
Наш семинар: математические сюжеты

Элементарное доказательство существования полинома Конвея

Т. Р. Гараев

В настоящей заметке приводится элементарное доказательство существования полинома Александра — Конвея, знаменитого инварианта в теории узлов. Предварительных знаний по этой теории не предполагается, так что читатель сможет здесь попутно ознакомиться с основами этой увлекательной науки.

Этот полином был придуман в двадцатые годы прошлого столетия американским математиком Джоном Александером. Его определение было совсем не элементарным — оно основано на достаточно продвинутых понятиях алгебраической топологии. В 1970 году Джон Конвей придумал элементарное определение полинома, который отличался от полинома Александра простой заменой переменной. Этот полином принято называть полиномом Конвея, и именно его существование доказывается в нашей заметке.

§ 1. Узлы, зацепления и их диаграммы

Узлом K называется замкнутая ориентированная ломанная без самопересечений, вложенная в евклидово пространство: $K \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. *Зацеплением* L называется конечное множество попарно не пересекающихся ориентированных замкнутых ломанных без самопересечений, вложенных в евклидово пространство: $L \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Каждую ломаную в зацеплении L будем называть *компонентой*. Разумеется, узел — частный

Автор поддержан грантом РФФИ 19-01-00169.

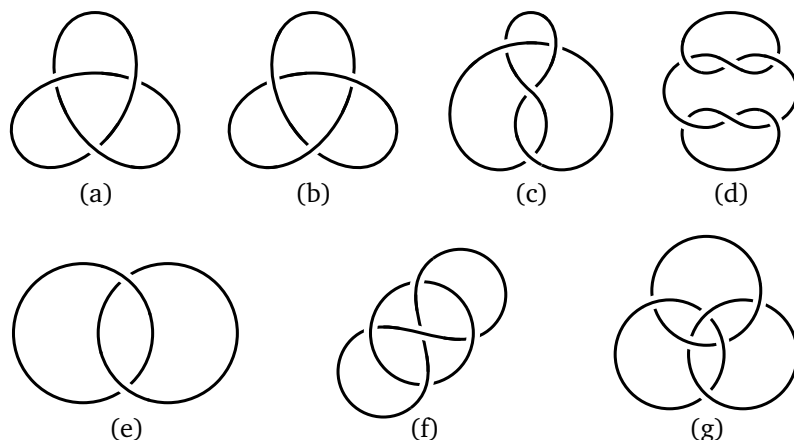


Рис. 1. Примеры диаграмм узлов и зацеплений: (а) правый трилистник, (б) левый трилистник, (с) узел “восьмёрка”, (d) узел бабушки, (е) зацепление Хопфа, (f) зацепление Уайтхеда, (g) зацепление Борромео

случай зацепления, а именно — однокомпонентное зацепление. Пустое множество мы будем считать зацеплением, а именно — зацеплением с пустым множеством компонент.

Диаграммой зацепления L называется проекция зацепления L в общем положении¹⁾ на плоскость, в которой показано, какая часть «проходит под», а какая «проходит над» в каждом конкретном пересечении. Примеры диаграмм узлов и зацеплений приводятся на рис. 1.

Кроме обычных зацеплений (определенных выше), нам потребуются *упорядоченные зацепления*. Они определяются так же, как обычные, только фиксируется порядок (нумерация) компонент. Очевидно, что узлы можно считать как обычными зацеплениями, так и упорядоченными. Для упорядоченных зацеплений определяется понятие диаграммы точно так же, как для обычных. Однако в дальнейшем слово «диаграмма», если не оговорено противное, будет означать «ориентированная диаграмма зацеплений».

§ 2. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДИАГРАММ

На множестве диаграмм мы сейчас введём естественное отношение эквивалентности. Для этого нам нужно научиться перестраивать

¹⁾ Будем говорить, что проекция находится в общем положении, если никакие три вершины проекции не лежат на одной прямой и никакие три различных отрезка, соединяющих вершины проекции L , не имеют общей внутренней точки.

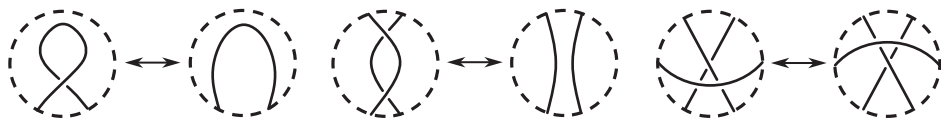


Рис. 2. Движения Рейдемейстера



Рис. 3. Плоские изотопии

диаграммы с помощью движений Рейдемейстера R_1, R_2, R_3 (рис. 2) и с помощью плоских изотопий R_0 (рис. 3).

При движении R_1 находящаяся внутри пунктирной окружности петля заменяется на простую дугу (без скрещиваний), а часть диаграммы вне окружности не изменяется. При R_2 две дуги, одна из которых дважды проходит над другой внутри пунктирной окружности, заменяются на две непересекающиеся дуги. При R_3 внутри пунктирной окружности содержится одна дуга, проходящая над двумя скрещивающимися дугами, и она «перепрыгивает» через точку скрещивания.

Как действуют плоские изотопии, читатель легко поймёт, изучив рис. 3 и сопоставив с движениями Рейдемейстера.

Две диаграммы K_1 и K_2 называются *эквивалентными*, если от одной к другой можно перейти с помощью конечной последовательности движений Рейдемейстера и плоских изотопий. На рис. 4 мы приводим

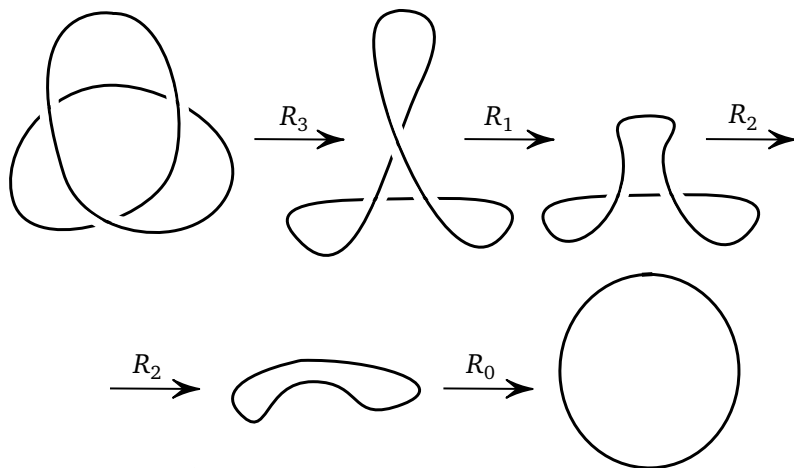


Рис. 4. Пример применения движений Рейдемейстера

пример последовательности из движений Рейдемейстера и плоских изотопий, соединяющей две разные диаграммы.

