О четырёх центрах вписанных окружностей в четырёхугольнике

И. И. Фролов

Следующая задача сформулирована в [1] и предлагалась в «Задачнике МП» под номером 23.4′. Решение, использующее разные модели плоскости Лобачевского, можно найти в [2].

Задача 1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O и описан около окружности. Тогда центры вписанных окружностей треугольников OAB, OBC, OCD, ODA лежат на одной окружности.

Следующая задача предлагалась в «Задачнике Кванта» под номером M1254. Вычислительное решение приведено в [3]. Геометрическое решение, идейно близкое к этой заметке, опубликовано в [4].

Задача 2. Диагонали описанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P (рис. 1). Тогда центры вписанных окружностей треугольников PAB, PBC, PCD, PDA лежат на одной окружности.

У задачи 1 имеется обобщение:

Задача 3. Внутри описанного четырёхугольника $ABCD$ взята точка P, такая что $PA = PC$ и $PB = PD$ (рис. 2). Тогда центры вписанных

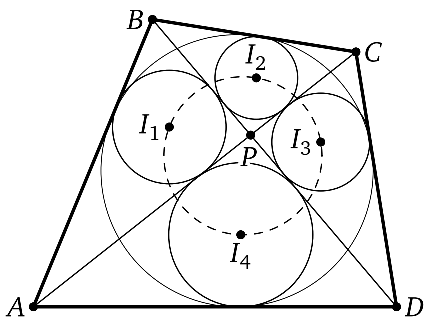

Рис. 1

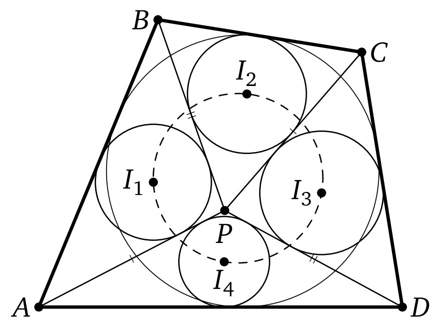

Рис. 2

окружностей треугольников PAB, PBC, PCD и PDA лежат на одной окружности.

Эта заметка посвящена доказательству теоремы, обобщающей все вышеприведённые задачи.

Теорема. *Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Внутри него взята точка P. Пусть PL и PK — биссектрисы треугольников PAC и PBD. Пусть I_1, I_2, I_3, I_4 — центры вписанных окружностей треугольников PAB, PBC, PCD, PDA соответственно. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Точки L, K и I лежат на одной прямой.*
2. *Прямые I_1I_2 и I_3I_4 пересекаются на внешней биссектрисе угла APC.*
3. *Точки I_1, I_2, I_3, I_4 лежат на одной окружности.*

Решение задачи 3 следует из теоремы, поскольку середины диагоналей и центр вписанной окружности описанного четырёхугольника лежат на прямой Гаусса.

Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 1. *Внутри угла ABC взята точка P. Пусть I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников PAB и PBC, а BL_1 и BL_2 — биссектрисы этих треугольников* (рис. 3). *Тогда прямые I_1I_2 и L_1L_2 пересекаются на внешней биссектрисе угла APC.*

Доказательство. Для треугольников L_1PB, L_2PB и L_1PL_2 применяем свойство биссектрисы делить противолежащую сторону пропорционально прилежащим. Затем используем теорему Менелая для треугольника L_1BL_2 и прямой I_1I_2. □

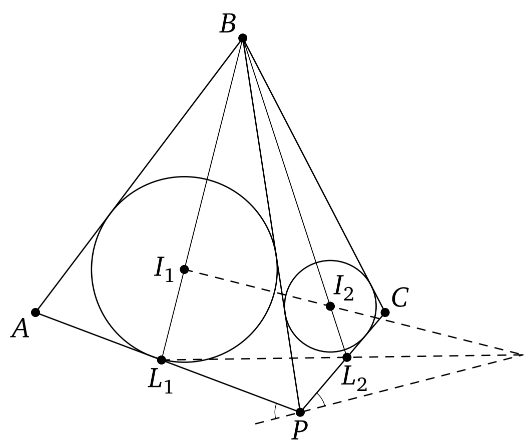

Рис. 3

Замечание. Если P лежит на AC, то утверждение предложения 1 бессмысленно, но из доказательства видно, что точка пересечения I_1I_2 с AC дополняет L_1, L_2 и P до гармонической четвёрки.

