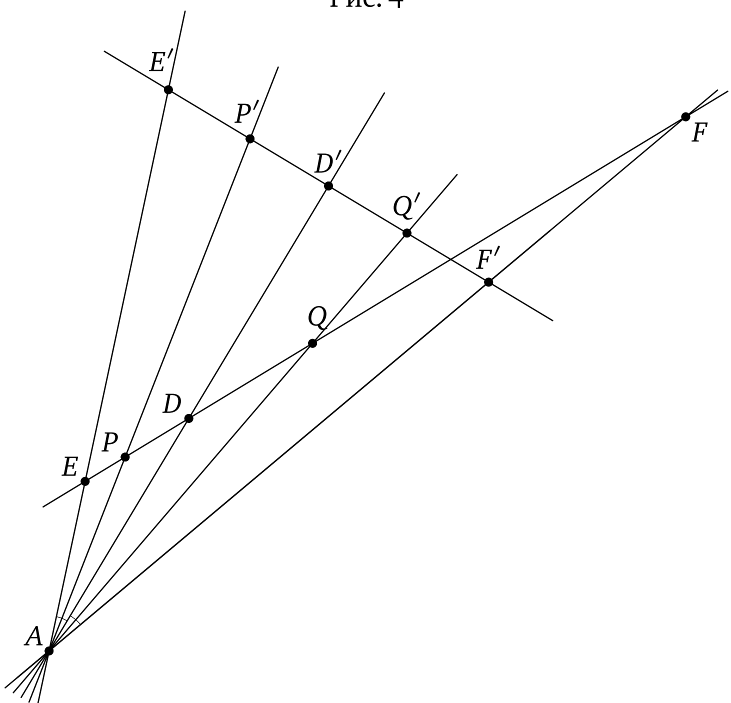


Рис. 5

точки $A$, $L$, $C$ и $F$ переходят в точки $A$, $N$, $B$ и $E$ прямой $AB$. Отсюда $[A, L; C, F] = [A, N; B, E]$. Наконец, при проектировании из $C$ точки $A$, $N$, $B$ и $E$ переходят в точки $F$, $Q$, $D$ и $E$ прямой $EF$. Поэтому $[A, N; B, E] = [F, Q; D, E]$. Таким образом, справедливо равенство двойных отношений $[E, P; D, F] = [F, Q; D, E]$. Спроецируем теперь точки $E$, $P$, $D$, $Q$, $F$ из центра $A$ на некоторую прямую, перпендикулярную $AD$ (рис. 5). Пусть $E'$, $P'$, $D'$, $Q'$, $F'$ — их проекции. Тогда $[E', P'; D', F'] = [F', Q'; D', E']$, т. е.

$$\frac{\overline{E'D'}}{\overline{E'F'}} : \frac{\overline{P'D'}}{\overline{P'F'}} = \frac{\overline{F'D'}}{\overline{F'E'}} : \frac{\overline{Q'D'}}{\overline{Q'E'}}.$$

Поскольку $E'D' = F'D'$, получаем, что

$$\frac{\overline{P'D'}}{\overline{P'F'}} = \frac{\overline{Q'D'}}{\overline{Q'E'}},$$

и тогда $P'D' = Q'D'$. Следовательно, $AD'$ — биссектриса угла $P'AQ'$ или, что то же самое, $AD$ — биссектриса угла $PAQ$.

## § 2. Доказательство теоремы об инцентрах

Теорема об инцентрах. *Пусть $I$ — инцентр треугольника $ABC$, $A_1 = IA \cap BC$, $B_1 = IB \cap AC$, $C_1 = IC \cap AB$. Тогда инцентры $I_1$, $I_2$, $I_3$, $I_4$, $I_5$, $I_6$ треугольников $BIC_1$, $AIC_1$, $AIB_1$, $CIB_1$, $CIA_1$, $BIA_1$ соответственно лежат на одной конике.*

Доказательство. Пусть $I_A$, $I_B$, $I_C$ — центры вневписанных окружностей треугольника $ABC$, т. е. точки пересечения биссектрис его внешних углов при вершинах $B$ и $C$, $A$ и $C$, $A$ и $B$ соответственно. Положим $T_A = I_1I_4 \cap I_BI_C$, $T_B = I_2I_5 \cap I_AI_C$, $T_C = I_3I_6 \cap I_AI_B$ (рис. 7). Доказательство теоремы будет опираться на несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ с центрами $O_1$ и $O_2$ лежат вне друг друга, $I$ — точка пересечения их внутренних касательных, и пусть из точки $A$ к $\omega_1$ и $\omega_2$ проведены касательные $AN_1$ и $AN_2$ так, что $O_1$ и $O_2$ либо обе лежат внутри, либо обе вне угла $N_1AN_2$* (рис. 6). *Если луч $AI$ является биссектрисой угла $N_1AN_2$, то он является и биссектрисой угла $O_1AO_2$ (верно и обратное).*