Функция $f(\cdot)$, сопоставляющая каждой диаграмме целое число или полином, называется *инвариантом*, если она принимает одинаковые значения на эквивалентных диаграммах.

§ 3. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Основная Теорема. *Каждой диаграмме неупорядоченного зацепления можно сопоставить такую бесконечную последовательность целочисленных инвариантов $c_{-1}=0, c_0, c_1, c_2, \dots$, принимающих на тривиальной однокомпонентной диаграмме \bigcirc (т. е. на однокомпонентной диаграмме без скрещиваний) значения $c_{-1}(\bigcirc) = 0, c_0(\bigcirc) = 1, c_1(\bigcirc) = 0, c_2(\bigcirc) = 0, \dots$, что для любых трёх диаграмм K_+, K_-, K_0 совпадающих вне пунктирного круга и имеющих внутри круга вид как на рис. 5, для любого $n \geq 0$ выполняется равенство $c_n(K_+) - c_n(K_-) = c_{n-1}(K_0)$.*

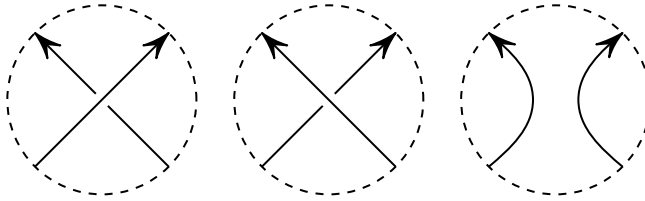


Рис. 5. К основной теореме

УПРАЖНЕНИЕ 1. Покажите, что последовательность $c_{-1} = 0, c_0, c_1, c_2, \dots$, из основной теоремы определяется однозначно.

Из упражнения 1 следует, что корректно определён многочлен

$$C(K) := c_0(K) + c_1(K)t + c_2(K)t^2 + \dots,$$

называемый *полиномом Конвея* диаграммы K . Равенство из теоремы эквивалентно соотношению

$$C(K_+) - C(K_-) = tC(K_0),$$

которое называется *скейн-соотношением Конвея*. Это соотношение часто изображают в виде

$$C\left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}\right) - C\left(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}\right) = tC\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \curvearrowright \end{array}\right).$$

Скейн-соотношение Конвея сыграло решающую роль в создании других полиномиальных инвариантов, в том числе знаменитого полинома Джонса [3] и полинома HOMFLY [7].

§ 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛИНОМА КОНВЕЯ

Скейн-соотношение Конвея и соотношение $C(\bigcirc) = 1$ позволяют быстро найти полином Конвея любой не слишком сложной диаграммы, не вычисляя по отдельности коэффициенты $c_0(K), c_1(K), c_2(K), \dots$

Мы предлагаем читателю, не откладывая, произвести несколько простейших таких вычислений.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Проверьте, что $C(\bigcirc\bigcirc) = 0$: полином Конвея тривиального зацепления из двух компонент равен нулю.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Вычислите полином Конвея от зацепления Хопфа и от зеркального образа (рис. 6 а, б) этого зацепления. Совпадают ли они?

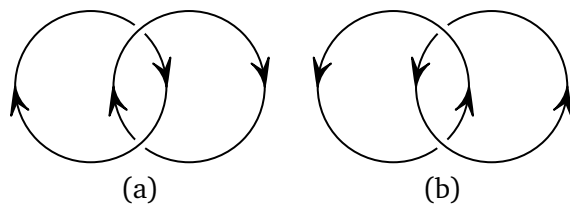


Рис. 6. К основной теореме

УПРАЖНЕНИЕ 3. Вычислите полином Конвея от левого и правого трилистника (рис. 1 а, б). Совпадают ли они?

УПРАЖНЕНИЕ 4. Вычислите полином Конвея от узла «восьмёрка». Эквивалентна ли восьмёрка трилистнику?

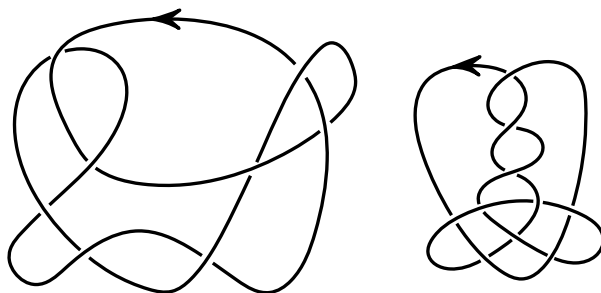


Рис. 7. Пример неэквивалентных узлов с одинаковым значением полинома Конвея

Ответы на упражнения приводятся в конце статьи.

Замечание 1. Заметим, что полином Конвея — достаточно сильный инвариант, но не полный. Говоря иначе, совпадение значений полинома Конвея на разных неупорядоченных диаграммах не гарантирует эквивалентность этих диаграмм. На рис. 7 приведены два узла, значение полинома Конвея на которых совпадает (проверьте!), но диаграммы при этом не эквивалентны.

§ 5. КЛЮЧЕВЫЕ ЛЕММЫ

Будем говорить, что перекрёсток (точка самопересечения) a диаграммы зацепления K имеет знак $+1/-1$, если он выглядит как на рис. 8, т. е. MNL обходится против/по часовой стрелке. Через $\varepsilon(K, a)$ обозначим знак перекрёстка a диаграммы K .

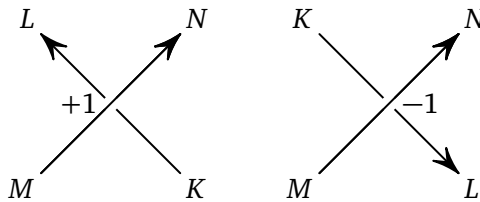


Рис. 8. Знаки перекрёстков

Для любой диаграммы зацеплений K с перекрёстком a обозначим через K_a диаграмму, полученную из K заменой a на перекрёсток противоположного знака (рис. 8), а через $K_{[a]}$ — неупорядоченную диаграмму, полученную из K удалением перекрёстка a (рис. 9).

