Структурированное доказательство теоремы Колмогорова о суперпозициях

С. В. Дженжер, А. Б. Скопенков

Мы представляем хорошо структурированное детальное изложение известного доказательства важного результата, являющегося решением 13-й проблемы Гильберта о суперпозициях. Для функций двух переменных он формулируется так.

Теорема Колмогорова. *Существуют непрерывные функции*

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_5 \colon [0,1] \to [0,1]$$

такие, что для любой непрерывной функции $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ *существует непрерывная функция* $h\colon [0,3] \to \mathbb{R}$ *такая, что для любых* $x, y \in [0,1]$

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{5} h\big(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\,\varphi_k(y)\big).$$

Доказательство доступно неспециалистам, в частности, студентам, знакомым только с основными свойствами непрерывных функций.

§ 1. Введение

Читатель понимает, что многочлен от нескольких переменных выражается через сложение и умножение (с использованием констант). Возможно, читатель знаком также с выражением одних функций алгебры логики через другие (см., например, [ZSS, § 24.5]; впрочем, это знакомство не требуется для понимания настоящей статьи).

Теорема Колмогорова 1.1 показывает, что любая непрерывная функция двух и более переменных «может быть выражена» через непрерывные функции одной переменной и сложение. (Чёткая формулировка понятия «может быть выражена» не нужна для этой теоремы; впрочем, читатель может найти эту формулировку и её обсуждение, например, в [Ar].) Эта теорема решает 13-ю проблему Гильберта.

Поддержано грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 19-01-00169.

Мы представляем хорошо структурированное детальное изложение известного доказательства этой важной теоремы.

Теорема 1.1 (Колмогоров). *Для любого целого $n > 1$ существуют действительные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и непрерывные функции*

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n+1} \colon [0,1] \to [0,1]$$

такие, что для любой непрерывной функции $f \colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$ существует непрерывная функция $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{2n+1} h\Bigl(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_k(x_i)\Bigr).$$

Замечание 1.2. (a) В качестве $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ мы можем взять квадратные корни из попарно различных простых чисел. Или, для $n=2$, взять $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = \sqrt{2}$. Например, для функции $f(x,y) = x + \sqrt{2}y + 2$ мы можем взять $h(x) = x$, $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = 2/(1+\sqrt{2})$ и $\varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_5 = 0$. Тем не менее, мы не знаем функций φ, h даже для таких простых функций f, как сложение и умножение. И, конечно, мы не знаем явного выражения для «универсальных функций» $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n+1}$.

(b) Классическое изложение доказательства, формулировка и обсуждения 13-й проблемы Гильберта приведены, например, в [Ar, He, Ko], [LGM, Chapter 17], [St, § 1–4]. Чтобы сделать наше изложение хорошо структурированным, мы, например, явно ввели понятие λ-предколмогоровского отображения и явно сформулировали аппроксимативную теорему Колмогорова 1.3. Чтобы сделать наше изложение более детальным, мы, например, явно сформулировали утверждения 2.1 и 2.2 и привели их простые доказательства. Ср. с [BCM].

(c) Эта тема активно изучается не только в анализе, но также и в топологии и в компьютерной науке, см., например, работы [St, Vi, Sk, Br, SH] и ссылки в них.

В 27-м и 28-м выпусках Матпросвещения опубликованы задачи соответственно 27.4 (с. 234) и 27.4$'$ (с. 248), связанные по тематике с 13-й проблемой Гильберта.

План доказательства теоремы 1.1 Колмогорова. Мы представляем доказательство для $n = 2$, полагая $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = \sqrt{2}$. Доказательство в общем случае аналогично. Для доказательства нам необходимы некоторые соглашения, обозначения и определения.

Далее в тексте «функция» означает «непрерывная функция», и «отображение» означает «непрерывное отображение».