Лемма. *На луче PA выбраны точки L_1 и L_4, а на луче PC — точки L_2, L_3. Прямые L_1L_2 и L_3L_4 пересекаются на внешней биссектрисе угла APC тогда и только тогда, когда*

$$\frac{1}{PL_1}+\frac{1}{PL_3}=\frac{1}{PL_2}+\frac{1}{PL_4}. \tag{$*$}$$

Доказательство. Оставляем читателю в качестве упражнения. □

Предложение 2. *Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взята точка P. Пусть I_1, I_2, I_3, I_4 — центры вписанных окружностей треугольников PAB, PBC, PCD, PDA соответственно. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Прямые I_1I_2 и I_3I_4 пересекаются на внешней биссектрисе угла APC.*
2. *Прямые I_2I_3 и I_1I_4 пересекаются на внешней биссектрисе угла BPD.*
3. $\dfrac{AB}{AP\cdot BP}+\dfrac{CD}{CP\cdot DP}=\dfrac{BC}{BP\cdot CP}+\dfrac{AD}{DP\cdot AP}$.

Доказательство. Достаточно доказать равносильность утверждений 1 и 3. Пусть BL_1 и BL_2, DL_3 и DL_4 — биссектрисы треугольников PAB и PBC, PCD и PDA. В силу предложения 1 утверждение 1 равносильно тому, что L_1L_2 и L_3L_4 пересекаются на внешней биссектрисе угла APC (если P не лежит на AC).

В силу леммы утверждение 1 равносильно $(*)$. (Если P лежит на AC, то утверждение 1 по-прежнему равносильно $(*)$, но доказательство немного меняется.)

Поскольку биссектриса делит противолежащую сторону треугольника пропорционально прилежащим, получаем

$$PL_1=\frac{PA\cdot PB}{AB+PB},\quad PL_2=\frac{PC\cdot PB}{BC+PB},\quad PL_3=\frac{PC\cdot PD}{CD+PD},\quad PL_4=\frac{PA\cdot PD}{DA+PD}.$$

Отсюда ясно, что $(*)$ равносильно утверждению 3. □

Предложение 3. *На стороне AD описанного четырёхугольника $ABCD$ выбрана точка P* (рис. 4). *Тогда P и центры вписанных окружностей треугольников PAB, PBC, PCD лежат на одной окружности.*

Замечание. Утверждение остаётся верным, если угол D четырёхугольника $ABCD$ больше $180°$ и существует окружность, касающаяся отрезков AB, BC и продолжений AD, CD за точку D.

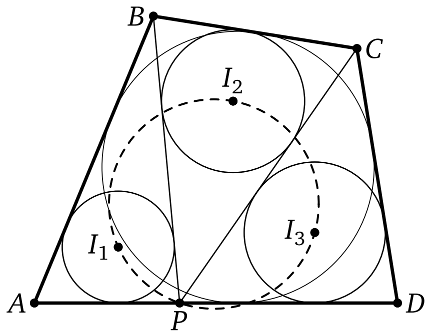

Рис. 4

Доказательство. Пусть I_1, I_2 и I_3 — центры вписанных окружностей треугольников PAB, PBC, PCD, а I — центр вписанной окружности четырёхугольника $ABCD$. Тогда для точки I есть изогонально сопряжённая относительно четырёхугольника BCI_3I_1 точка I_2. Остаётся посчитать углы.

Подробности и более общее утверждение приведены в [5, задача 2].