Замечание 2. Заметим, что диаграмма K_a может быть как упорядоченной, так и неупорядоченной, в зависимости от диаграммы K , а диаграмма $K_{[a]}$ может быть только неупорядоченной. Это связано с тем, что после удаления перекрёстка количество компонент у диаграммы меняется и придумать «разумное» правило упорядочивания компонент у диаграммы $K_{[a]}$ непросто.

Будем называть *тривиальной диаграммой* диаграмму с непересекающимися несамопересекающимися компонентами.

Лемма 1. Пусть дана пара (α, β) целочисленных инвариантов неупорядоченных диаграмм, причём $\beta(T) = 0$ для любой неупорядоченной тривиальной диаграммы T , у которой больше одной компоненты, и

$$\beta(K) - \beta(K_a) = \varepsilon(a, K)\alpha(K_{[a]})$$

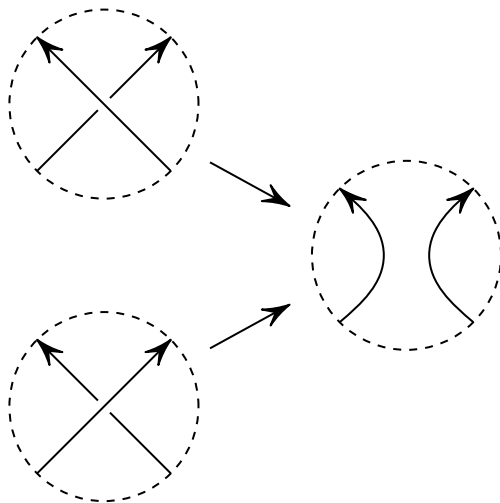


Рис. 9. Удаление перекрёстка

для любой неупорядоченной диаграммы K . Тогда существует такой инвариант γ неупорядоченных диаграмм зацеплений, что

- 1) $\gamma(K) - \gamma(K_a) = \varepsilon(a, K)\beta(K_{[a]})$ для любой неупорядоченной диаграммы K ;
- 2) $\gamma(K) = 0$ для любой тривиальной неупорядоченной диаграммы K с двумя или более компонентами.

Заметим, что соотношение

$$\beta(K) - \beta(K_a) = \varepsilon(a, K)\alpha(K_{[a]})$$

равносильно соотношению

$$\beta(K_+) - \beta(K_-) = \alpha(K_0),$$

где K_+, K_-, K_0 — диаграммы с рис. 5, совпадающие вне пунктирных кругов.

Упражнение 1. Покажите, что инвариантов γ из леммы 1, для которых $\gamma(\bigcirc) = 0$, не более одного.

Напомним, что диаграммой упорядоченного зацепления называется диаграмма, компоненты которой упорядочены (занумерованы). Вторая лемма формулируется аналогично первой, только в ней γ является инвариантом диаграмм упорядоченных зацеплений. Мы в дальнейшем покажем, что основная теорема следует из первой леммы, затем покажем, что первая лемма следует из второй, после чего докажем вторую лемму.

ЛЕММА 2. Пусть дана такая пара (α, β) инвариантов диаграмм неупорядоченных зацеплений, что $\beta(T) = 0$ для любой тривиальной неупорядоченной диаграммы T , у которой больше одной компоненты, причём

$$\beta(K) - \beta(K_a) = \varepsilon(a, K)\alpha(K_{[a]})$$

для любой неупорядоченной диаграммы K . Тогда существует такой инвариант γ упорядоченных диаграмм, что

- 1) $\gamma(K) - \gamma(K_a) = \varepsilon(a, K)\beta(K_{[a]})$ для любой упорядоченной диаграммы K ;
- 2) $\gamma(K) = 0$ для любой тривиальной упорядоченной диаграммы K с двумя или более компонентами.

§ 6. ВЫВОД ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ ИЗ ЛЕММЫ 1

Положим $c_0(K) = 1$ для любой неупорядоченной диаграммы K с одной компонентой и $c_0(K') = 0$ для любой неупорядоченной диаграммы K' с двумя или более компонентами. Тогда для любых неупорядоченных диаграмм K_+ , K_- , и K_0 , которые совпадают вне пунктирной окружности, а внутри неё имеют вид, показанный на рис. 5, справедливо равенство

$$c_0(K_+) - c_0(K_-) = c_{-1}(K_0).$$

Пусть существует последовательность $c_{-1}, c_0, c_1, \dots, c_n$ инвариантов неупорядоченных диаграмм, удовлетворяющая условиям основной теоремы. Тогда пара (c_{n-1}, c_n) удовлетворяет условию леммы 1. Следовательно, существует целочисленный инвариант c_{n+1} неупорядоченных диаграмм такой, что для любых неупорядоченных диаграмм K_+ , K_- и K_0 выполняется равенство

$$c_{n+1}(K_+) - c_{n+1}(K_-) = c_n(K_0).$$

Так строится последовательность c_{-1}, c_0, c_1, \dots , удовлетворяющая заключению основной теоремы.

§ 7. ВЫВОД ЛЕММЫ 1 ИЗ ЛЕММЫ 2

Для доказательства леммы 1 достаточно показать, что инвариант γ упорядоченных диаграмм из леммы 2 совпадает на диаграммах, отличающихся только порядком компонент.

Упражнение 1. Покажите, что у любой диаграммы K можно так изменить перекрёстки, что полученная диаграмма будет эквивалентна тривиальной (а именно, покажите, что любую диаграмму можно свести средствами изменения перекрёстков к диаграмме из упражнения 1 § 8).

Обозначим через K упорядоченную диаграмму с двумя или более компонентами. Пусть $u(K)$ минимальное число изменений перекрёстков, необходимое для получения упорядоченной тривиальной диаграммы из упорядоченной диаграммы K (что возможно согласно упражнению 1).

Докажем индукцией по u , что $\gamma(K) = \gamma(K')$.

