По мотивам задачника

Разрезание треугольника на равные треугольники

А. Д. Рябичев

Настоящая статья содержит решение задачи 23.8 («Математическое просвещение», сер. 3, вып. 23, с. 216):

При каких n любой треугольник можно разрезать на n равных треугольников? (*А. Ю. Сойфер*)

А именно, в статье доказывается, что *почти любой* треугольник можно разрезать лишь на n^2 равных между собой треугольников, причём для каждого n такое разбиение единственно. Для решения этой «школьной» задачи мы используем чуть более продвинутую технику, чем просто школьная геометрия, — некоторые приёмы из линейной алгебры, анализа и теории меры.

§ 1. Введение

Любой треугольник можно разрезать на n^2 равных между собой треугольников для любого $n \in \mathbb{N}$. Схема такого разрезания показана на рис. 1. Будем называть такие разбиения *стандартными*.

Некоторые треугольники допускают и другие разрезания на m равных между собой треугольников, в том числе для чисел m, не являющихся полными квадратами. Мы предлагаем читателю рассмотреть самые простые примеры, приведённые ниже, самостоятельно.

Задача 1. Докажите, что если треугольник Δ можно разбить на 2 равных между собой треугольника, то Δ равнобедренный.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке конкурса «Молодая математика России».

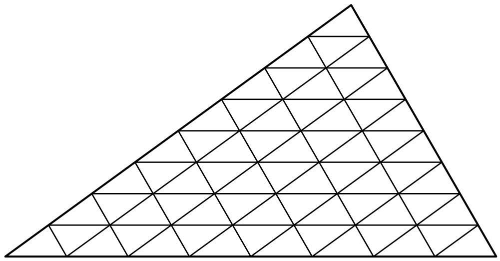

Рис. 1. Разрезание треугольника на n^2 равных треугольников

Задача 2. а) Докажите, что если треугольник Δ можно разбить на 3 равных между собой треугольника, то Δ имеет угол $\pi/3$.

б) Докажите, что таких треугольников всего два (с точностью до подобия).

Задача 3. Постройте треугольник, который можно разбить на 4 равных между собой треугольника способом, отличным от стандартного.

Задача 4. Существует ли треугольник, который можно разбить на 5 равных между собой треугольников?

При большом m анализ способов разбить треугольник на m равных довольно сложен. В нашей статье мы поговорим о следующей задаче.

Вопрос. *Существует ли треугольник, который можно разрезать лишь на n^2 равных между собой треугольников*?

В книге [1] А. Сойфер даёт положительный ответ на этот вопрос, демонстрируя ряд изящных и весьма полезных приёмов из линейной алгебры, так что приведённое им доказательство вполне доступно заинтересованному старшекласснику.

Мы дадим немного другое доказательство существования такого треугольника. При этом мы выходим за рамки школьной геометрии и используем более продвинутые приёмы из анализа и теории меры. Как нам кажется, эта техника довольно естественна для решения нашей задачи. В частности, она легко приводит к более общему результату, чем просто теорема существования:

Теорема 1. *Почти любой треугольник допускает разбиение лишь на n^2 равных между собой треугольников для всех натуральных n.*

Более тщательный анализ разбиений даёт следующее интересное обобщение:

Теорема 2. *Почти для любого треугольника все разбиения на равные между собой треугольники могут быть устроены только как на* рис. 1.

В формулировках теорем 1 и 2 требуется уточнить, что означают слова *почти любой*. В следующих двух разделах мы даём необходимые определения.

§ 2. Множества меры нуль

Говорят, что множество $X \subset \mathbb{R}^k$ имеет *меру нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество X можно покрыть не более чем счётным числом параллелепипедов со сторонами, параллельными координатным осям, и суммарным объёмом меньше ε. В этих терминах фраза «*почти любая точка из* $\mathbb{R}^k$» означает «*любая точка из* $\mathbb{R}^k$*, не принадлежащая заданному множеству меры нуль*».

