Дополнение и комментарии к задачнику

Хорошая задача ценна своими связями. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

Эстетическое чувство позволяет ощутить богатство связей и естественность задачи. Оно так важно в том числе и по этой причине. Значение математика определяется произведением его «пробивной силы» на эстетическое чувство (впрочем, эти две вещи взаимозависимы).

При публикации дополнения к задачнику нам прежде всего важны эти связи. Разумеется, содержательные и важные связи могут найтись как с классикой, так и с сюжетами, которые находятся в процессе исследования и ещё не получили изящной формулировки.

В выпуске 1 (с. 193, см. решение: выпуск 4, с. 218) опубликована

Задача 1.3. Может ли сумма чисел вида $a\sin(k\pi/n)$, где a — рациональное число, k, n — целые, равняться $\sqrt{1997}$?

(*В. А. Сендеров, А. Я. Белов*)

В этой связи стоит привести полезные тождества.

Задача 1.3′. *Докажите равенства*:

а) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)=-\frac{1}{2}$; б) $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}e^{k^2\cdot 2\pi i/p}=\begin{cases}\sqrt{p} & \text{\textit{при} } p=4k+1,\\ \sqrt{-p} & \text{\textit{при} } p=4k-1.\end{cases}$

Пункт б) *используется при доказательстве* квадратичного закона взаимности. (*В. А. Сендеров, А. Я. Белов*)

В выпуске 2 (с. 217, см. решение: выпуск 4, с. 222) опубликована

Задача 2.5. Дано выпуклое тело в пространстве. Докажите, что можно отметить 4 точки на его поверхности так, чтобы касательная (т. е. опорная плоскость) в каждой отмеченной точке была параллельна плоскости, проходящей через остальные три. (*А. Я. Белов*)

Решение этой задачи использует *экстремальный принцип*. Похожие идеи весьма распространены в комбинаторной геометрии, в частности, используются в следующей задаче:

Задача 2.5$'$. а) *Дана выпуклая фигура. Докажите, что вокруг неё можно описать n-угольник так, чтобы точки касания были серединами звеньев.*

б) *Тот же вопрос для пятиконечной звезды.*

в) *Дан выпуклый n-угольник M. Докажите, что существует замкнутая ломаная, вписанная в M, соседние звенья которой имеют равные углы с соответствующими сторонами M.* (*А. Я. Белов*)

В выпуске 3 (с. 233, см. решение: выпуск 18, с. 262) опубликована

Задача 3.5. Дан произвольный многочлен с комплексными коэффициентами. Докажите, что корни его производной лежат внутри выпуклой оболочки корней самого многочлена.
(*Теорема Гаусса — Люка*)

См. также задачу на схожий сюжет (выпуск 28, с. 239):

Задача 3.5$'$. *Даны многочлены P, Q степени n с вещественными корнями $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$ соответственно. Пусть $z_1 < \ldots < z_{n-1}$; $t_1 < \ldots < t_{n-1}$ — корни производных P' и Q' соответственно, и пусть кроме того $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_n < y_n$. Докажите, что $z_1 < t_1 < z_2 < t_2 < \ldots < z_{n-1} < t_{n-1}$.* (*Фольклор*)

В продолжение темы:

Задача 3.5$''$. *В условиях задачи* 3.5 *докажите, что центры тяжести многоугольника корней многочлена и многоугольника корней его производной совпадают.* (*Фольклор*)

Приведем ещё одну задачу на схожие идеи с Московской городской студенческой олимпиады по математике (1 секция, 1981 год).

Задача 3.5$'''$. *Пусть все корни многочлена $P(x)$ степени n — различные действительные числа, и пусть $c > 0$. Множество точек x таких, что $P'(x)/P(x) > c$, есть объединение конечного числа непересекающихся интервалов. Докажите, что сумма их длин равна n/c.*
(*Фольклор*)

В выпуске 4 (с. 216, см. решение: выпуск 5, с. 228–229) опубликована

Задача. Решите функциональное уравнение для непрерывных вещественных функций вещественного переменного:

$$F(x+y) = A(x) + B(x)C(y).$$

(*А. Я. Канель-Белов, Б. Р. Френкин*)

В выпуске 28 (с. 239) опубликована

Задача 4.8′. *Решите функциональное уравнение для непрерывных вещественных функций вещественного переменного*:

$$\Phi(a+b+c) = \phi(a)\phi(b)\phi(c).$$ (*Дж. Максвелл*)