Доказательство. и $O_2M_2$ — перпендикуляры из точек $O_1$ и $O_2$ на $AI$. Тогда

$$\frac{O_1M_1}{O_2M_2} = \frac{O_1N_1}{O_2N_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

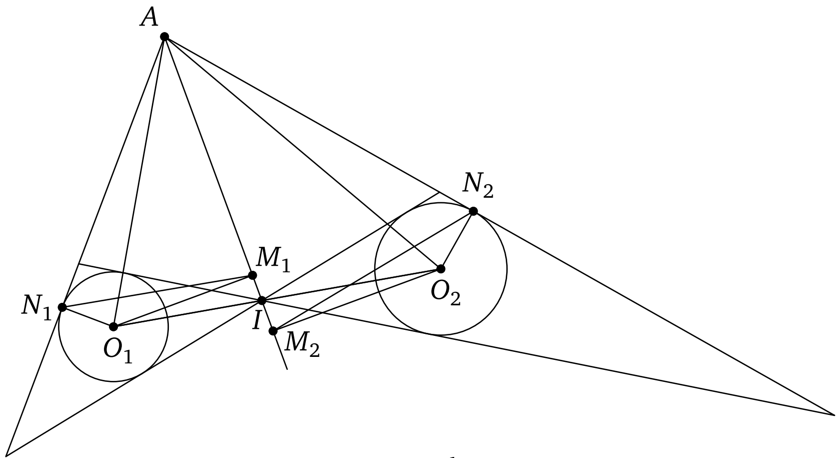


Рис. 6

— отношение радиусов окружностей $\omega_1$ и $\omega_2$ (считаем, что $N_1$ и $N_2$ — точки касания). Это следует из того, что гомотетия с центром $I$ и коэффициентом $-r_2/r_1$ переводит $\omega_1$ в $\omega_2$, а отрезок $O_1M_1$ в $O_2M_2$. Поскольку четвёрки точек $A$, $M_1$, $O_1$, $N_1$ и $A$, $M_2$, $O_2$, $N_2$ лежат на одной окружности (это следует) из $\angle O_1N_1A = \angle O_1M_1A = 90°$, $\angle O_2N_2A = \angle O_2M_2A = 90°$), то, во-первых, из равенства углов $N_1AM_1$ и $N_2AM_2$ вытекает равенство углов $M_1O_1N_1$ и $M_2O_2N_2$. Следовательно, треугольники $M_1O_1N_1$ и $M_2O_2N_2$ подобны, и поэтому углы $O_1N_1M_1$ и $O_2N_2M_2$ равны. Во-вторых, углы $O_1AM_1$ и $O_2AM_2$ равны соответственно углам $O_1N_1M_1$ и $O_2N_2M_2$ и потому равны между собой, что и требовалось. (Доказательство подходит для обоих случаев взаимного расположения касательных и окружностей.) □

Замечание. Утверждение леммы следует также из утверждения задачи 1. Обратно, утверждение задачи 1 можно вывести из утверждения доказанной леммы.

Лемма 2. *Четвёрки точек* $(I_1, I_4, I, T_A)$, $(I_2, I_5, I, T_B)$, $(I_3, I_6, I, T_C)$ — *гармонические* (см. рис. 7; *четвёрка точек называется гармонической, если её двойное отношение равно* $-1$). *Пусть* $O_1M_1$

Доказательство. В силу леммы 1 прямая $AI$ является биссектрисой угла $I_1AI_4$ треугольника $I_1AI_4$. Поскольку $AI_A$ — биссектриса угла $BAC$, получаем, что $AI \perp AT_A$. Следовательно, $AT_A$ — биссектриса внешнего угла треугольника $I_1AI_4$. Из свойств отношений отрезков, связанных с биссектрисами

$$[I_1, I_4; I, T_A] = \frac{\overline{I_1I}}{\overline{I_4I}} : \frac{\overline{I_1T_A}}{\overline{I_4T_A}} = -\frac{AI_1}{AI_4} : \frac{AI_1}{AI_4} = -1,$$