Если $u(K) = 0$, то K — упорядоченная тривиальная диаграмма. Обозначим через K' упорядоченную диаграмму, полученную из K изменением порядка компонент. Тогда $\gamma(K) = \gamma(K') = 0$. Предположим, что $u(K) > 0$. Обозначим через a такой перекрёсток упорядоченной диаграммы K , что $u(K_a) < u(K)$. Тогда

$$\gamma(K) - \gamma(K_a) = \varepsilon(a, K)\beta(K_{[a]}) \quad \text{и} \quad \gamma(K') - \gamma(K'_a) = \varepsilon(a, K')\beta(K'_{[a]}).$$

Заметим, что упорядоченные диаграммы K_a и K'_a совпадают с точностью до порядка компонент, а неупорядоченные диаграммы $K_{[a]}$ и $K'_{[a]}$ равны. Следовательно, $\beta(K_{[a]}) = \beta(K'_{[a]})$. Так как $u(K_a) < u(K)$, по предположению индукции имеем $\gamma(K_a) = \gamma(K'_a)$. Следовательно, $\gamma(K) = \gamma(K')$.

Таким образом, для доказательства основной теоремы остается лишь доказать лемму 2. Мы начнем её доказательство с построения инварианта γ .

§ 8. Построение функции γ из леммы 2

До конца статьи мы будем называть *диаграммой* именно упорядоченную диаграмму, *контуром* — замкнутую ориентированную ломаную на плоскости, *набором контуров* — упорядоченный набор контуров, множество вершин которых находится в общем положении.

Пусть $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ — набор контуров, а $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — такой упорядоченный набор точек, что $\xi_i \in \kappa_i$ и ξ_i не является точкой самопересечения контура κ_i для $i = 1, \dots, n$. Будем называть пару (κ, ξ) *набором контуров с отмеченными точками*.

Для диаграммы K с компонентами $\bar{\kappa}_1, \dots, \bar{\kappa}_n$ будем говорить, что $\bar{\kappa}_i$ *лежит под* $\bar{\kappa}_j$, если любой отрезок компоненты $\bar{\kappa}_i$ либо не пересекается с $\bar{\kappa}_j$, либо лежит под отрезком, лежащим в $\bar{\kappa}_j$.

Для набора $\mathcal{K} = (\kappa, \xi)$ контуров с отмеченными точками обозначим через $\overline{\mathcal{K}}$ диаграмму с компонентами $\overline{\kappa}_1, \dots, \overline{\kappa}_n$, получающуюся из набора κ добавлением информации, какой из пересекающихся отрезков лежит ниже, а какой выше, причём

- для любого $i < j$ компонента $\overline{\kappa}_i$ диаграммы $\overline{\mathcal{K}}$ лежит под компонентой $\overline{\kappa}_j$ той же диаграммы;
- для любого i при обходе компоненты $\overline{\kappa}_i$ в соответствии с её ориентацией, начиная с точки ξ_i , каждый отрезок KL компоненты $\overline{\kappa}_i$ лежит выше любого отрезка, который был пройден раньше отрезка KL .

На рис. 10 мы приводим пример, как по набору $\mathcal{K} = (\kappa, \xi)$ строится диаграмма $\overline{\mathcal{K}}$.

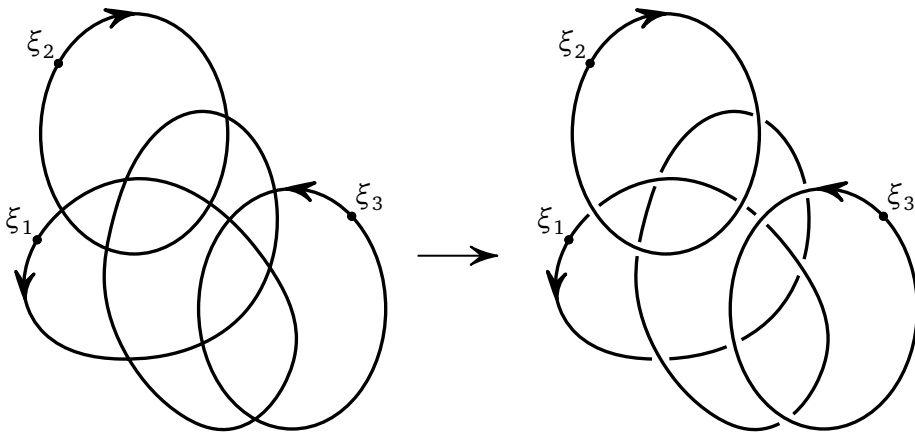


Рис. 10. Пример построения $\overline{\mathcal{K}}$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Покажите, что любая диаграмма, построенная по алгоритму, описанному выше, — тривиальная²⁾.

Мы будем использовать результат упражнения 1 без доказательства.

Пусть x_1, \dots, x_j — некоторые перекрёстки (не обязательно различные) некоторой диаграммы K ; $x := (x_1, x_2, \dots, x_j)$; K_x — диаграмма, полученная из диаграммы K изменением перекрёстков x_1, \dots, x_j .

Опишем построение функции γ . Каждый набор κ контуров произвольно дополним до набора $(\kappa, \xi(\kappa))$ контуров с отмеченными точками. Обозначим через \mathbb{B} множество всех пар (x, κ) , где κ — набор контуров, а x — упорядоченный набор из некоторых перекрёстков

²⁾ Построение диаграммы $\overline{\mathcal{K}}$ схоже с описанным в доказательстве теоремы 3.8 из [8].

(не обязательно различных) диаграммы $\overline{(\kappa, \xi(\kappa))}$. Если набор x пуст, то пару (x, κ) будем записывать как (κ) .

Зададим функцию $\hat{\gamma}: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\hat{\gamma}(\kappa) := 0 \quad \text{и} \quad \hat{\gamma}(x, a, \kappa) := \hat{\gamma}(x, \kappa) - \varepsilon(a, \overline{(\kappa, \xi(\kappa))}_x) \beta(\overline{(\kappa, \xi(\kappa))}_{x,[a]}).$$

Для каждой диаграммы K , которая получается из упорядоченного набора κ контуров добавлением информации, какой из пересекающихся отрезков проходит ниже, а какой выше, выберем такой упорядоченный набор $y = y(K, \overline{(\kappa, \xi(\kappa))})$ перекрёстков, что $\overline{(\kappa, \xi(\kappa))}_y = K$.