В этой связи мы предлагаем подумать над *функциональным неравенством*:

Задача 4.8″. а) *Пусть функция f вещественного переменного удовлетворяет функциональному неравенству* $|f(x+y)-f(x)-f(y)|<1$. *Докажите, что существует решение g* уравнения Коши $g(x+y) = g(x)+g(y)$ *такое, что* $|f(x)-g(x)|<1$. (*U. Vishne*)

По аналогии возникает задача

б) *Решите функциональное неравенство*:

$$|F(x+y)-(A(x)+B(x)C(y))|<1.$$ (*А. Я. Канель-Белов*)

Функциональные уравнения — распространенная олимпиадная тема, особенно на Международной математической олимпиаде (см. также: 18-я Летняя конференция международного математического Турнира городов, 2006. Задача 3. Функциональные уравнения `https://www.turgor.ru/lktg/2006/3/index.htm`). Удивительно, что тема *функциональных неравенств* на олимпиадах практически не представлена.

В выпуске 4 (с. 217, см. решение: выпуск 7, с. 194–195) опубликована

Задача 4.10. Известно, что ранг коммутатора $[A,B]=AB-BA$ равен единице. Докажите, что матрицы A и B имеют общий собственный вектор. (*Фольклор*)

В выпуске 27 (с. 239) опубликована

Задача 4.10′. *A и B — матрицы порядка n с вещественными коэффициентами, E — единичная матрица. Известно, что* $\mathrm{Rk}([AB]+E)=1$ *Докажите, что*

$$\mathrm{Tr}((AB)^2)-\mathrm{Tr}(A^2B^2)=\binom{n-1}{2}.$$

(*Рустам Турдибаев, В. И. Романовский*)

Вот задачи на схожий сюжет:

Задача 4.10$''$. а) *Пусть A и B — операторы в $\mathbb{R}^n$ такие, что* $[A,B] = \alpha B$, $\alpha \neq 0$. *Докажите, что оператор B* нильпотентен, *т. е.* $B^k = 0$ *при некотором k.*

б) *Докажите, что матричное уравнение $AX - XB = C$ при всех C имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрицы A и B не имеют общего собственного значения.* (*Фольклор*)

В выпуске 5 (с. 217, см. решение: выпуск 10, с. 230–231) опубликована

Задача 5.9. а) В клетках бесконечной клетчатой ленты записаны положительные числа. Известно, что каждое число не меньше среднего арифметического трёх соседей слева и трёх справа. Докажите, что числа равны.

б) На клетчатой плоскости в клетках расставлены положительные числа так, что каждое записанное число равно среднему арифметическому 4 своих соседей. Докажите, что все числа равны.

в) Верно ли аналогичное утверждение для пространственной решетки? (*И. Ф. Шарыгин*)

Решению этой задачи были посвящены статьи П. Шольце[1] «О неотрицательных гармонических функциях на решётке» (Математическое просвещение, сер. 3, вып. 10, М.: МЦНМО, 2006, с. 236–242) и С. Г. Слободника «Дискретные положительные гармонические функции» (Математическое просвещение, сер. 3, вып. 11, М.: МЦНМО, 2007, с. 145–148).

На тот же сюжет читателю предлагается

Задача 5.9$'$. *Функция $f\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ называется* дискретно гармонической, *если значение в любом узле решётки равно среднему арифметическому значений в соседних узлах. Предположим, что известны значения такой функции f во всех ненулевых точках решётки с чётными координатами. Можно ли по этой информации восстановить значение f в начале координат?* (*Л. Радзивиловский*)

В выпуске 8 (с. 246, см. решение: выпуск 9, с. 215–217) опубликована

Задача 8.5. Для иррационального $\alpha > 1$ обозначим

$$N(\alpha) = \{[n\alpha] \mid n \in N\}.$$

[1] Ныне Петер Шольце — лауреат Филдсовской премии 2018 г. В 2005 г. был членом сборной Германии на Международной математической олимпиаде, тогда он решил эту задачу и написал статью для «Математического просвещения».

При каких k найдутся такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, что множества $N(\alpha_1), \ldots, N(\alpha_k)$ задают разбиение натурального ряда?

(*А. А. Заславский, А. В. Спивак*)

Предваряя разговор об обобщении этого сюжета, напомним задачу 4-го Турнира городов (весна 1983 г., 9–10 кл., № 5т).