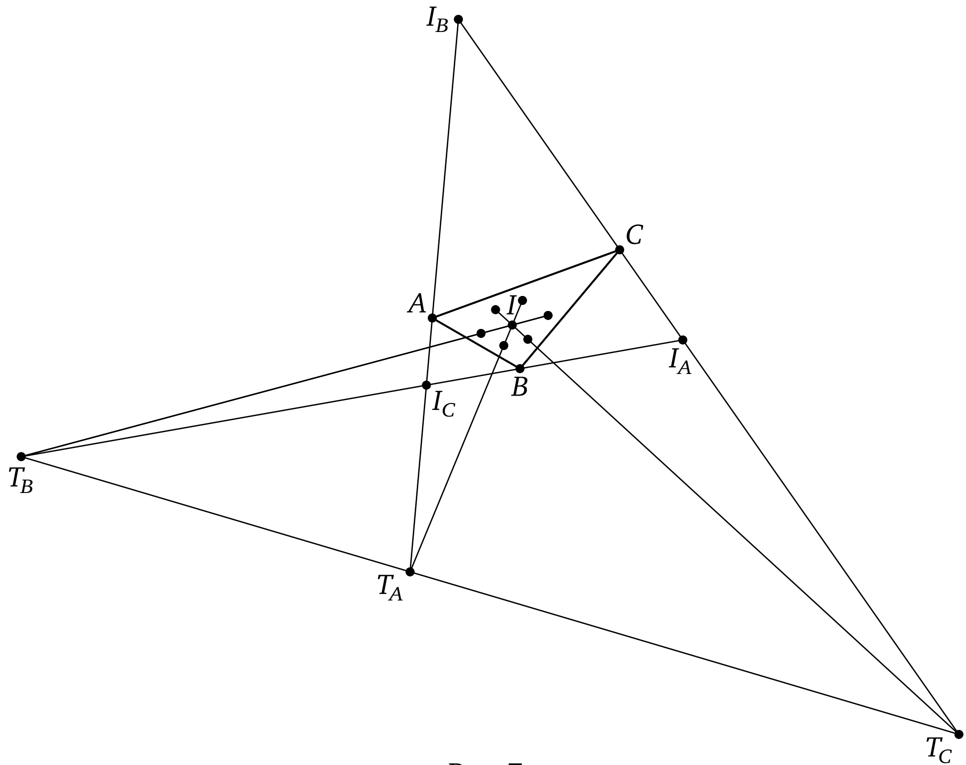

Рис. 7

следует, что $(I_1, I_4, I, T_A)$ — гармоническая четвёрка точек. Для других четвёрок доказательство аналогично □

Лемма 3. *Точки $T_A$, $T_B$, $T_C$ лежат на одной прямой* (рис. 7).

Доказательство. Прямая $I_1I_4$ является биссектрисой внешнего угла при вершине $I$ треугольника $I_BI_CI$, следовательно,

$$\frac{\overline{I_CT_A}}{\overline{T_AI_B}} = -\frac{I_CI}{I_BI}.$$

Записав ещё два аналогичных равенства, получаем

$$\frac{\overline{I_CT_A}}{\overline{T_AI_B}} \cdot \frac{I_BT_C}{T_CI_A} \cdot \frac{I_AT_B}{T_BI_C} = -\frac{I_CI}{I_BI} \cdot \frac{I_BI}{I_AI} \cdot \frac{I_AI}{I_CI} = -1.$$

Отсюда по теореме Менелая заключаем, что $T_A$, $T_B$, $T_C$ лежат на одной прямой. □

Доказательство теоремы об инцентрах (продолжение). Переведём проективным преобразованием прямую $T_AT_B$ в бесконечно удалённую прямую. Поскольку $(I_1, I_4, I, T_A)$, $(I_2, I_5, I, T_B)$, $(I_3, I_6, I, T_C)$ —