Зададим функцию γ из леммы 2 формулой

$$\gamma(K) := \hat{\gamma}(y, \kappa).$$

Значение $\gamma(K)$ зависит от выбора набора $(\kappa, \xi(\kappa))$ для κ , но этот выбор считается фиксированным. Функция γ корректно определена, а именно, $\gamma(K)$ не зависит от выбора $y(K, \overline{(\kappa, \xi(\kappa))})$, поскольку справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть κ — набор контуров. Если наборы x, y перекрёстков диаграммы $\overline{(\kappa, \xi(\kappa))}$ таковы, что $\overline{(\kappa, \xi(\kappa))}_x = \overline{(\kappa, \xi(\kappa))}_y$, то $\hat{\gamma}(x, \kappa) = \kappa(y, \kappa)$.

Доказательство. Положим $\mathcal{K} = (\kappa, \xi(\kappa))$. Обозначим через z_1, \dots, z_j, a, b перекрёстки диаграммы $\overline{\mathcal{K}}$, где $a \neq b$ (в остальном перекрёстки не обязательно различны). Положим $z := (z_1, z_2, \dots, z_j)$.

Получаем

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(z, a, a, \kappa) &= \hat{\gamma}(z, a, \kappa) - \varepsilon(a, \overline{\mathcal{K}}_{z,a}) \beta(\overline{\mathcal{K}}_{z,a,[a]}) = \\ &= \hat{\gamma}(z, \kappa) - \varepsilon(a, \overline{\mathcal{K}}_z) \beta(\overline{\mathcal{K}}_{z,[a]}) - \varepsilon(a, \overline{\mathcal{K}}_{z,a}) \beta(\overline{\mathcal{K}}_{z,a,[a]}) = \hat{\gamma}(z, \kappa), \end{aligned}$$

так как $\varepsilon(a, \overline{\mathcal{K}}_z) = -\varepsilon(a, \overline{\mathcal{K}}_{z,a})$.

Далее,

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(z, a, b, \kappa) &= \hat{\gamma}(z, a, \kappa) - \varepsilon(b, \overline{\mathcal{K}}_{z,a}) \beta(\overline{\mathcal{K}}_{z,a,[b]}) = \\ &= \hat{\gamma}(z, \kappa) - \varepsilon(a, \overline{\mathcal{K}}_z) \beta(\overline{\mathcal{K}}_{z,[a]}) - \varepsilon(b, \overline{\mathcal{K}}_{z,a}) \beta(\overline{\mathcal{K}}_{z,a,[b]}) = \\ &= \hat{\gamma}(z, \kappa) - \varepsilon(a, \overline{\mathcal{K}}_z) \beta(\overline{\mathcal{K}}_{z,[a]}) - \\ &\quad - \varepsilon(b, \overline{\mathcal{K}}_{z,a}) (\beta(\overline{\mathcal{K}}_{z,[b]}) - \varepsilon(a, \overline{\mathcal{K}}_{z,[b]}) \alpha(\overline{\mathcal{K}}_{z,[a],[b]})) = \\ &= \hat{\gamma}(z, \kappa) - \varepsilon(a, \overline{\mathcal{K}}_z) \beta(\overline{\mathcal{K}}_{z,[a]}) - \\ &\quad - \varepsilon(b, \overline{\mathcal{K}}_z) \beta(\overline{\mathcal{K}}_{z,[b]}) + \varepsilon(b, \overline{\mathcal{K}}_z) \varepsilon(a, \overline{\mathcal{K}}_z) \alpha(\overline{\mathcal{K}}_{z,[a],[b]}). \end{aligned}$$

Так как $\overline{\mathcal{K}}_{z,[a],[b]} = \overline{\mathcal{K}}_{z,[b],[a]}$, последнее выражение симметрично по a и b . Следовательно, $\hat{\gamma}(z, a, b, \kappa) = \hat{\gamma}(z, b, a, \kappa)$. Поэтому $\hat{\gamma}(z, \kappa)$ не зависит от порядка, в котором идут элементы в упорядоченном наборе z .

Из этого, а также из равенства $\widehat{\gamma}(z, a, a, \kappa) = \widehat{\gamma}(z, \kappa)$, следует, что $\widehat{\gamma}(z, \kappa)$ зависит только от чётности числа вхождений каждого перекрёстка в набор z .

Так как $\overline{\mathcal{K}}_x = \overline{\mathcal{K}}_y$, знак перекрёстка a диаграммы $\overline{\mathcal{K}}_x$ совпадает со знаком перекрёстка a диаграммы $\overline{\mathcal{K}}_y$. Поэтому чётность числа вхождений перекрёстка a в x и в y одинакова. Следовательно, $\widehat{\gamma}(x, \overline{\mathcal{K}}) = \widehat{\gamma}(y, \overline{\mathcal{K}})$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 2. Покажите, что для построенной функции γ , любой упорядоченной диаграммы K и любого перекрёстка a диаграммы K справедливо равенство

$$\gamma(K) - \gamma(K_a) = \varepsilon(a, K)\beta(K_{[a]}).$$

РЕШЕНИЕ. Нетрудно видеть, что существует такой набор κ контуров, что диаграммы K и K_a получаются из κ добавлением информации, какой из пересекающихся отрезков проходит ниже, а какой выше. Выберем такой набор x перекрёстков, что $\overline{(\kappa, \xi(\kappa))}_x = K$. Тогда $\overline{(\kappa, \xi(\kappa))}_{x,a} = K_a$ и $\overline{(\kappa, \xi(\kappa))}_{x,[a]} = K_{[a]}$.

Имеем

$$\begin{aligned} \gamma(K) - \gamma(K_a) &= \widehat{\gamma}(x, \kappa) - \widehat{\gamma}(x, a, \kappa) = \\ &= \varepsilon(a, \overline{(\kappa, \xi(\kappa))}_x)\beta(\overline{(\kappa, \xi(\kappa))}_{x,[a]}) = \varepsilon(a, K)\beta(K_{[a]}). \end{aligned}$$

Для доказательства леммы 2 теперь достаточно показать инвариантность функции γ , что будет сделано в следующем параграфе.

§ 9. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ИНВАРИАНТНОСТИ ФУНКЦИИ γ

Будем называть две диаграммы K и K' *схожими*, если K' может быть получена из K операциями изменения перекрёстков.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Для любого набора $\mathcal{K} = (\kappa, \xi)$ из двух или более контуров с отмеченными точками выполняется $\gamma(\overline{\mathcal{K}}) = 0$.