Обозначим $I := [0,1]$. Мы рассматриваем упорядоченный набор функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_5 \colon I \to I$ как отображение (= вектор-функцию) $\varphi \colon I \to I^5$. Для функции $h \colon [0,3] \to \mathbb{R}$ обозначим

$$S_\varphi h(x,y) := \sum_{k=1}^{5} h\big(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\,\varphi_k(y)\big).$$

Для компактного подмножества $M \subset \mathbb{R}^s$ и функции $f \colon M \to \mathbb{R}$ обозначим[1)] $\|f\| := \sup_{z \in M} |f(z)|$. Назовём **$\lambda$-предколмогоровским отображением** для ненулевой функции $f \colon I^2 \to \mathbb{R}$ отображение $\varphi \colon I \to I^5$, для которого найдётся функция $h \colon [0,3] \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\|f - S_\varphi h\| < \lambda \|f\| \quad \text{и} \quad \|h\| \leqslant \|f\|.$$

Для функции $f \equiv 0$ любое отображение $\varphi \colon I \to I^5$ является λ-предколмогоровским.

Теорема 1.3 (аппроксимативная теорема Колмогорова). *Существует отображение $\varphi \colon I \to I^5$, являющееся $(7/8)$-предколмогоровским для любой функции $f \colon I^2 \to \mathbb{R}$.*

Вывод теоремы 1.1 для $n = 2$, $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = \sqrt{2}$ из теоремы 1.3. Для целых неотрицательных m определим функции $h_m \colon [0,3] \to \mathbb{R}$ индуктивно[2)]. Положим $h_0 \equiv 0$. Обозначим через h_m функцию, полученную применением Теоремы 1.3 к $f - \sum_{k=0}^{m-1} S_\varphi h_k$. Тогда, обозначив $\lambda = 7/8$, имеем

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{m} S_\varphi h_k \right\| < \lambda \left\| f - \sum_{k=0}^{m-1} S_\varphi h_k \right\| < \ldots < \lambda^m \|f\|. \qquad (*)$$

Так как

$$\|h_m\| \leqslant \left\| f - \sum_{k=0}^{m-1} S_\varphi h_k \right\| < \lambda^{m-1} \|f\|,$$

функциональный ряд $\sum_{m=0}^{\infty} h_m$ сходится равномерно к функции $h \colon [0,3] \to \mathbb{R}$. Тогда

$$\sum_{m=0}^{\infty} S_\varphi h_m = S_\varphi \sum_{m=0}^{\infty} h_m = S_\varphi h.$$

1) Все функции в дальнейшем имеют компактную область определения, которая и берётся в качестве M для каждой из функций (т. е. для разных функций множества M разные).

2) Заметим, что нам достаточно определить h_m и h на $[0, 1+\sqrt{2}]$, но мы вместо этого пишем $[0,3]$ для краткости.

Так как $\lambda^m \xrightarrow{m\to\infty} 0$, переходя к пределу в (*), получаем $\|f - S_\varphi h\| = 0$, т. е. $S_\varphi h = f$. Продолжим функцию $h\colon [0,3]\to\mathbb{R}$ до функции $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. $\square$

Лемма 1.4 (счётная аппроксимативная лемма Колмогорова). *Существует отображение $\varphi\colon I\to I^5$, являющееся $(6/7)$-предколмогоровским для любого многочлена $g\colon I^2\to\mathbb{R}$ с рациональными коэффициентами.*

Доказательство теоремы 1.3 по модулю леммы 1.4. Возьмём любые функцию $f\colon I^2\to\mathbb{R}$ и отображение $\varphi\colon I\to I^5$, данное леммой 1.4. Если $f\equiv 0$, то φ является $(7/8)$-предколмогоровским для f по определению. Теперь предположим, что $\|f\|>0$. Тогда для любых достаточно близких к $\frac{111}{112}f$ функций $g\colon I^2\to I$ выполнено

$$\|g\| < \|f\| \quad \text{и} \quad \|f-g\| < \frac{1}{56}\|f\|.$$

Из теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций многочленами следует, что существует многочлен $g\colon I^2\to\mathbb{R}$ с рациональными коэффициентами, удовлетворяющий этим неравенствам. Так как φ является $(6/7)$-предколмогоровским для g, найдётся функция $h\colon [0,3]\to\mathbb{R}$ такая, что

$$\|h\| \leqslant \|g\| \leqslant \|f\| \quad \text{и} \quad \|g - S_\varphi h\| < \frac{6}{7}\|g\| \leqslant \frac{6}{7}\|f\|.$$

Тогда

$$\|f - S_\varphi h\| \leqslant \|f-g\| + \|g - S_\varphi h\| < \frac{1}{56}\|f\| + \frac{6}{7}\|f\| = \frac{7}{8}\|f\|.$$