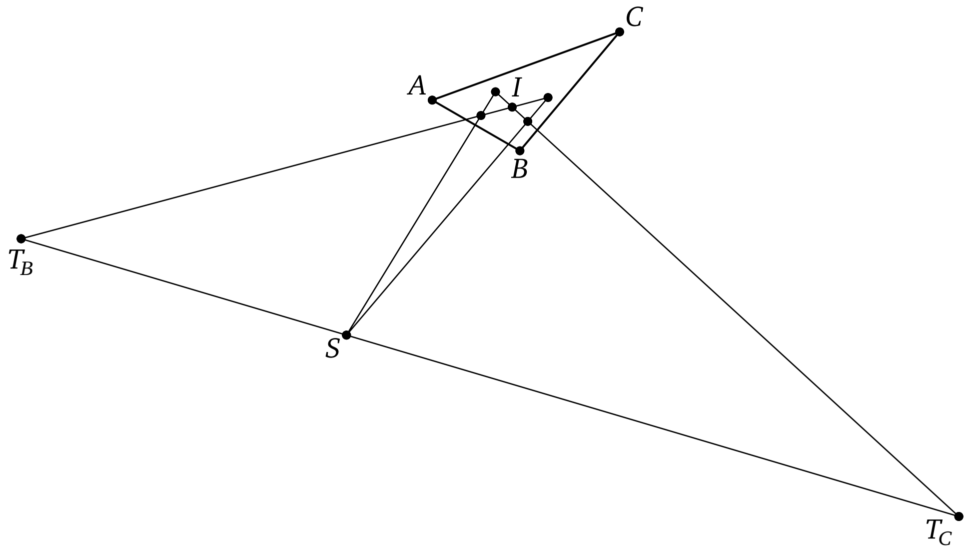


Рис. 8

гармонические четвёрки точек, точка $I$ перейдёт в точку $I'$ — общую середину отрезков $I'_1I'_4$, $I'_2I'_5$, $I'_3I'_6$ (буквы со штрихом обозначают образы точек). Следовательно, шестиугольник $I'_1I'_2I'_3I'_4I'_5I'_6$ центрально-симметричен, и поэтому он вписан в некоторую конику. Прообраз этой коники есть коника, содержащая точки $I_1$, $I_2$, $I_3$, $I_4$, $I_5$, $I_6$. Этим теорема об инцентрах доказана.

Можно провести последний шаг доказательства и без использования проективного преобразования плоскости. Обозначим через $S$ точку пересечения прямых $I_2I_3$ и $I_5I_6$ (рис. 8). Рассмотрим проектирование с центром $S$ прямой $I_2I_5$ на прямую $I_3I_6$. При этом проектировании точка $I_2$ переходит в $I_3$, $I_5$ — в $I_6$, $I$ в себя, а точка $T_B$ — в точку $T'_B$ такую, что $[I_3, I_6; I, T'_B] = -1$. Но и $[I_3, I_6; I, T_C] = -1$, поэтому $T'_B$ совпадает с $T_C$. Следовательно, точка пересечения прямых $I_2I_3$ и $I_5I_6$ лежит на прямой $T_BT_C$. Аналогично доказывается, что точки пересечения прямых $I_1I_2$ и $I_4I_5$, $I_3I_4$ и $I_1I_6$ лежат на прямой $T_BT_C$. Отсюда по теореме Паскаля заключаем, что шесть точек $I_1$, $I_2$, $I_3$, $I_4$, $I_5$, $I_6$ лежат на одной конике. □

## § 3. Аналоги теоремы об инцентрах для центров вневписанных окружностей

Наряду с вышеприведённой теоремой об инцентрах, в [2] сформулирована и доказана полная теорема об инцентрах, в которой вместе с центрами вписанных окружностей рассматриваются центры вневписанных окружностей тех же самых треугольников. Сформулируем и докажем эту теорему.

Кроме инцентров $I_1$, $I_2$, $I_3$, $I_4$, $I_5$, $I_6$ треугольников $BIC_1$, $AIC_1$, $AIB_1$, $CIB_1$, $CIA_1$, $BIA_1$, рассмотрим центры вневписанных окружностей этих треугольников. Обозначения будем использовать такие: для треугольника с инцентром $I_k$ точка $J_k^S$ есть центр вневписанной окружности, которая вписана во внутренний угол $S$ этого треугольника. Все точки вида $I_k$, $J_k^S$ лежат на шести прямых: $I_1I_4$, $I_2I_5$, $I_3I_6$ и перпендикулярных им прямых $J_1^BJ_4^C$, $J_2^AJ_5^C$, $J_3^AJ_6^B$. Первые три мы будем называть линиями инцентров, а последние три — линиями внешних центров. На прямой $I_1I_4$ лежит пара инцентров $I_1$, $I_4$ и пара центров вневписанных окружностей $J_1^I$, $J_4^I$.