РЕШЕНИЕ. Из построения функции γ следует, что для диаграммы $\overline{\mathcal{K}}$ существует набор $\mathcal{K}' = (\kappa, (\xi'_1, \dots, \xi'_n))$ контуров с отмеченными точками, для которого $\gamma(\overline{\mathcal{K}'}) = 0$. Для доказательства утверждения 1 достаточно рассмотреть случай, когда набор \mathcal{K} получен из \mathcal{K}' заменой отмеченной точки ξ'_i на другую точку ξ_i .

Если точки ξ'_i и ξ_i принадлежат одной и той же дуге (кривой на диаграмме, ограниченной перекрёстками), то $\overline{\mathcal{K}'} = \overline{\mathcal{K}}$ (рис. 11).

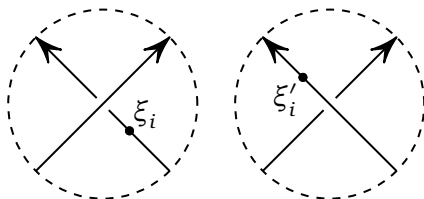


Рис. 11. Диаграммы $\bar{\mathcal{K}}$ и $\bar{\mathcal{K}'}$

Если точки ξ'_i и ξ_i принадлежат разным дугам, то достаточно рассмотреть случай, когда точка ξ'_i принадлежит дуге ab (дуге, ограниченной перекрёстками ab), а точка ξ_i принадлежит дуге bc . Если перекрёсток b образован пересечением двух разных компонент, то $\bar{\mathcal{K}'}$ = $\bar{\mathcal{K}}$. Если перекрёсток b образован самопересечением компоненты \bar{k}'_i , то

$$\varepsilon(b, \bar{\mathcal{K}'})\beta(\bar{\mathcal{K}'}_b) = \gamma(\bar{\mathcal{K}'}) - \gamma(\bar{\mathcal{K}'}_b) = \gamma(\bar{\mathcal{K}'}) - \gamma(\bar{\mathcal{K}}).$$

Нетрудно видеть, что неупорядоченная диаграмма $\bar{\mathcal{K}}_{[b]}$ тривиальна и содержит больше одной компоненты. Следовательно, $\beta(\bar{\mathcal{K}}_{[b]}) = 0$. Значит,

$$\gamma(\bar{\mathcal{K}'}) = \gamma(\bar{\mathcal{K}'}_b) = \gamma(\bar{\mathcal{K}}) = 0.$$

Утверждение 1 доказано.

Обозначим через K_{R_i} любую диаграмму (упорядоченную или неупорядоченную), полученную из диаграммы K преобразованием R_i для $i = 0, 1, 2, 3$ (т. е. плоскими изотопиями или преобразованиями Рейдемейстера).

В ситуации на рис. 12 будем говорить, что перекрёстки x_1 и x_2 участвуют в движении Рейдемейстера R_i для $i = 1, 2, 3$. Если перекрёстки x_1, \dots, x_j (не обязательно различные) диаграммы K не участвуют в движении Рейдемейстера R_i для $i = 1, 2, 3$, то обозначим через x'_1, \dots, x'_j перекрёстки диаграммы K_{R_i} , в которые переходят перекрёстки x_1, \dots, x_j при R_i . Обозначим через x'_1, \dots, x'_j перекрёстки неупорядоченной диаграммы K_{R_0} , в которые переходят перекрёстки x_1, \dots, x_j (не обязательно различные) при плоской изотопии R_0 . В ситуации на рис. 12 будем говорить, что перекрёстки x_1, \dots, x_j не участвуют в плоской изотопии. Положим $x' := (x'_1, \dots, x'_j)$.

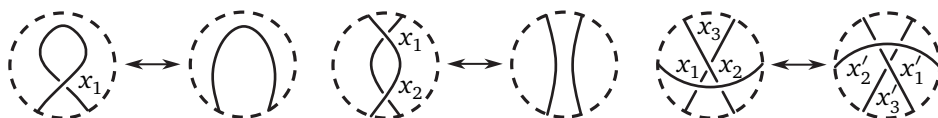


Рис. 12. К утверждениям 1 и 2

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если $\gamma(K) = \gamma(K_{R_i})$, где $i = 0, 1, 2, 3$, и перекрёсток a не участвует в преобразовании R_i , то $\gamma(K_a) = \gamma(K_{R_i, a'})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\gamma(K_a) = \gamma(K) + \varepsilon(a, K_a)\beta(K_{[a]}) = \gamma(K_{R_i}) + \varepsilon(a', K_{R_i, a'})\beta(K_{R_i, [a']}) = \gamma(K_{R_i, a'}).$$

Так как $\gamma(K) = \gamma(K_{R_i})$ и $\beta(K_{[a]}) = \beta(K_{R_i, [a']})$, получаем, что $\gamma(K_a) = \gamma(K_{R_i, a'})$. \square

Покажем инвариантность функции γ относительно каждого из преобразований R_i , где $i = 0, 1, 2, 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАВЕНСТВА $\gamma(K) = \gamma(K_{R_0})$. Выберем такой набор $\mathcal{K} = (\kappa, \xi)$ контуров с отмеченными точками, что диаграмма $\bar{\mathcal{K}}$ схожа с диаграммой K . Обозначим через $\mathcal{K}' = (\kappa', \xi')$ такой набор контуров с отмеченными точками, что диаграмма $\bar{\mathcal{K}}'$ схожа с диаграммой K_{R_0} , причём $\bar{\mathcal{K}}'$ получена из $\bar{\mathcal{K}}$ преобразованием R_0 . По утверждению 1 получаем $0 = \gamma(\bar{\mathcal{K}}) = \gamma(\bar{\mathcal{K}}') = \gamma(\bar{\mathcal{K}}_{R_0})$. Тогда по утверждению 2

$$\gamma(\bar{\mathcal{K}}_x) = \gamma(\bar{\mathcal{K}}_{R_0, x'}) = \gamma(K) = \gamma(K_{R_0}). \quad \square$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАВЕНСТВА $\gamma(K) = \gamma(K_{R_1})$. Выберем такой набор $\mathcal{K} = (\kappa, \xi)$ контуров с отмеченными точками, что диаграмма $\bar{\mathcal{K}}$ схожа с диаграммой K . Обозначим через $\mathcal{K}' = (\kappa', \xi')$ такой набор контуров с отмеченными точками, что диаграмма $\bar{\mathcal{K}}'$ схожа с диаграммой K_{R_1} , причём $\bar{\mathcal{K}}'$ получена из $\bar{\mathcal{K}}$ движением R_1 . Обозначим через a перекрёсток диаграммы K_{R_1} , участвующий в R_1 . Нетрудно видеть, что диаграмма $\bar{\mathcal{K}}'_{[a]}$ тривиальна и имеет более одной компоненты. Следовательно, $\beta(\bar{\mathcal{K}}'_{[a]}) = 0$. Имеем

$$\gamma(\bar{\mathcal{K}}') - \gamma(\bar{\mathcal{K}}'_a) = \varepsilon(a, \bar{\mathcal{K}}')\beta(\bar{\mathcal{K}}'_{[a]}) = 0.$$