Следовательно, φ является $(7/8)$-предколмогоровским для f. $\square$

Лемма 1.5. *Для любой функции $f\colon I^2\to\mathbb{R}$ выполнено следующее*:

(стабильность) *любое отображение, достаточно близкое к* $(6/7)$-*предколмогоровскому для f, само является* $(6/7)$-*предколмогоровским для f*;

(аппроксимация) *для любого отображения $\varphi\colon I\to I^5$ найдётся сколь угодно близкое* $(6/7)$-*предколмогоровское отображение для f.*

Для функции $f\colon I^2\to\mathbb{R}$ обозначим через $PK(f)$ семейство всех $(6/7)$-предколмогоровских отображений для f.

Вывод[3] *леммы* 1.4 *из леммы* 1.5. Обозначим через Q семейство всех многочленов $I^2\to\mathbb{R}$ с рациональными коэффициентами. По лемме 1.5, для любой функции $g\in Q$ множество $PK(g)$ открыто и всюду

[3] Вывод использует теорему Бэра о категории. Если вы не знакомы с этой теоремой, то просто пропустите этот вывод или замените применение этой теоремы на применение принципа вложенных шаров.

плотно в пространстве всех непрерывных отображений $I \to I^5$. Известно, что это пространство полно. Тогда по теореме Бэра о категории [KF, § 2.3.3], [Sk', § 2], счётное пересечение $\bigcap_{g\in Q} PK(g)$ непусто. Любое отображение φ из этого пересечения является искомым. $\square$

§ 2. Доказательство леммы 1.5

Доказательство стабильности в лемме 1.5. Если $f \equiv 0$, то утверждение тривиально. Поэтому предположим, что $\|f\| > 0$.

Предположим, $\psi \in PK(f)$ — некоторое отображение. Тогда существует функция $h\colon [0,3] \to \mathbb{R}$ такая, что $\|f - S_\psi h\| < \frac{6}{7}\|f\|$. Обозначим

$$\varepsilon := \frac{1}{5}\Big(\frac{6}{7}\|f\| - \|f - S_\psi h\|\Big) > 0.$$

Так как h равномерно непрерывна, найдётся такое δ, что

$$|h(x) - h(y)| < \varepsilon \quad \text{при } |x - y| < \delta.$$

Достаточно показать, что любое отображение φ, являющееся $\left(\frac{\delta}{3}\right)$-близким к ψ, лежит в $PK(f)$.

Для любых $x, y \in I$ и $k = 1, \ldots, 5$

$$\Big|\big(\psi_k(x) + \sqrt{2}\,\psi_k(y)\big) - \big(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\,\varphi_k(y)\big)\Big| < (1+\sqrt{2})\frac{\delta}{3} < \delta.$$

Следовательно,

$$\Big|h\big(\psi_k(x) + \sqrt{2}\,\psi_k(y)\big) - h\big(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\,\varphi_k(y)\big)\Big| < \varepsilon.$$

Поэтому

$$\|S_\psi h - S_\varphi h\| < 5\varepsilon.$$

Наконец,

$$\|f - S_\varphi h\| \leqslant \|f - S_\psi h\| + \|S_\psi h - S_\varphi h\| < \frac{6}{7}\|f\| - 5\varepsilon + 5\varepsilon = \frac{6}{7}\|f\|.$$

Следовательно, $\varphi \in PK(f)$. $\square$

Подготовка к доказательству аппроксимации в лемме 1.5: рационально разделяющие функции

Обозначим $[a,b] + c := [a+c, b+c]$ и $[a,b]\cdot d := [ad, bd]$.