Легко показать, что подмножество множества меры нуль также является множеством меры нуль. Объединение не более чем счётного числа множеств меры нуль будет иметь меру нуль. В частности,

Предложение 1. *Объединение счётного числа прямых в* $\mathbb{R}^2$ *имеет меру нуль.*

Пусть даны открытые подмножества $U, V \subset \mathbb{R}^2$. Мы называем отображение $f\colon U \to V$ *гладким*, если его координатные функции непрерывно дифференцируемы. Следующее утверждение нетрудно вывести из локальной липшицевости гладкого отображения (см., например, [2, с. 610–611]).

Предложение 2. *Для любого множества меры нуль* $X \subset \mathbb{R}^2$ *и любого гладкого отображения* $f\colon U \to V$ *множество* $f(X \cap U)$ *имеет меру нуль.*

Здесь существенна гладкость отображения f. Пример негладкого f, для которого утверждение предложения 2 неверно, может быть построен при помощи кривой Пеано.

Используя компактность, несложно убедиться, что никакой куб ненулевого размера в $\mathbb{R}^k$ не является множеством меры нуль (см., например, [2, с. 103]). Из этого легко выводится

Предложение 3. *Если множество* $M \subset \mathbb{R}^k$ *имеет непустую внутренность, то для любого множества меры нуль* $Z \subset \mathbb{R}^k$ *множество* $M \setminus Z$ *также непусто.*

§ 3. Пространство треугольников

Каждому треугольнику Δ сопоставим упорядоченную тройку длин его сторон (a, b, c). Ясно, что для нашей задачи достаточно рассмотреть лишь те треугольники, у которых одна из сторон равна единице. Поэтому будем считать, что $c = 1$.

Таким образом, множество всех треугольников (с упорядоченными вершинами, с точностью до подобия) отождествляется с подмножеством $T \subset \mathbb{R}^2$, заданным неравенствами $x+1>y$, $y+1>x$ и $x+y>1$.

Далее мы построим такое множество $\Sigma \subset T$ меры нуль, что любой $\Delta \in T \setminus \Sigma$ обладает свойствами из теорем 1 и 2. Очевидно, теорема А. Сойфера вытекает из теоремы 1: множество $T \subset \mathbb{R}^2$ имеет непустую внутренность и, следовательно, по предложению 3 не может являться множеством меры нуль.

§ 4. Несоизмеримость углов

Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ — подмножество, заданное уравнениями $x>0$, $y>0$ и $x+y<\pi$. Для $(\alpha, \beta) \in A$ существует единственный треугольник $\Delta \in T$ с упорядоченным набором углов $(\alpha, \beta, \pi-\alpha-\beta)$. Этим задано отображение $f\colon A \to T$.

Предложение 4. *Отображение f гладко.*

Доказательство. Возьмём произвольный треугольник ABC, в котором $AB=1$. Тогда по теореме синусов

$$AC = \frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}, \quad BC = \frac{\sin\angle A}{\sin\angle C}.$$

Отношение гладких функций гладко, поэтому зависимость сторон треугольника ABC от его углов является гладкой, что и требовалось. □

Для каждой тройки рациональных чисел $(q_1, q_2, q_3) \neq (0,0,0)$ уравнение

$$q_1x + q_2y + q_3(\pi - x - y) = 0$$

задаёт прямую либо пустое множество. Пусть $\Sigma_A \subset \mathbb{R}^2$ — объединение всех прямых такого вида, и пусть $\Sigma_1 = f(\Sigma_A \cap A)$. Тогда по предложению 1 множество Σ_A имеет меру нуль, а по предложению 2 множество Σ_1 имеет меру нуль.

Про треугольники из $T \setminus \Sigma_1$ говорят, что *их углы несоизмеримы*.