Задача 8.5′. *Закрашены k вершин правильного n-угольника P. Закраска называется почти равномерной, если для любого натурального m верно следующее условие: если $M1$ — множество m расположенных подряд вершин и $M2$ — другое такое множество, то количество закрашенных вершин в $M1$ отличается от количества закрашенных вершин в $M2$ не больше, чем на 1. Доказать, что для любых натуральных n и k $(k < n)$ почти равномерная закраска существует и что она единственна с точностью до поворотов закрашенного множества.*

(*М. Л. Концевич*)

Совет. Поиграйте с малыми n и k.

В выпуске 26 (с. 269, см. решение: выпуск 27, с. 253–254) опубликована

Задача 11.7′. *Докажите, что*

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}. \qquad \text{(\textit{Фольклор})}$$

Продолжением темы служит

Задача 11.7″. *Докажите, что*

$$p \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (p-kq)^{k-1} (r+kq)^{n-k} = (p+r)^n. \qquad \text{(\textit{Фольклор})}$$

В выпуске 27 (с. 242) опубликована

Задача 13.6′. а) *Пусть A — матрица второго порядка. Тогда*

$$\det(A) = \frac{\mathrm{Tr}^2(A) - \mathrm{Tr}(A^2)}{2}.$$

б) *Пусть A — матрица n-го порядка. Тогда* $\det(A)$ *есть многочлен S_n с рациональными коэффициентами от величин* $\mathrm{Tr}(A^k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

(*Фольклор*)

Продолжением темы служит

Задача 13.6″. а) *Определим функции*

$$t_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Пусть $R\left(t_1^{(n)}, \ldots, t_{n+1}^{(n)}\right) = 0$ *для некоторого многочлена* R. *Докажите, что* R *делится на* S_{n+1}. (*Определение многочлена* S_m *см. выше в п.* б) *задачи* 13.6′.

б) *Определим функции*

$$t_k^{(n,m)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^k - \sum_{j=n+1}^{m+n} x_i^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Докажите, что существует такой многочлен Q_{n+1}, *что если*

$$R\left(t_1^{(n,m)}, \ldots, t_{m+n+1}^{(n,m)}\right) = 0$$

для некоторого многочлена R, *то* R *делится на* Q_{n+1}.

(*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 13 (с. 181) опубликована

Задача 13.12. Докажите, что следующие числа могут начинаться с любой комбинации цифр: а) 2^{n^2}; б) $2^{2^n 3^k}$.

в) Докажите, что множество $A \subset \mathbb{R}$ чисел таких, что последовательность первых цифр c^{2^n}, $c \in A$, периодична, счётно, а множество $B \subset \mathbb{R}$ чисел таких, что последовательность первых цифр c^{10^n}, $c \in B$, периодична, несчётно. (*А. Канель*)

С ней связана

Задача 13.12′. а) *Пусть* $\alpha \notin \mathbb{Q}$. *Докажите, что множество дробных частей* $\{\alpha \cdot n\}$, *где* $n \in \mathbb{N}$, *всюду плотно и равномерно распределено на единичном отрезке.* (*Фольклор*)

б) Лемма Кронекера. *Пусть* α_i, $i = 1, \ldots, k$, *линейно независимы над* $\mathbb{Q}$. *Докажите, что множество векторов из дробных частей* $\{\alpha_1 \cdot n\}$, $\ldots$, $\{\alpha_k \cdot n\}$, *где* $n \in \mathbb{N}$, *всюду плотно и равномерно распределено в единичном кубе.*

Лемма Вейля. *Пусть многочлены* P_i, $i = 1, \ldots, k$, *линейно независимы над* $\mathbb{Q}$ *по модулю многочленов с рациональными коэффициентами и констант. Докажите, что множество векторов из дробных частей* $\{P_1(n)\}, \ldots, \{P_k(n)\}$, *где* $n \in \mathbb{N}$:

в) *всюду плотно*;

г) *равномерно распределено в единичном кубе.*

В выпуске 17 (с. 197) опубликована

Задача 17.7. На каждом ребре правильного многогранника M с единичными рёбрами взяли по точке A_i. Найти объём геометрического места центров масс таких наборов. Рассмотреть все 5 возможностей. (*А. Я. Канель*)

Развитием темы служит

Задача 17.7′ (на исследование). *На каждом ребре правильного многогранника M с единичными рёбрами в n-мерном пространстве взяли по точке A_i. Найдите объём геометрического места центров масс таких наборов. Рассмотрите случаи кубов, октаэдров, тетраэдров, а также три исключительных многогранника в четырёхмерье* (*три правильных многогранника, не аналогичных трёхмерным*).