Возьмём любое $k = 1, \ldots, 5$. Обозначим

$$Z_k = Z_k(N) := \Big[-1, \frac{N-k}{5}\Big] \cap \mathbb{Z}.$$

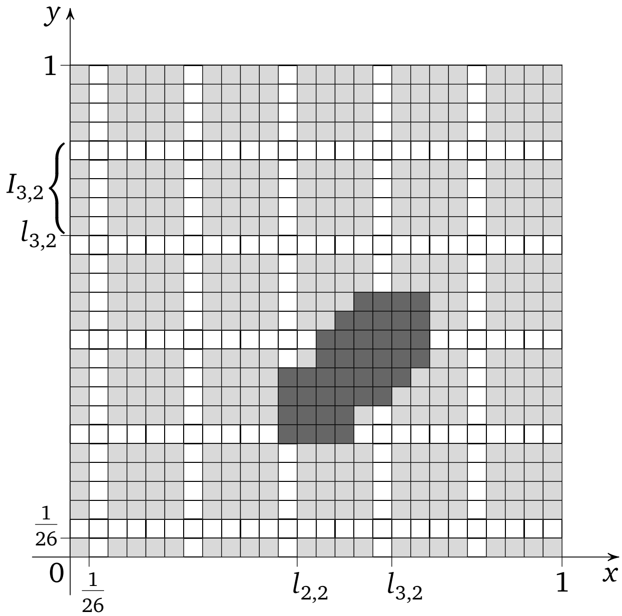

Рис. 1. Серые квадраты $I_{i,2}(26) \times I_{j,2}(26)$ параметризованы парами $i, j \in Z_2(26)$. Чёрные квадраты суть $I_{2,k} \times I_{1,k}$ для $k = 1, 3, 4, 5$

Для каждого $j \in Z_k(N)$ обозначим

$$I_{j,k} = I_{j,k}(N) := \frac{4I + 5j + k}{N} \quad \text{и} \quad l_{j,k} = l_{j,k}(N) := \max\left\{\frac{5j + k}{N}, 0\right\}.$$

Очевидно, $l_{j,k}$ является левым концом отрезка[4)] $I_{j,k}$ (рис. 1).

Предложение 2.1. *Пусть N — целое положительное число. Для любых $(x, y) \in I^2$ и не менее чем для трёх $k = 1, \dots, 5$ найдутся $i, j \in Z_k(N)$ такие, что*

$$(x, y) \in I_{i,k}(N) \times I_{j,k}(N).$$

Доказательство. Имеем

$$(x, y) \in I_{i,k}(N) \times I_{j,k}(N) \quad \Leftrightarrow \quad (Nx, Ny) \in I_{i,k}(1) \times I_{j,k}(1).$$

Обозначим $m := [Nx/5]$ и через r обозначим остаток от деления числа $[Nx]$ на 5. Тогда $Nx \in [5m + r, 5m + r + 1)$, и для любого $s = 0, 1, 2, 3$ имеем

$$Nx \in [5m + (r - s), 5m + (r - s + 4)] = 4I + 5m + (r - s).$$

[4)] Для фиксированных k и N отрезки $I_{j,k}(N)$ при всевозможных $j \in Z_k(N)$ имеют длины $4/N$, они не пересекаются и расстояния между соседними отрезками равны $1/N$, причём самый первый отрезок покрывает точку 0, а самый последний — точку 1.

Поэтому для $k \equiv r-s \pmod 5$ найдётся $i \in Z_k(N)$ такое, что $Nx \in I_{i,k}(1)$. Тогда для не менее чем четырёх $k = 1, \ldots, 5$ существует подходящее i. Аналогично для не менее чем четырёх $k = 1, \ldots, 5$ найдётся $j \in Z_k(N)$ такое, что $Ny \in I_{j,k}(1)$. Тогда для не менее чем трёх $k = 1, \ldots, 5$ найдутся такие $i, j \in Z_k(N)$, что $(Nx, Ny) \in I_{i,k}(1) \times I_{j,k}(1)$. □

Функция $\varphi : I \to I$ *рационально разделяет* семейство попарно непересекающихся отрезков на прямой, если φ принимает постоянные рациональные попарно различные значения на этих отрезках[5)]. Для отображения $\varphi : I \to I^5$ обозначим $\|\varphi\| = \max_{k=1,\ldots,5} \|\varphi_k\|$.