Замечание. Если α, β, γ — набор углов некоторого треугольника, причём $(\alpha, \beta) \in \Sigma_A$, то тогда также $(\beta, \alpha) \in \Sigma_A$, $(\alpha, \gamma) \in \Sigma_A$, и т. д. (т. е. не важно, какую пару углов брать).

Лемма 1. *Пусть $\Delta \in T \setminus \Sigma_1$. Тогда если Δ разбит на треугольники, равные Δ', то Δ и Δ' подобны.*

Доказательство. Предположим обратное: Δ разбит на треугольники, равные Δ', и при этом Δ' не подобен Δ. Пусть $\alpha < \beta < \gamma$ — углы Δ, а $\alpha' \leqslant \beta' \leqslant \gamma'$ — углы Δ'.

Заметим, что обязательно выполнено хотя бы одно из неравенств $\alpha' > \alpha$, $\beta' > \beta$ или $\gamma' > \gamma$. В противном случае Δ' и Δ окажутся подобны.

Если $\alpha' > \alpha$, то внутри угла α не поместится ни один из углов Δ', что противоречит наличию разбиения.

Если $\beta' > \beta$, то, ввиду существования разбиения, внутри α и β помещается целое число углов, равных α', откуда $(\alpha, \beta) \in \Sigma_A$.

Наконец, пусть $\gamma' > \gamma$. Тогда каждый угол в Δ может быть составлен из углов α', β'. Другими словами, для некоторых $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ мы имеем

$$\begin{cases} \alpha = u_1\alpha' + u_2\beta', \\ \beta = v_1\alpha' + v_2\beta', \\ \gamma = w_1\alpha' + w_2\beta'. \end{cases}$$

Но три вектора $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ и $w = (w_1, w_2)$ линейно зависимы в $\mathbb{Q}^2$. Это значит, что $q_1 u + q_2 v + q_3 w = 0$ для некоторой тройки рациональных чисел $(q_1, q_2, q_3) \neq (0, 0, 0)$. Отсюда следует равенство $q_1\alpha + q_2\beta + q_3\gamma = 0$, что противоречит предположению $\Delta \notin \Sigma_1$. $\square$

§ 5. Несоизмеримость сторон

Пусть $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ — наименьшее подполе, содержащее квадратные корни всех натуральных чисел. Опишем его явно: все элементы $\mathbb{K}$ суть дроби вида

$$\frac{\pm\sqrt{m_1} \pm \ldots \pm \sqrt{m_k}}{\pm\sqrt{n_1} \pm \ldots \pm \sqrt{n_l}}$$

с ненулевыми знаменателями, где $m_1, \ldots, m_k, n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}$. Очевидно, $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$ и $\mathbb{K}$ счётно.

Для каждой тройки q_1, q_2, q_3 элементов из $\mathbb{K}$, такой что $(q_1, q_2) \neq (0, 0)$, возьмём прямую в $\mathbb{R}^2$, заданную уравнением $q_1 x + q_2 y + q_3 = 0$. Пусть $\Sigma_2 \subset \mathbb{R}^2$ — объединение всех прямых такого вида.

Про треугольники из $T \setminus \Sigma_2$ говорят, что *их стороны несоизмеримы над* $\mathbb{K}$. По предложению 1 множество Σ_2 имеет меру нуль.

Лемма 2. *Пусть $\Delta \in T \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$. Тогда если Δ разбит на треугольники, равные Δ', то Δ и Δ' подобны с коэффициентом $1/n^2$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть Δ разбит на m копий треугольника Δ'. По лемме 1 треугольники Δ и Δ' подобны. Из соотношения площадей, коэффициент подобия равен $1/\sqrt{m}$.