Рассмотрите случай k-мерных граней. (*А. Я. Канель*)

В выпуске 20 (с. 250–251) опубликована

Задача 20.8. а) Дан полный граф на n вершинах. Двое по очереди красят его рёбра. Первый красит одно ребро красным, второй красит 100 рёбер в синий цвет, и так повторяется, пока все рёбра не будут покрашены. Может ли первый при достаточно больших n добиться появления полного подграфа со 100 вершинами и всеми красными рёбрами? (*А. Я. Канель-Белов*)

б) В красный цвет раскрашены 99 % рёбер полного графа из n вершин. Верно ли, что при достаточно большом n найдётся полный подграф из 1000 вершин с рёбрами одного цвета? (*А. Я. Канель-Белов*)

в) Каждое k-элементное подмножество множества $\{1, \ldots, n\}$ раскрашено в один из s цветов. Докажите, что при достаточно большом n найдётся такое подмножество $U \subset \{1, \ldots, n\}$, что все его k-элементные подмножества — одного и того же цвета, причём если x — минимальный элемент из U, то число элементов в U не меньше $x+2s$. (*Фольклор*)

Развитием темы служит

Задача 20.8′. а) *Рассмотрим полный граф на $2^{\aleph_0}$ вершинах, ребра которого раскрашены в $\aleph_0$ цветов. Верно ли, что найдётся одноцветный треугольник*?

б1) [Для доказавших существование такого треугольника.] *Для какого максимального k можно гарантированно найти одноцветный полный подграф на k вершинах*?

б2) [Для доказавших, что такой треугольник может не найтись.] *Для какой максимальной мощности числа вершин полного графа, раскрашенного в $\aleph_0$ цветов, одноцветный треугольник может не найтись*? (*Л. Радзивиловский*)

В выпуске 24 (с. 175–176) опубликована

Задача 24.2. а) Пусть 0 — притягивающая точка непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ (т. е. $0 < |f'(0)| < 1$). Положим $k = f'(0)$.

Докажите для всех x_0 из некоторой окрестности нуля существование предела
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{k^n} =: g(x_0),$$
непрерывность функции g и тождество $g(k\cdot g^{(-1)}(x)) = f(x)$.

б) Докажите, что если f бесконечно дифференцируема, то и g тоже бесконечно дифференцируема.

в) Докажите тождество
$$\frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{x}}}}{2}\cdots = \frac{4-x^2}{\sqrt{2\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)}}.$$

(*А. Я. Канель-Белов*)

Продолжением темы служит

Задача 24.2″. *Пусть* $f(0)=0$, $f'(0)=k\neq 0$. *Нас будет интересовать, когда функцию комплексного переменного* $f(x)$ *можно сопрячь с функцией* $k\cdot x$ *в окрестности нуля. (Функции* f_1, f_2 сопряжены, *если* $f_1 = G\circ f_2\circ G^{(-1)}$ *для некоторой функции* G.)

а) *Пусть функция* f *аналитична и* $|k|\neq 1$. *Тогда существует аналитическая функция* G *такая, что* $f(x) = G(kG^{(-1)}(x))$ *для всех* x.

б) *Пусть* $k^n = 1$, *где* n *целое. Приведите пример аналитической функции* f, *не сопряжённой с линейной в окрестности нуля.*

в) *Пусть* f *бесконечно дифференцируема,* k *не есть корень из единицы. Тогда* f *сопряжена линейной функции как формальный степенной ряд.*

г) *Покажите, что при некотором* k *этот ряд может расходиться.*

д) *Докажите, что для некоторых* k, *таких что* $|k|=1$, *функция* f *всё же всегда сопряжена линейной, если она аналитична.*

(*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 24 (с. 176, см. решение: выпуск 25, с. 186–187) опубликована

Задача 24.6. Пусть $P_1,\ldots,P_k$ — многочлены от $x_1,\ldots,x_n$, $k<n$, с а) комплексными; б) действительными коэффициентами. Возможно ли равенство многочленов:
$$P_1^2+\ldots+P_k^2 = x_1^2+\ldots+x_n^2?$$
(*Фольклор*)