Предложение 2.2. *Пусть ε — некоторое положительное число.*

(a) *Пусть $\psi : I \to I$ — некоторая функция и $k \in \{1, \ldots, 5\}$.*
Тогда найдётся целое $N_0 = N_0(\psi, k) > 0$ такое, что для любого целого $N > N_0$ и для любого конечного множества G рациональных чисел существует функция $\varphi : I \to I$ такая, что

- $\|\varphi - \psi\| < \varepsilon$;
- *φ рационально разделяет семейство отрезков $I_{j,k} = I_{j,k}(N)$ с параметром $j \in Z_k(N)$;*
- *$\varphi(I_{j,k}) \notin G$ для любого $j \in Z_k(N)$.*

(b) *Пусть $\psi : I \to I^5$ — некоторое отображение.*
Тогда найдётся такое целое $N_0 > 0$, что для любого целого $N > N_0$ существует отображение $\varphi : I \to I^5$ такое, что

- $\|\varphi - \psi\| < \varepsilon$;
- *для каждого $k = 1, \ldots, 5$ функция φ_k рационально разделяет семейство отрезков $I_{j,k} = I_{j,k}(N)$ с параметром $j \in Z_k(N)$;*
- *числа $\varphi_k(I_{j,k})$ попарно различны для различных $k \in \{1, \ldots, 5\}$ и $j \in Z_k(N)$.*

Доказательство пункта (a). В силу равномерной непрерывности функции ψ, найдётся $\delta > 0$ такое, что $|\psi(x) - \psi(y)| < \varepsilon/2$ при $|x-y| < \delta$. Положим $N_0 := \lceil 5/\delta \rceil$. Рассмотрим любое $N > N_0$. Возьмём кусочно-линейную функцию $\varphi : I \to I$ такую, что

- на каждом отрезке $I_{j,k}$ значение $\varphi(I_{j,k})$ рационально и $\frac{\varepsilon}{2}$-близко к $\psi(l_{j,k})$;
- все значения $\varphi(I_{j,k})$ различны и не лежат в G;
- φ линейна на промежутках между отрезками.

[5)] Напомним, что в данном тексте «функция» означает «непрерывная функция», а «отображение» означает «непрерывное отображение».

Поскольку $0 \in I_{-1,k}$ и $1 \in I_{\max Z_k,k}$ для любого $k = 1, \ldots, 5$, определение значений $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$ осмысленно.

Теперь φ рационально разделяет семейство отрезков $I_{j,k}$, и её значения на отрезках не лежат в G. Остаётся показать, что

$$|\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon \quad \text{для любого } x \in I. \tag{$**$}$$

Для любой точки $x \in I_{j,k}$ из $\varphi(x) = \varphi(l_{j,k})$ и $|x - l_{j,k}| \leqslant 4/N < \delta$ получаем

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leqslant \left|\varphi(l_{j,k}) - \psi(l_{j,k})\right| + \left|\psi(l_{j,k}) - \psi(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Для любой точки x, не принадлежащей ни одному отрезку $I_{j,k}$, выберем $j \in Z_k(N)$ такое, что x находится между двумя отрезками $I_{j,k}$ и $I_{j+1,k}$, т. е. $l_{j,k} + 4/N < x < l_{j+1,k}$. Концы отрезков связаны между собой очевидным соотношением $l_{j,k} + 5/N = l_{j+1,k}$. Тогда найдётся $\alpha \in (0, 1)$ такое, что $x = l_{j+1,k} - \alpha/N$. Теперь $(**)$ следует из того, что

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leqslant \alpha\left|\varphi\left(l_{j+1,k} - \frac{1}{N}\right) - \psi(x)\right| + (1-\alpha)\left|\varphi(l_{j+1,k}) - \psi(x)\right| < \\ < \alpha\varepsilon + (1-\alpha)\varepsilon = \varepsilon.$$

Здесь первое неравенство следует из того, что φ линейна на промежутке $l_{j+1,k} + [-1/N, 0]$ (т. е. из $\varphi(x) = \alpha\varphi(l_{j+1,k} - 1/N) + (1-\alpha)\varphi(l_{j+1,k})$). Второе неравенство доказывается следующим образом. Так как

$$\varphi\left(l_{j+1,k} - \frac{1}{N}\right) = \varphi(l_{j,k}) \quad \text{и} \quad |x - l_{j,k}| \leqslant \frac{5}{N} < \delta,$$

получаем, что

$$\left|\varphi\left(l_{j+1,k} - \frac{1}{N}\right) - \psi(x)\right| \leqslant \left|\varphi(l_{j,k}) - \psi(l_{j,k})\right| + \left|\psi(l_{j,k}) - \psi(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Так как $|x - l_{j+1,k}| \leqslant 1/N < \delta$, имеем

$$\left|\varphi(l_{j+1,k}) - \psi(x)\right| \leqslant \left|\varphi(l_{j+1,k}) - \psi(l_{j+1,k})\right| + \left|\psi(l_{j+1,k}) - \psi(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