Поэтому $\gamma(\bar{\mathcal{K}}') = \gamma(\bar{\mathcal{K}}'_a)$. Заметим, что либо у диаграммы $\bar{\mathcal{K}}'_a$, либо у диаграммы $\bar{\mathcal{K}}'$ перекрёсток, участвующий в R_1 , совпадает с перекрёстком диаграммы K_{R_1} , участвующим в R_1 . Обозначим соответствующую диаграмму через $\bar{\mathcal{K}}_{R_1}$. Выберем такое x , что $K = \bar{\mathcal{K}}_x$ и x не содержит перекрёстка a . По утверждению 1 получаем $0 = \gamma(\bar{\mathcal{K}}) = \gamma(\bar{\mathcal{K}}') = \gamma(\bar{\mathcal{K}}_{R_1})$. Тогда по утверждению 2

$$\gamma(\bar{\mathcal{K}}_x) = \gamma(\bar{\mathcal{K}}_{R_1, x'}) = \gamma(K) = \gamma(K_{R_1}). \quad \square$$

Доказательства равенства $\gamma(K) = \gamma(K_{R_i})$ для оставшихся движений Рейдемейстера схожи с доказательством этого равенства при $i = 1$. Мы приводим их ниже, но читатель может проделать необходимые рассуждения самостоятельно.

Доказательство равенства $\gamma(K) = \gamma(K_{R_2})$. Выберем такой набор $\mathcal{K} = (\kappa, \xi)$ контуров с отмеченными точками, что диаграмма $\overline{\mathcal{K}}$ схожа с диаграммой K . Обозначим через $\overline{\mathcal{K}'} = (\kappa', \xi')$ такой набор контуров с отмеченными точками, что диаграмма $\overline{\mathcal{K}'}$ схожа с диаграммой K_{R_2} , причём $\overline{\mathcal{K}'}$ получена из $\overline{\mathcal{K}}$ движением R_2 . Обозначим через a и b перекрёстки диаграммы K_{R_2} , участвующие в R_2 (рис. 13).

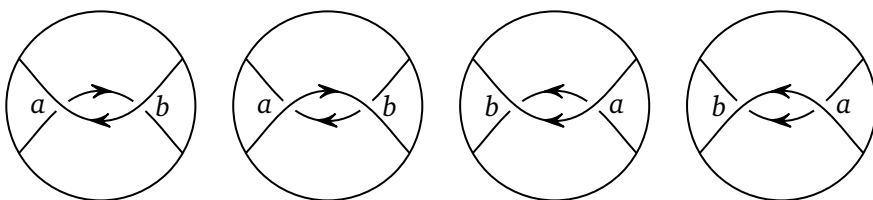


Рис. 13. К равенству $\gamma(K) = \gamma(K_{R_2})$

Имеем

$$\begin{aligned} \gamma(\overline{\mathcal{K}'}) &= \gamma(\overline{\mathcal{K}'}_b) + \varepsilon(b, \overline{\mathcal{K}'})\beta(\overline{\mathcal{K}'}_{[b]}) = \\ &= \gamma(\overline{\mathcal{K}'}_{a,b,a}) + \varepsilon(a, \overline{\mathcal{K}'}_{a,b})\beta(\overline{\mathcal{K}'}_{a,b,[a]}) = \gamma(\overline{\mathcal{K}'}_{a,b}). \end{aligned}$$

Следовательно, $\gamma(\overline{\mathcal{K}'}) = \gamma(\overline{\mathcal{K}'}_{a,b})$. Заметим, что либо у диаграммы $\overline{\mathcal{K}'}_{a,b}$, либо у диаграммы $\overline{\mathcal{K}'}$ перекрёстки, участвующие в R_2 , совпадают с перекрёстками диаграммы K_{R_2} , участвующими в R_2 . Обозначим соответствующую диаграмму через $\overline{\mathcal{K}'}_{R_2}$. Выберем такое x , что $\overline{\mathcal{K}'}_x = K$ и x не содержит перекрёстков a и b . По утверждению 1 получаем

$$0 = \gamma(\overline{\mathcal{K}'}) = \gamma(\overline{\mathcal{K}'}) = \gamma(\overline{\mathcal{K}'}_{R_2}).$$

Тогда по утверждению 2

$$\gamma(\overline{\mathcal{K}'}_x) = \gamma(\overline{\mathcal{K}'}_{R_2,x'}) = \gamma(K) = \gamma(K_{R_2}). \quad \square$$

Доказательство равенства $\gamma(K) = \gamma(K_{R_3})$. Обозначим через x_1, x_2, x_3 перекрёстки диаграммы K , участвующие в преобразовании R_3 (рис. 12).

Построим такой набор $\overline{\mathcal{K}} = (\kappa, \xi)$ контуров с отмеченными точками, что диаграмма $\overline{\mathcal{K}}$ схожа с диаграммой K и отмеченные точки не лежат на дугах x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1 диаграммы $\overline{\mathcal{K}}$. Обозначим через $\overline{\mathcal{K}'} = (\kappa', \xi')$ такой набор контуров с отмеченными точками, что диаграмма $\overline{\mathcal{K}'}$ схожа с диаграммой K_{R_3} , причём $\overline{\mathcal{K}'}$ получена из $\overline{\mathcal{K}}$ движением R_3 .