Продолжением темы служит

Задача 24.6′. *Докажите, что многочлен*
$$P(x,y) = 1 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2$$

принимает только неотрицательные значения, но при этом не является суммой квадратов многочленов. (*Фольклор*)

В выпуске 26 (с. 265, см. решение: выпуск 27, с. 263–265) опубликована

Задача 26.1. Найдите предел

$$\lim_{t \to 1-0} \sqrt{1-t}\left(\sum_{k=0}^{\infty} t^{k^2}\right). \qquad (\textit{Фольклор})$$

В выпуске 28 (с. 246–247) опубликована

Задача 26.1′. а) *Сравнивая сумму* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *с интегралом* $\int_1^k \frac{1}{x}\,dx$, *докажите, что*

$$n! \sim \sqrt{2c \cdot n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

для некоторого c. (*Абрахам де Муавр*)

б) *Оценивая биномиальные коэффициенты* $\binom{n}{k}$ *с помощью пункта* а), *воспользовавшись равенством*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

и интегралом Гаусса

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

покажите, что константа c *из предыдущего пункта равна* π.
(*Джеймс Стирлинг*)

в) *Докажите, что*

$$n! = \sqrt{2\pi \cdot n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \exp\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k n^{-k}\right),$$

при этом все a_k *— рациональные числа.* (*Фольклор*)

Продолжением темы служит

Задача 26.1″. *Найдите*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n} (n - |n-k|) \cdot \sqrt[n]{e^k}}{n^2}. \qquad (\textit{Фольклор})$$

В выпуске 26 (с. 265–266) опубликована

Задача 26.3. Пусть n — натуральное число, p — простое число. Докажите, что число способов представить n в виде суммы нескольких натуральных чисел, идущих в порядке невозрастания и не делящихся на p, равно числу способов представить n в виде суммы натуральных чисел, среди которых нет p одинаковых. (*А. Я. Канель-Белов*)

Продолжением темы служат следующие задачи.

Задача 26.3′. Разбиением *натурального числа называется его представление в виде суммы натуральных слагаемых* (*разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми*). *Число всех разбиений данного числа n обозначается $P(n)$. Назовем длиной разбиения число различных слагаемых в нём. Докажите, что сумма длин всех разбиений числа n равняется $P(1)+P(2)+\ldots+P(n-1)$.* (*Фольклор*)

Задача 26.3″. *Докажите тождество*:

$$(1-x)\cdot(1-x^2)(1-x^3)\ldots=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(x^{(3k^2-k)/2}+x^{(3k^2+k)/2}).$$

(*Фольклор*)

В выпуске 27 (с. 234, см. решение: выпуск 28, с. 261–262) опубликована

Задача 27.3. а) На столе лежит несколько выпуклых фигур. Докажите, что одну из них можно выдвинуть, не трогая остальных. (Здесь и далее будем считать, что фигуру/тело можно *выдвинуть* из системы тел, если можно параллельно перенести данную фигуру/тело на любое расстояние от системы так, чтобы по ходу переноса не были задеты другие фигуры/тела системы.)

б) В пространстве расположено несколько шаров. Докажите, что один из них можно выдвинуть. Аналогичный вопрос для n-мерного пространства. (*А. Я. Канель-Белов*)

Родственная задача 27.3′ опубликована в выпуске 28 (с. 247). Продолжением темы служит

Задача 27.3″. *Можно ли расположить в пространстве между двумя параллельными плоскостями систему выпуклых тел так, чтобы ни одно из них нельзя было выдвинуть*? (*Фольклор*)

В выпуске 28 (с. 234) опубликована

Задача 28.6. Докажите, что радикальный центр трёх полувписанных окружностей треугольника (т. е. окружностей, которые касаются двух сторон треугольника и его описанной окружности) лежит на прямой OI, где O — центр описанной окружности, а I — центр вписанной окружности. (*К. В. Козеренко*)

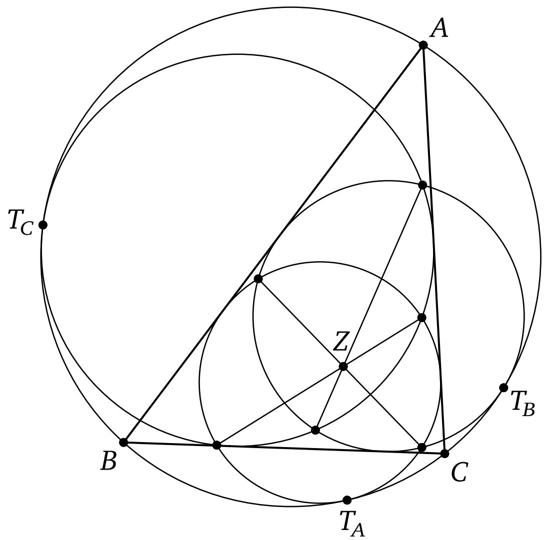

Рис. 1

В развитие сюжета:

Задача 28.6′. *Обозначим через Z радикальный центр трёх полувписанных окружностей ω_A, ω_B и ω_C треугольника ABC* (рис. 1). *Пусть T_A, T_B, T_C — точки касания этих окружностей с описанной окружностью. Рассмотрим следующую инверсию (точнее говоря, антиинверсию) с полюсом в точке Z: точке X ставится в соответствие такая точка X', что $\overrightarrow{XZ}\cdot\overrightarrow{X'Z}=D$, где D — степень точки Z относительно любой из трёх полувписанных окружностей. Положим $T'_A=\mathrm{Inv}_Z(T_A)$, $T'_B=\mathrm{Inv}_Z(T_B)$, $T'_C=\mathrm{Inv}_Z(T_C)$.*

а) *Докажите, что точки B, T'_B, T'_C, C лежат на одной окружности (аналогично для четвёрок точек A, T'_A, T'_B, B и A, T'_A, T'_C, C),* см. рис. 2. *Эти окружности назовём* полуописанными.

б) *Обозначим через Q радикальный центр трёх полуописанных окружностей. Докажите, что точка Q лежит на прямой OI.*

(*К. В. Козеренко*)

В выпуске 28 (с. 234–235) опубликована

Задача 28.7. Докажите равенства

а) $\cos\frac{8\pi}{35}+\cos\frac{12\pi}{35}+\cos\frac{18\pi}{35}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{5}+\sqrt{7}\sin\frac{2\pi}{5}\right)$. (*В. А. Сендеров*)

б) $\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{19}+\cos\frac{7\pi}{19}+\cos\frac{11\pi}{19}}+\sqrt[3]{\cos\frac{3\pi}{19}+\cos\frac{5\pi}{19}+\cos\frac{17\pi}{19}}+$

$+\sqrt[3]{\cos\frac{9\pi}{19}+\cos\frac{13\pi}{19}+\cos\frac{15\pi}{19}}=$

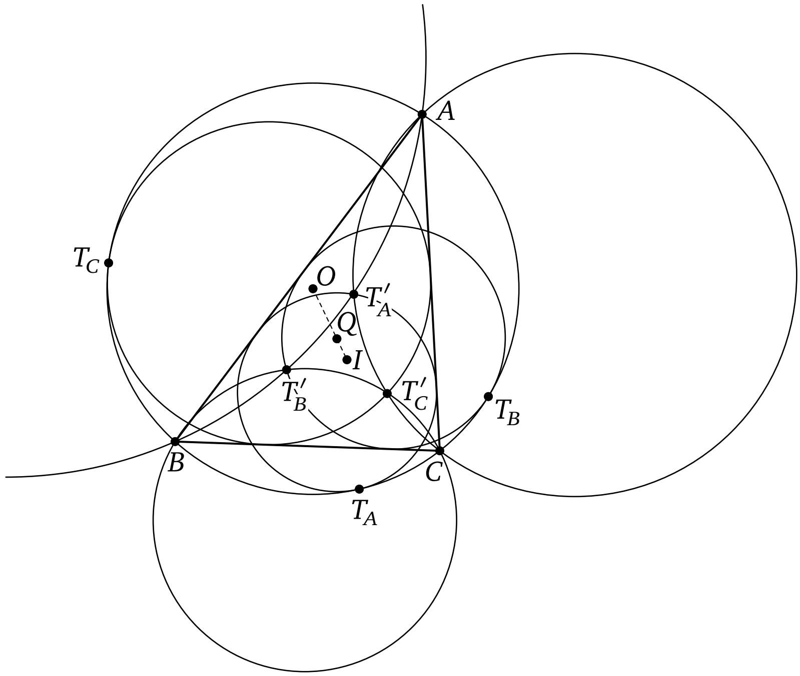

Рис. 2

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{2} - 3\sqrt[3]{7} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{3\sqrt[3]{49} + 18\sqrt[3]{7} - 25} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{3\sqrt[3]{49} + 18\sqrt[3]{7} - 44}}.$$