Доказательство пункта (b). Выберем $N_0 = \max_{k=1,\ldots,5} N_0(\psi_k, k)$, где $N_0(\psi_k, k)$ приходят из применения пункта (a) утверждения. Возьмём любое $N > N_0$. Применим пункт (a) к ψ_1, $k = 1$ и $G = \varnothing$. Получим некоторую функцию φ_1. Теперь применим пункт (a) к ψ_2, $k = 2$ и $G = \{\varphi_1(I_{j,1})\}_{j \in Z_1}$. Получим функцию φ_2. Аналогично на k-м шаге применяем пункт (a) к функции ψ_k и множеству $G = \bigcup_{s=1}^{k-1} \{\varphi_s(I_{js})\}_{j \in Z_s}$. Так получим функцию φ_k. После пяти шагов получим требуемое отображение $\varphi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_5)$. $\square$

Доказательство аппроксимации в лемме 1.5. Если $f \equiv 0$, то утверждение тривиально. Поэтому предположим, что $\|f\| > 0$.

Зафиксируем любое отображение $\psi : I \to I^5$ и любое $\varepsilon > 0$. Нужно указать $\varphi \in PK(f)$, ε-близкое к ψ.

В силу равномерной непрерывности функции f найдётся такое целое N_1, что

$$|f(x,y) - f(x',y')| < \frac{1}{6}\|f\| \quad \text{при} \ \ |x - x'| < \frac{4}{N_1} \text{ и } |y - y'| < \frac{4}{N_1}.$$

Применим утверждение 2.2(b) к отображению ψ и числу ε. Получим число N_0. Положим $N := \max(N_0, N_1) + 1$. Применим утверждение 2.2(b) к этому числу. Получим отображение $\varphi : I \to I^5$.

Для каждого k определим функцию $\widetilde{\varphi}_k \colon I^2 \to [0,3]$ формулой

$$\widetilde{\varphi}_k(x,y) = \varphi_k(x) + \sqrt{2}\,\varphi_k(y).$$

В следующем абзаце мы покажем, что $\widetilde{\varphi}_k$ принимает различные постоянные значения на различных квадратах, образованных декартовым произведением отрезков $I_{j,k}$.

В самом деле, предположим, что для некоторых x_1, x_2, y_1, y_2, принадлежащих некоторым из этих отрезков,

$$\varphi_k(x_1) + \sqrt{2}\,\varphi_k(y_1) = \varphi_k(x_2) + \sqrt{2}\,\varphi_k(y_2).$$

По определению рациональной разделяемости числа $\varphi_k(x_1)$, $\varphi_k(x_2)$, $\varphi_k(y_1)$ и $\varphi_k(y_2)$ рациональны. Тогда $\varphi_k(x_1) = \varphi_k(x_2)$ и $\varphi_k(y_1) = \varphi_k(y_2)$. Следовательно, пары x_1, x_2 и y_1, y_2 принадлежат одним и тем же отрезкам. Тогда точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) принадлежат одному квадрату.

В следующем абзаце мы покажем, что числа $\widetilde{\varphi}_k(I_{i,k} \times I_{j,k})$ попарно различны для различных троек (i, j, k).

В самом деле, предположим, что $\widetilde{\varphi}_k(I_{i,k} \times I_{j,k}) = \widetilde{\varphi}_n(I_{p,n} \times I_{q,n})$. Тогда $\varphi_k(I_{i,k}) = \varphi_n(I_{p,n})$. Поэтому $k = n$ и $i = p$. Аналогично $j = q$.