Предположим, что перекрёстки x_1 и x_2 у диаграмм $\overline{\mathcal{K}}$ и K совпадают. Тогда выберем такое x , при котором $K = \overline{\mathcal{K}'}_x$ и в x нет перекрёстков

x_1 и x_2 . По утверждению 1 получаем $0 = \gamma(\bar{\mathcal{K}}) = \gamma(\bar{\mathcal{K}}') = \gamma(\bar{\mathcal{K}}_{R_3})$. Тогда по утверждению 2

$$\gamma(\bar{\mathcal{K}}_x) = \gamma(\bar{\mathcal{K}}_{R_3, x'}) = \gamma(K) = \gamma(K_{R_3}).$$

Предположим теперь, что у диаграммы $\bar{\mathcal{K}}$ перекрёсток x_i , где i равно 1 или 2, не совпадает с перекрёстком диаграммы K . Нетрудно видеть, что неупорядоченные диаграммы $\bar{\mathcal{K}}_{[x_i]}$ и $\bar{\mathcal{K}}'_{[x'_i]}$ эквивалентны. Имеем

$$\begin{aligned} \gamma(\bar{\mathcal{K}}_{x_i}) &= \gamma(\bar{\mathcal{K}}) + \varepsilon(x_i, \bar{\mathcal{K}}_{x_i})\beta(\bar{\mathcal{K}}_{[x_i]}) = \\ &= \gamma(\bar{\mathcal{K}}) + \varepsilon(x'_i, \bar{\mathcal{K}}'_{x'_i})\beta(\bar{\mathcal{K}}'_{[x'_i]}) = \gamma(\bar{\mathcal{K}}'_{x'_i}). \end{aligned}$$

Выберем такое x , что $K = \bar{\mathcal{K}}_{x_i, x}$ и в x нет перекрёстков x_1 и x_2 . Имеем $\gamma(\bar{\mathcal{K}}_{x_i}) = \gamma(\bar{\mathcal{K}}'_{x'_i}) = \gamma(\bar{\mathcal{K}}_{x_i, R_3})$. Тогда по утверждению 2

$$\gamma(\bar{\mathcal{K}}_{x_i, x}) = \gamma(\bar{\mathcal{K}}_{x_i, R_3, x'}) = \gamma(K) = \gamma(K_{R_3}).$$

Предположим, что перекрёстки x_1 и x_2 у диаграмм $\bar{\mathcal{K}}$ и K не совпадают. Нетрудно видеть, что для какого-то i диаграммы $\bar{\mathcal{K}}_{[x_i]}$ и $\bar{\mathcal{K}}'_{[x'_i]}$ эквивалентны. Получаем

$$\gamma(\bar{\mathcal{K}}_{x_i}) = \gamma(\bar{\mathcal{K}}) + \varepsilon(x_i, \bar{\mathcal{K}}_{x_i})\beta(\bar{\mathcal{K}}_{[x_i]}) = \gamma(\bar{\mathcal{K}}) + \varepsilon(x'_i, \bar{\mathcal{K}}'_{x'_i})\beta(\bar{\mathcal{K}}'_{[x'_i]}) = \gamma(\bar{\mathcal{K}}'_{x'_i}).$$

Далее, для $j \neq i$ диаграммы $\bar{\mathcal{K}}_{x_i, [x_j]}$ и $\bar{\mathcal{K}}'_{x'_i, [x'_j]}$ эквивалентны. Имеем

$$\begin{aligned} \gamma(\bar{\mathcal{K}}_{x_i, x_j}) &= \gamma(\bar{\mathcal{K}}_{x_i}) + \varepsilon(x_j, \bar{\mathcal{K}}_{x_i, x_j})\beta(\bar{\mathcal{K}}_{[x_j]}) \\ &= \gamma(\bar{\mathcal{K}}'_{x'_i}) + \varepsilon(x'_j, \bar{\mathcal{K}}'_{x'_i, x'_j})\beta(\bar{\mathcal{K}}'_{[x'_j]}) = \gamma(\bar{\mathcal{K}}'_{x'_i, x'_j}). \end{aligned}$$

Выберем такое x , что $K = \bar{\mathcal{K}}_{x_i, x_j, x}$ и в x нет перекрёстков x_1 и x_2 . Получаем $\gamma(\bar{\mathcal{K}}_{x_i, x_j}) = \gamma(\bar{\mathcal{K}}'_{x'_i, x'_j}) = \gamma(\bar{\mathcal{K}}_{x_i, x_j, R_3})$. Тогда по утверждению 2

$$\gamma(\bar{\mathcal{K}}_{x_i, x_j, x}) = \gamma(\bar{\mathcal{K}}_{x_i, x_j, R_3, x'}) = \gamma(K_{R_3}) = \gamma(K).$$

Основная теорема доказана. □

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ § 4

2. $C(a) = -C(b) = x$.
3. $C(a) = C(b) = 1 + x^2$.
4. $C(c) = 1 - x^2 \neq C(a)$. Так как полином Конвея является инвариантом и принимает разные значения на диаграмме восьмёрки и на диаграмме трилистника, эти диаграммы неэквивалентны.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарен В. Мантурову, Е. Морозову, А. Скопенкову и А. Сосинскому за помощь в подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Alexander J. W.* Topological invariants of knots and links // Trans. AMS. 1928. Vol. 30, № 2. P. 275–306.
- [2] *Conway J. H.* An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties // Computational Problems in Abstract Algebra. Oxford, England: Pergamon Press, 1970. P. 329–358.
- [3] *Jones V. F. R.* A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras // Bull. AMS. 1985. Vol. 12, № 1. P. 103–111.
- [4] *Kauffman L. H.* Formal knot theory. Dover Publications, 2006.
- [5] *Lickorish W. B. R., Millett K. C.* A polynomial invariant of oriented links // Topology. 1987. Vol. 26, № 1. P. 107–141.
- [6] *Manturov V.* Knot theory. CRC pressm, 2018.
- [7] *Przytycki J. H., Traczyk P.* Conway algebras and skein equivalence of links of Conway type // Proc. AMS. 1987. Vol. 100. P. 744–748.
- [8] *Прасолов В. В., Сосинский А. Б.* Узлы, зацепления, косы и трёхмерные многообразия. М.: МЦНМО, 1997.
- [9] *Скопенков А. Б.* Основы теории узлов и зацеплений для пользователя // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 27. М.: МЦНМО, 2021. С. 128–165.