Другое доказательство можно получить, заметив сначала, что вписанные окружности треугольников PAB, PBC, PCD имеют общую касательную. После этого остаётся посчитать углы. □

Предложение 4. *Внутри описанного четырёхугольника $ABCD$ взята точка P. Пусть I_1, I_2, I_3, I_4 — центры вписанных окружностей треугольников PAB, PBC, PCD, PDA соответственно* (рис. 5). *Тогда*

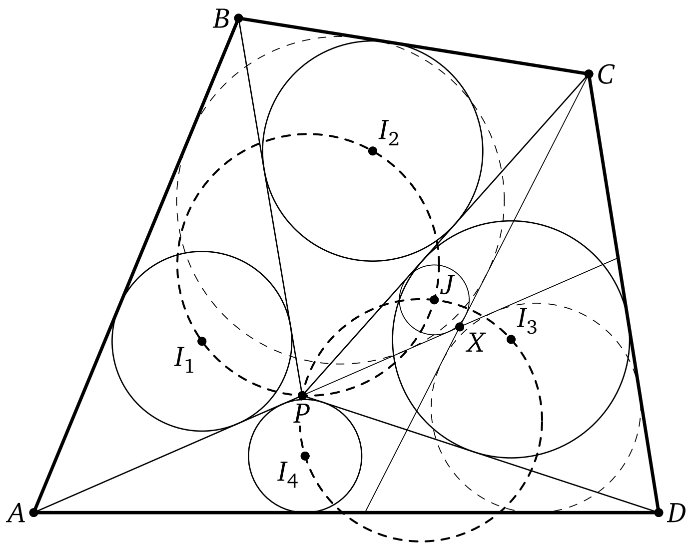

Рис. 5

внешняя биссектриса угла APC является радикальной осью окружностей (PI_1I_2) и (PI_3I_4).

Доказательство. Из соображений непрерывности можно считать, что P не лежит на AC и $AP - PC \neq AB - BC$. Без ограничения общности $AP - PC < AB - BC$. На продолжении AP за точку P отметим точку X так, что $AX - XC = AB - BC$ (несложно видеть, что она лежит внутри четырёхугольника $ABCD$). Четырёхугольники $ABCX$ и $ADCX$ описанные.

Пусть J — центр вписанной окружности треугольника CPX. Применяя предложение 3 к четырёхугольникам $ABCX$ и $ADCX$ и точке P на стороне AX, получаем, что точки P, I_1, I_2 и J лежат на одной окружности, как и точки P, I_3, I_4 и J. Значит, PJ — радикальная ось окружностей (PI_1I_2) и (PI_3I_4). □

Замечание. Более простое доказательство предложения 4, без ссылки на предложение 3, можно получить, используя широко известные «леммы о воробьях» (факты 1 и 2 в [6]).

Доказательство теоремы. Точка L делит отрезок AC в отношении PA/PC, а точка K делит отрезок BD в отношении PB/PD. Будем обозначать ориентированную площадь треугольника XYZ через S_{XYZ}. Из линейности ориентированной площади получаем

$$\begin{aligned}
S_{KIL} &= \frac{PC \cdot S_{KIA} + PA \cdot S_{KIC}}{PA + PC} = \\
&= \frac{PC \cdot PD \cdot S_{BIA} + PC \cdot PB \cdot S_{DIA} + PA \cdot PD \cdot S_{BIC} + PA \cdot PB \cdot S_{DIC}}{(PA + PC)(PB + PD)} = \\
&= \pm \frac{r}{2} \cdot \frac{PC \cdot PD \cdot AB - PC \cdot PB \cdot DA - PA \cdot PD \cdot BC + PA \cdot PB \cdot CD}{(PA + PC)(PB + PD)}
\end{aligned}$$

(где r — радиус вписанной окружности), поскольку треугольники BIA и DIC ориентированы в одну сторону, а треугольники DIA и BIC — в другую. Получаем, что равенство $S_{KIL} = 0$ равносильно утверждению 3 предложения 2. Остаётся заметить, что равенство $S_{KIL} = 0$ равносильно утверждению 1 теоремы, и применить предложение 2.

Равносильность утверждений 2 и 3 в теореме немедленно следует из предложения 4. □

Приведём ещё несколько фактов про эту картинку. В обозначениях из доказательства предложения 4 пусть ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 и γ — вписанные окружности треугольников PAB, PBC, PCD, PDA и CPX соответственно. Аналогично будем считать, что $DP - PB < DA - AB$, и отметим на луче DP такую точку X', что $DX' - X'B = DA - AB$; пусть

γ' — вписанная окружность треугольника $BX'P$, а J' — её центр. Пусть ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c, ℓ_d — вторые внутренние касательные к парам окружностей ω_4 и ω_1, ω_1 и ω_2, ω_2 и ω_3, ω_3 и ω_4.