Возьмём кусочно-линейную функцию $h \colon [0,3] \to \mathbb{R}$ такую, что

$$h(\widetilde{\varphi}_k(I_{i,k} \times I_{j,k})) = \frac{1}{3} f(l_{i,k}, l_{j,k})$$

для любых $k = 1, \ldots, 5$ и $i, j \in Z_k$. Тогда $\|h\| \leqslant \frac{1}{3}\|f\|$. Теперь лемма следует из того, что для любого $z \in I^2$

$$|S_\varphi h(z) - f(z)| \leqslant \frac{1}{6}\|f\| + \frac{2}{3}\|f\| < \frac{6}{7}\|f\|.$$

Здесь второе неравенство очевидно. Первое неравенство доказывается следующим образом. Так как $N > N_1$, получаем, что

$$|f(z) - f(z')| < \frac{1}{6}\|f\|$$

для любых $k=1,\dots,5$, $i,j\in Z_k$ и $z,z'\in I_{ik}\times I_{j,k}$. По утверждению 2.1, существует не менее трёх троек $(i_s,j_s,k_s)\in Z_{k_s}\times Z_{k_s}\times\{1,\dots,5\}$, $s=1,2,3$, таких, что $I_{i_s,k_s}\times I_{j_s,k_s}\ni z$. Для них

$$h(\widetilde{\varphi}_{k_s}(z))=\frac{1}{3}f(l_{i_s,k_s},l_{j_s,k_s}).$$

Эти значения отличаются от $\frac{1}{3}f(z)$ не более, чем на $\frac{1}{18}\|f\|$. Следовательно,

$$\left|\sum_{s=1}^{3}h(\widetilde{\varphi}_{k_s}(z))-f(z)\right|\leqslant\frac{1}{6}\|f\|.$$

Другие два значения $h(\widetilde{\varphi}_k(z))$ не превосходят $\frac{1}{3}\|f\|$ по абсолютной величине. □

Благодарности

Благодарим С. В. Шапошникова и анонимного рецензента за полезные обсуждения.

Список литературы

[Ar] *Арнольд В. И.* О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных // Математическое просвещение. Сер. 2. Вып. 3. М.: МЦНМО, 1958. С. 41–61. https://www.mccme.ru/free-books/djvu/mp2/mp2-3.htm

[BCM] *Белов А., Митрофанов И., Скопенков А., Чиликов А., Шапошников С.* 13-я проблема Гильберта о суперпозициях функций // 28-я Летняя конференция международного математического Турнира городов http://www.turgor.ru/lktg/2016/5/index.htm

[Br] *Brattka V.* From Hilbert's 13th Problem to the theory of neural networks: constructive aspects of Kolmogorov's Superposition Theorem // Kolmogorov's Heritage in Mathematics. Berlin: Springer, 2007. P. 253–280. https://doi.org/10.1007/978-3-540-36351-4_13

[He] *Hedberg T.* The Kolmogorov superposition theorem, Appendix II to H. S. Shapiro, Topics in Approximation Theory. Springer, 1971. (Lecture Notes in Math.; Vol. 187). P. 267–275.

[KF] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

[Ko] *Колмогоров А. Н.* О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения // ДАН СССР. 1957. Т. 114, № 5. С. 953–956. http://www.mathnet.ru/links/90e35c02a59c4c5009b53e9ca17ab3a2/dan22050.pdf

[LGM] *Lorentz G. G., Golitschek M. V., Makovoz Y.* Constructive Approximation: Advanced Problems. New York: Springer, 1996.

[SH] *Schmidt-Hieber J.* The Kolmogorov-Arnold representation theorem revisited // Neural Networks. 2021. Vol. 137. P. 119–126. https://doi.org/10.1016/j.neunet.2021.01.020

[Sk] *Скопенков А. Б.* Базисные вложения и 13-я проблема Гильберта // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 14. М.: МЦНМО, 2010. С. 143–174. http://arxiv.org/abs/1001.4011

[Sk'] *Скопенков А. Б.* Объемлемая однородность. М.: МЦНМО, 2012. http://arxiv.org/abs/1003.5278

[St] *Sternfeld Y.* Hilbert's 13th problem and dimension // Geometric aspects of functional analysis. Berlin: Springer, 1989. (Lecture Notes in Math.; Vol. 1376) P. 1–49.

[Vi] *Витушкин А. Г.* 13-я проблема Гильберта и смежные вопросы // УМН. 2004. Т. 59, вып. 1(355). С. 11–24; Russian Math. Surveys. 2004. Vol. 59, № 1. P. 11–25. https://doi.org/10.4213/rm698

[ZSS] Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки к профессии. М.: МЦНМО, 2018. http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf

Святослав Вадимович Дженжер, МФТИ

sdjenjer@yandex.ru

Аркадий Борисович Скопенков, МФТИ, НМУ

skopenko@mccme.ru