На прямой $J_1^BJ_4^C$ — две пары центров вневписанных окружностей: $J_1^B$, $J_1^{C_1}$ и $J_4^C$, $J_4^{B_1}$. Действительно, прямая $J_1^BJ_4^C$ является биссектрисой пары вертикальных углов $BIC$ и $B_1IC1$ — внешних углов треугольников $BIC_1$ и $CIB_1$, поэтому на ней лежат центры $J_1^B$, $J_1^{C_1}$ и $J_4^C$, $J_4^{B_1}$ вневписанных окружностей этих треугольников. Аналогично на остальных прямых. Перечисленные пары точек мы будем называть парами сопряжённых точек.

Теорема (полная теорема об инцентрах). *Пусть из прямых $I_1I_4$, $I_2I_5$, $I_3I_6$, $J_1^BJ_4^C$, $J_2^AJ_5^C$, $J_3^AJ_6^B$ выбраны три прямые так, что среди них нечётное число линий инцентров, и пусть на каждой из этих трёх прямых выбрана пара сопряжённых точек. Тогда эти шесть точек лежат на одной конике.*

Доказательство. Обозначим через $U_A$, $U_B$, $U_C$ точки пересечения $J_1^BJ_4^C$, $J_2^AJ_5^C$, $J_3^AJ_6^B$ с $I_BI_C$, $I_AI_C$, $I_AI_B$ соответственно. Будем следовать схеме доказательства теоремы об инцентрах. Сформулируем только утверждения лемм, поскольку они выводятся аналогично леммам 2 и 3.

Лемма 2$'$. *Четвёрки точек $(I_1, I_4, I, T_A)$, $(I_2, I_5, I, T_B)$, $(I_3, I_6, I, T_C)$, $(J_1^I, J_4^I, I, T_A)$, $(J_2^I, J_5^I, I, T_B)$, $(J_3^I, J_6^I, I, T_C)$, $(J_1^B, J_4^{B_1}, I, U_A)$, $(J_1^{C_1}, J_4^C, I, U_A)$, $(J_2^A, J_5^{A_1}, I, U_B)$, $(J_2^{C_1}, J_5^C, I, U_B)$, $(J_3^A, J_6^{A_1}, I, U_C)$, $(J_3^{B_1}, J_6^B, I, U_C)$ — гармонические.* □

Лемма 3$'$. *Тройки точек $T_A$, $T_B$, $T_C$; $T_A$, $U_B$, $U_C$; $U_A$, $T_B$, $U_C$; $U_A$, $U_B$, $T_C$ лежат на одной прямой.* □

Далее, переведём, например, прямую $U_BU_C$ в бесконечно удалённую прямую. Тогда пары точек $I_1, I_4$; $J_1^I, J_4^I$; $J_2^A, J_5^{A_1}$; $J_2^{C_1}, J_5^C$; $J_3^A, J_6^{A_1}$;

$J_3^{B_1}, J_6^B$ перейдут в пары точек, симметричных относительно точки $I'$ (символ со штрихом обозначает образ соответствующей точки при рассматриваемом преобразовании). Поэтому, выбрав на каждой из прямых $I_1'I_4'$, $J_2^{A'}J_5^{C'}$, $J_3^{A'}J_6^{B'}$ пару точек, симметричных относительно $I'$, получаем, что они являются вершинами центрально-симметричного шестиугольника. Вершины такого шестиугольника лежат на одной конике, поскольку его противоположные стороны пересекаются на одной прямой — бесконечно удалённой. Тогда прообразы его вершин также лежат на одной конике. Остальные случаи рассматриваются аналогично. □

Всего в полной теореме об инцентрах получаются 32 шестёрки точек, принадлежащих 32 различным коникам. Действительно, на каждой линии инцентров и каждой линии внешних центров будет по две пары сопряжённых точек. Учитывая 4 способа выбора прямых и по 2 способа независимого выбора точек на каждой прямой, получаем $4 \cdot 2^3 = 32$ различные шестёрки точек, лежащих на одной конике.