Обозначим длины сторон треугольника Δ через a, b, c, причём $c=1$. Тогда Δ' имеет стороны длиной $\frac{1}{\sqrt{m}}a$, $\frac{1}{\sqrt{m}}b$, $\frac{1}{\sqrt{m}}$. Рассмотрим замощение стороны длины c. Для некоторых $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ имеем

$$c = n_1\frac{1}{\sqrt{m}}a + n_2\frac{1}{\sqrt{m}}b + n_3\frac{1}{\sqrt{m}},$$

откуда

$$\frac{n_1}{\sqrt{m}}a + \frac{n_2}{\sqrt{m}}b + \frac{n_3 - \sqrt{m}}{\sqrt{m}} = 0.$$

Из предположения $\Delta \notin \Sigma_2$ следует, что оба числа n_1, n_2 равны нулю. Поэтому $n_3 = \sqrt{m}$, т. е. $m = n_3^2$. □

Доказательство теоремы 1. Нам достаточно положить

$$\Sigma = (\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \cap T.$$

Действительно, Σ имеет меру нуль, а согласно лемме 2 любой треугольник $\Delta \in T \setminus \Sigma$ можно разбить лишь на n^2 равных между собой треугольников. □

§ 6. Области со стандартным разбиением

Начнём техническую подготовку к доказательству теоремы 2. Пусть дано разбиение некоторого подмножества плоскости на равные треугольники. Будем называть разбиение *стандартным*, если все треугольники лежат в некоторой решётке как на рис. 1.

Зафиксируем треугольник $\Delta \in T$. Возьмём ограниченное множество $U \subset \mathbb{R}^2$, допускающее стандартное разбиение на треугольники, равные Δ.

Пусть δ — компонента границы множества U. Более точно, δ является замкнутой ломаной, по одну сторону к δ по всей длине примыкает U, а по другую сторону вблизи δ лежит незаполненная часть плоскости и, возможно, некоторые треугольники, которые соприкасаются с δ лишь вершиной (рис. 2). Также предположим, что хотя бы одна неограниченная компонента множества $\mathbb{R}^2 \setminus U$ примыкает к δ хотя бы по одному ребру.

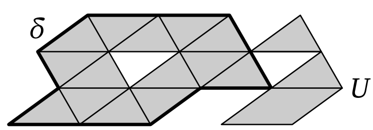

Рис. 2. Компонента границы U

Будем считать вершинами δ только те точки, где она делает излом. Углы δ будем мерить так, что вблизи вершины внутренняя часть угла покрыта областью U. Таким образом, углы δ принимают значения в $(0;\pi)\cup(\pi;2\pi)$. Выберем направление обхода δ.

Лемма 3. *У δ найдутся либо два угла $<\pi$, идущих подряд, либо угол $>\pi$, оба соседних с которым $<\pi$.*

Доказательство. Заметим, что для рёбер δ есть всего шесть вариантов направления. Отметим на единичной окружности 6 точек, соответствующих этим направлениям. Мы получили своего рода циферблат с шестью «делениями».

Можно сказать, что если мы проходим угол $<\pi$, то следующее ребро δ поворачивается относительно предыдущего на 1 или 2 деления, а если мы проходим угол $>\pi$, то следующее ребро δ поворачивается относительно предыдущего на -1 или -2 деления.

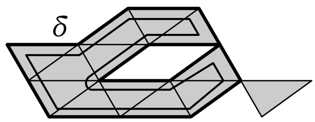

Рис. 3. Компонента границы U и идущая вдоль неё кривая внутри U

Вообще говоря, δ может иметь самопересечения. Но если взять кривую, идущую вдоль δ внутри U, она будет несамопересекающейся (рис. 3). Поэтому, суммируя количество делений (при повороте следующего ребра относительно предыдущего) по всем углам δ, за один полный круг мы получим ровно 6, что соответствует повороту на 2π в выбранном направлении.