Предложение 5.

(a) *Прямые* ℓ_b *и* ℓ_d *касаются* γ, *а прямые* ℓ_a *и* ℓ_c *касаются* γ'.

(b) *Существует окружность* Γ, *касающаяся* ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c, ℓ_d.

(c) *Окружности* (JI_2I_3), (JI_1I_4), $(J'I_1I_2)$, $(J'I_3I_4)$ *пересекаются в центре* Γ. □

Замечание. Если выполнены утверждения 1–3 теоремы, то выполняются и следующие утверждения.

4. Центры вневписанных окружностей треугольников PAB, PBC, PCD, PDA напротив вершины P лежат на одной окружности.

5. Центры вневписанных окружностей треугольников PAB, PBC напротив вершины B и центры вневписанных окружностей треугольников PCD, PDA напротив вершины D лежат на одной окружности.

В заключение предлагаем читателю рассмотреть ситуацию, когда точка P лежит на кубике фокусов четырёхугольника $ABCD$ (т. е. имеет изогонально сопряжённую относительно этого четырёхугольника). Для простоты рассмотрим один случай расположения точек.

Задача 4. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности ω с центром I (рис. 6). Точка P такова, что $ABPD$ — выпуклый четырёхугольник, содержащий точку C, и $\angle APD = \angle BPC$. Пусть ω_1, ω_2, ω_3,

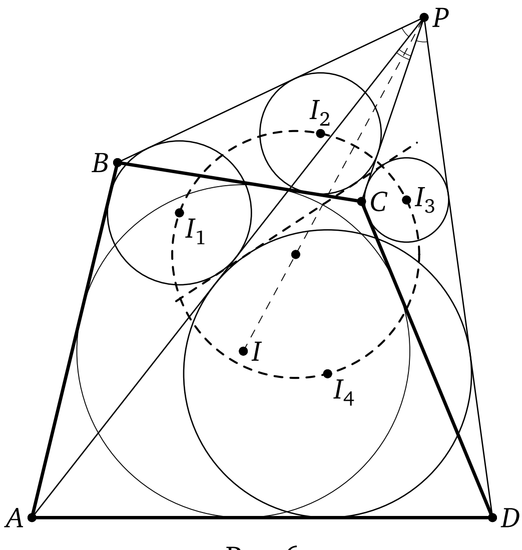

Рис. 6

ω_4 — вписанные окружности треугольников PAB, PBC, PCD, PDA, а I_1, I_2, I_3, I_4 — соответственно их центры. Тогда

(a) окружности ω_1, ω_3 и ω имеют общую касательную (а также ω_2, ω_4 и ω имеют общую касательную);
(b) окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 имеют общую касательную;
(c) точки I_1, I_2, I_3, I_4 лежат на одной окружности с центром на PI;
(d) точка Микеля четырёхугольника $I_1I_2I_3I_4$ совпадает с P.

Благодарности

Автор благодарен Николаю Белухову за постановку задачи, а также Алексею Заславскому, Павлу Кожевникову, Виталию Курину и Ивану Постнову за ценные обсуждения.

Список литературы

[1] *Dao Thanh Oai.* `http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h572848`

[2] *Заславский А.* О вписанно-описанных четырёхугольниках, моделях геометрии Лобачевского и «лемме Нилова» // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 25. М.: МЦНМО, 2020. С. 163–166.

[3] *Вайнштейн И.* Решение задачи М1524 // Квант. № 3. 1996. С. 25–26.

[4] *Белухов Н.* Решение задачи М2213 // Квант. № 4. 2011. Задачник «Кванта».

[5] *Уткин А.* Изогональное сопряжение в четырёхугольнике // Квант. № 2. 2019. С. 37–42.

[6] *Полянский А.* Воробьями по пушкам! // Квант. 2012. № 2. С. 49–50.

Иван Ильич Фролов, НИУ ВШЭ, НМУ
`frolov1999@yandex.ru`