(*С. В. Маркелов*)

в) $$\sqrt[5]{\frac{\cos(2\pi/11)\cos(4\pi/11)}{\cos^2(16\pi/11)}} + \sqrt[5]{\frac{\cos(4\pi/11)\cos(8\pi/11)}{\cos^2(32\pi/11)}} +$$

$$+ \sqrt[5]{\frac{\cos(8\pi/11)\cos(16\pi/11)}{\cos^2(2\pi/11)}} + \sqrt[5]{\frac{\cos(16\pi/11)\cos(32\pi/11)}{\cos^2(4\pi/11)}} +$$

$$+ \sqrt[5]{\frac{\cos(32\pi/11)\cos(2\pi/11)}{\cos^2(8\pi/11)}} =$$

$$= \sqrt[5]{276 + 170\sqrt[5]{11} - 40\sqrt[5]{11^2} - 80\sqrt[5]{11^3} - 15\sqrt[5]{11^4}}.$$

(*С. В. Маркелов, К. И. Пименов*)

В продолжение сюжета:

Задача 28.7′. *Докажите равенства*:

а) $$\sqrt[5]{\frac{\cos(2\pi/11)\cos(8\pi/11)}{\cos^2(4\pi/11)}} + \sqrt[5]{\frac{\cos(4\pi/11)\cos(16\pi/11)}{\cos^2(8\pi/11)}} +$$

$$+\sqrt[5]{\frac{\cos(8\pi/11)\cos(32\pi/11)}{\cos^2(16\pi/11)}}+\sqrt[5]{\frac{\cos(16\pi/11)\cos(2\pi/11)}{\cos^2(32\pi/11)}}+$$
$$+\sqrt[5]{\frac{\cos(32\pi/11)\cos(4\pi/11)}{\cos^2(2\pi/11)}}=$$
$$=\sqrt[5]{177-40\sqrt[5]{11}-5\sqrt[5]{11^2}+15\sqrt[5]{11^3}-25\sqrt[5]{11^4}};$$

б) $\sqrt[3]{\sin\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\sin\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\sin\frac{8\pi}{7}}=$
$$=\sqrt[3]{\frac{3}{2}\sqrt[6]{7}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{7}}{3}-2+\sqrt[3]{3\sqrt[3]{7}-4}+\sqrt[3]{3\sqrt[3]{7}-5}};$$

в) $\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}-1\right)^{1/3}+\frac{1}{3}6^{2/3}}+\sqrt[3]{-\left(-\sqrt{3}\sin\frac{1\pi}{9}+1\right)^{1/3}+\frac{1}{3}6^{2/3}}+$
$$+\sqrt[3]{-\left(\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{9}+1\right)^{1/3}+\frac{1}{3}6^{2/3}}=$$
$$=\frac{1}{2}(-2073\cdot 3^{1/3}+6912\cdot 3^{2/3}+18\,432)^{1/9};$$

г) $\sqrt[3]{\left(27\left(2\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}-1\right)^{1/3}-18\cdot 3^{1/3}\right)^{1/3}+3^{4/9}}+$
$$+\sqrt[3]{-\left(27\left(2\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{9}+1\right)^{1/3}+18\cdot 3^{1/3}\right)^{1/3}+3^{4/9}}+$$
$$+\sqrt[3]{-\left(-27\left(2\sqrt{3}\sin\frac{1\pi}{9}+1\right)^{1/3}+18\cdot 3^{1/3}\right)^{1/3}+3^{4/9}}=$$
$$=-(-1458\cdot 3^{2/3}+81\cdot 3^{1/3}+2916)^{1/9}.$$

(*С. В. Маркелов*, *К. И. Пименов*)

См. также: *Маркелов С. В.* О тождествах Рамануджана // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 9. М.: МЦНМО, 2005. С. 218–219.

В выпуске 28 (с. 235) опубликована

Задача 28.13. Внутри тетраэдра единичного объёма находится параллелепипед. Каков максимально возможный его объём?

(*А. Я. Канель-Белов*)

Можно поставить обратный вопрос:

Задача 28.13′. *В единичный n-мерный куб вписан тетраэдр* (*не обязательно правильный*). *Каков максимально возможный его объём*?

Решите задачу сначала в случаях $n=3, 7$. (*Л. Радзивиловский*)