Однако если после каждого угла $<\pi$ идут хотя бы два угла $>\pi$, суммарный вклад этих трёх углов в число делений будет $\leqslant 0$ — противоречие. Отсюда следует утверждение леммы. □

§ 7. Доказательство теоремы 2

Возьмём ограниченное множество $U\subset\mathbb{R}^2$ и треугольник $\Delta\in T\setminus\Sigma$. Таким образом, и его углы, и его стороны несоизмеримы. Предположим, что U допускает стандартное разбиение на треугольники, равные Δ. Определим ломаную δ как в предыдущем разделе.

Предположим, что U также имеет разбиение на равные Δ треугольники, не совпадающее со стандартным разбиением. Обозначим это разбиение $\mathscr{P}$.

Предложение 5. *Пусть I — ребро в δ, оба угла при котором $< \pi$. Тогда хотя бы один из треугольников разбиения $\mathscr{P}$, примыкающий к I, совпадает с треугольником из стандартного разбиения.*

Доказательство. Пусть a, b, c — длины сторон Δ. Для краткости будем так обозначать и сами стороны. Треугольники стандартного разбиения примыкают к I одной и той же стороной, скажем, a. Тогда $|I| = ma$ с натуральным m. Поскольку a, b и c несоизмеримы, все треугольники разбиения $\mathscr{P}$ примыкают к I стороной a.

Пусть α, β, γ — углы в Δ, лежащие против сторон a, b, c соответственно. Возьмём вершину B ребра I. Пусть треугольник стандартного разбиения, примыкающий к I и содержащий B, имеет там угол β. Тогда угол ломаной δ в вершине B равен либо β, либо $\beta + \alpha$ (в зависимости от того, один или два треугольника стандартного разбиения он содержит).

Ввиду несоизмеримости α, β и γ угол ломаной δ в вершине B может быть представлен в виде линейной комбинации α, β и γ с рациональными коэффициентами единственным способом. Поэтому треугольник разбиения $\mathscr{P}$, примыкающий к I и содержащий B, не может иметь там угол γ. Следовательно, этот треугольник имеет угол β при B, т. е. расположен как в стандартном разбиении.

(Итерируя это рассуждение, можно показать, что вообще все треугольники $\mathscr{P}$, примыкающие к I, расположены как в стандартном разбиении. Впрочем, нам это не требуется.) □

Предложение 6. *Пусть I, I' — пара рёбер δ, имеющая общий угол $> \pi$, причём другой угол при каждом из них $< \pi$. Тогда хотя бы один из треугольников разбиения $\mathscr{P}$, примыкающих к I или к I', совпадает с треугольником из стандартного разбиения.*

Доказательство. Пусть A — общая вершина I и I'. Тогда один из треугольников разбиения $\mathscr{P}$, примыкающих к I и I' и содержащих точку A, имеет в A вершину.

Пусть для определённости такой треугольник примыкает к I стороной b. Тогда нам остаётся повторить рассуждение из доказательства предложения 5 для ребра I. Мы получим, что треугольник разбиения $\mathscr{P}$, имеющий вершину на другом конце ребра I, расположен как в стандартном разбиении. □

Доказательство теоремы 2. Возьмём треугольник $\Delta \in T \setminus \Sigma$. Предположим, что Δ допускает разбиение $\mathscr{P}$, отличающееся от стандартного. По лемме 2 тогда $\mathscr{P}$ — разбиение на n^2 треугольников, подобных Δ с коэффициентом $1/n$.

Определим U как объединение треугольников из $\mathscr{P}$, которые расположены не как в стандартном разбиении. Тогда, применяя лемму 3, а затем предложение 5 или предложение 6, мы видим, что один из треугольников разбиения $\mathscr{P}$, принадлежащий U, совпадает с треугольником из стандартного разбиения. Но это противоречит построению U. □

Список литературы

[1] *Soifer A.* How does one cut a triangle? Springer, 2009.

[2] *Зорич В. А.* Математический анализ. Часть II. М.: МЦНМО, 2019.

Андрей Дмитриевич Рябичев, НМУ, матфак ВШЭ

ryabichev@179.ru