На самом деле и эту конструкцию можно ещё расширить, рассмотрев, наряду с инцентром $I$ исходного треугольника $ABC$, центры его вневписанных окружностей $I_A$, $I_B$, $I_C$. Для каждого из этих центров образуется шесть треугольников, стороны которых лежат на сторонах или биссектрисах углов (внутренних или внешних) исходного треугольника. Например, для $I_A$ это треугольники $BI_AC_2$, $AI_AC_2$, $AI_AB_2$, $CI_AB_2$, $CI_AA_1$, $BI_AA_1$, где $A_2$, $B_2$, $C_2$ — основания биссектрис внешних углов треугольника $ABC$. Через точку $I_A$ проходит шесть биссектрис углов, образованных при пересечении прямых $AA_1$, $BB_2$ и $CC_2$. На этих биссектрисах лежит по четыре центра вписанных и вневписанных окружностей перечисленных треугольников. Чтобы не вводить новых обозначений, будем считать, что $I_1$, $I_2$, $I_3$, $I_4$, $I_5$, $I_6$ теперь обозначают центры соответствующих окружностей данных треугольников (в указанном порядке), причём $I_2$ и $I_3$ — центры вневписанных окружностей $\triangle AI_AC_2$ и $\triangle AI_AB_2$, касающихся сторон $I_AC_2$ и $I_AB_2$, а $I_1$, $I_4$, $I_5$, $I_6$ — центры вписанных окружностей остальных треугольников. Символ $J_k^S$ теперь обозначает центр вписанной (для $k = 2, 3$ и $S = I_A$) или вневписанной (в остальных случаях) окружности, которая вписана во внутренний угол $S$ треугольника с центром $I_k$. Тогда получаем пары сопряжённых точек $I_1, I_4$; $J_1^{I_A}, J_4^{I_A}$; $I_2, I_5$; $J_2^{I_A}, J_5^{I_A}$; $I_3, I_6$; $J_3^{I_A}, J_6^{I_A}$; $J_1^B, J_4^{B_2}$; $J_1^{C_2}, J_4^C$; $J_2^A, J_5^{A_2}$; $J_2^{C_2}, J_5^C$; $J_3^A, J_6^{A_2}$; $J_3^{B_2}, J_6^B$. Эти точки группируются в четвёрки, лежащие на одной прямой. В свою очередь, шесть прямых разбиваются на две группы по три прямые. В нашем перечислении снова записаны вначале точки первых трёх прямых (условно говоря, линий инцентров), а за ними последних трёх условно говоря, линий внешних центров). Теперь мы можем сформулировать окончательный результат, аналогичный полной теореме об инцентрах: *пусть выбраны три прямые, среди которых нечётное число линий инцентров, и на каждой из этих прямых выбрана пара сопряжённых точек; тогда эти шесть точек лежат на одной конике.*

Все проведённые доказательства (с соответствующими изменениями) сохраняются. Поскольку у исходного треугольника один инцентр и три центра вневписанных окружностей, получаем уже $4 \cdot 32 = 128$ шестёрок точек, лежащих на кониках. И это далеко не всё, что можно обнаружить в рассмотренной конфигурации. Для примера два утверждения сформулированы ниже в виде задачи.

Задача 2. Пусть $I_\Delta$ обозначает инцентр треугольника $\Delta$, а $J_\Delta^S$ — центр вневписанной окружности этого треугольника, касающейся сторон его внутреннего угла $S$. Докажите следующие утверждения.

1) Точки $J^B_{ABB_1}$, $J^B_{CBB_1}$, $J^C_{BCC_1}$, $J^C_{ACC_1}$, $J^A_{BAA_1}$, $J^A_{CAA_1}$ лежат на одной конике.

2) Точки $J^B_{ABB_1}$, $J^C_{ACC_1}$, $I_{CAA_1}$, $I_{CBB_1}$, $I_{BAA_1}$, $I_{BCC_1}$ лежат на одной конике.

## Список литературы


[1] *Григорьев Д. С., Мякишев А. Г.* И снова о гипотезах Штейнгарца // Математическое образование. 2013. № 3(67). С. 40–56.

[2] *Осипов Н. Н.* Компьютерное доказательство теоремы об инцентрах // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 18. М.: МЦНМО, 2014. С. 205–216.

[3] *Осипов Н. Н.* О механическом доказательстве планиметрических теорем рационального типа // Программирование. 2014. № 2. С. 41–50.

[4] *Штейнгарц Л.* Гипотезы о медианах, высотах, биссектрисах и… эллипсах // Математическое образование. 2012. № 2(62). С. 41–48.

[5] *Штейнгарц Л. А.* Орбиты Жукова и теорема Морлея // Математика в школе. 2012. № 6. С. 53–61.



Михаил Игоревич Толовиков, МАОУ «Общеобразовательный лицей „АМТЭК“» (г. Череповец)

tolovikov@rambler.ru