# Решения задач из прошлых выпусков

2.4$''$ (выпуск 22, с. 234). Условие. Можно ли раскрасить более половины (вариант — более 99 % вершин какого-нибудь правильного $n$-угольника так, что объединение любых десяти поворотов раскраски не закроет весь $n$-угольник? Постарайтесь получить по возможности лучшие оценки на $n$, а также явные конструкции. (*А. Я. Канель-Белов*)

Ответ. Да, но может потребоваться большое количество вершин.

Первое решение. Возьмём $10\,000^{10}$-угольник и пронумеруем его вершины по кругу в 10 000-ричной системе 10-значными числами.

Пусть множество $S$ состоит из всех таких чисел, в записи которых отсутствуют 0 и 1.

Тогда

$$\frac{|S|}{|V|} = \left(1 - \frac{2}{10\,000}\right)^{10} \geqslant \frac{99}{100},$$

например в силу неравенства Бернулли:

$$\left(1 - \frac{2}{10\,000}\right)^{10} \geqslant 1 - 10 \cdot \frac{2}{10\,000} = 1 - \frac{2}{1000} \geqslant 1 - \frac{1}{100}.$$

Второе решение. Циклический сдвиг чисел из $S$ означает прибавление одного и того же числа ко всем элементам. Если в $k$-м разряде прибавляемого числа стоит $a$, то ни в одном числе из полученного множества в $k$-й позиции не стоит $a + 1 \pmod{10\,000}$. Пусть $S_1$, $S_2$, …, $S_{10}$ — десять циклических сдвигов множества $S$. Найдутся такие цифры $d_1, \ldots, d_{10}$, что ни в каком элементе из $S_i$ не стоит $d_i$ в $i$-й позиции. Поэтому число $\overline{d_1 d_2 \ldots d_{10}}$ не принадлежит $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$.

(*Л. Радзивиловский*)

2.10. Условие. Пусть $K(n)$ — наибольшее число слагаемых в разложении натурального числа $n$ в сумму таких натуральных чисел, что каждое следующее делится на предыдущее и строго его больше. Докажите, что $K(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. (*С. Маркелов*)

Решение. Мы докажем несколько более сильное утверждение:

*Пусть $K(n)$ — наибольшее возможное количество слагаемых в разложении $n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k$, где $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_k$ — натуральные числа и каждое предыдущее делит следующее. Тогда существует такое $C>0$, что $K(n)>C\sqrt{\log n}$ при любом $n$.*

Пусть $q$ — наименьшее натуральное число, на которое $n$ не делится. Разделим с остатком: $n=sq+a$, где $a$ — остаток. Тогда $n-a$ делится на $a$ и на $q$.

Положим $a=a_1$, заменим $n$ на $(n-a)/\mathrm{lcm}(a,q)$ и будем повторять эту процедуру пока возможно. Получим разложение, удовлетворяющее условию задачи.

Как долго это могло продолжаться? Применим следующую теорему о простых числах:

$$\sum \lim_{p,k} \lim_{p\,\text{простое}} \lim_{p^k<m} \log p \sim m,$$

или, в другой формулировке,

$$\log(\mathrm{lcm}(1,2,3,\ldots,m-1)) \sim m.$$

Заметим, что $n$ делится на $\mathrm{lcm}(1,2,\ldots,q-1)$ и, следовательно, больше его, поэтому $\log(aq)<2\log q<2\log\log n$. Разделив $n$ на $aq$, мы уменьшим $\log n$ не более чем на $2\log\log n$. Эта граница уменьшается при уменьшении $n$. Поэтому количество шагов не меньше чем

$$\frac{\log n}{2\log\log n} \gg \sqrt{\log n}.$$

(*Л. Радзивиловский*)

8.11′ (выпуск 23, с. 218). Условие. Предположим, что предел

$$\lim_{r\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$$

существует. Докажите, что тогда ряд $\sum a_n$ сходится, если:

а) $a_n=o(1/n)$;

б) $a_n=O(1/n)$. (*А. Я. Канель-Белов*)

Решение. Для удобства обозначим

$$M_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k.$$

а) Числа $M_n$ ограниченны, поскольку их последовательность сходится. Поэтому $|M_n|\leqslant M$для некоторого $M$. при Для любого $\varepsilon>0$

существует такое $N$, что $|a_n| < \varepsilon/n$ при любом $n > N$. При $\varepsilon = 1/k^2$ получаем

$$|a_n|, |a_{n+1}|, \ldots \leqslant \frac{1}{k^2 n}.$$

При $n \leqslant m \leqslant kn$ получаем

$$|s_m - s_{kn}| \leqslant \frac{1}{k}. \qquad (*)$$

Далее,

$$M_{kn} = \frac{n}{kn} M_n + \frac{1}{kn}(s_{n+1} + \ldots + s_{kn}) = \frac{1}{k} M_n + \frac{n-1}{n}(s_{n+1} + \ldots + s_{kn})$$

Таким образом,

$$\left| M_{kn} - \frac{k-1}{k} \cdot s_{kn} \right| = \left| \frac{n}{kn} M_n + \frac{1}{kn}(s_{n+1} + \ldots + s_{kn}) - \frac{kn-n}{kn} s_{kn} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{k} + \left| \frac{1}{kn} \cdot \sum_{m=n+1}^{kn} (s_m - s_{kn}) \right| \leqslant \frac{M}{k} + \left| \frac{1}{kn} \cdot \frac{1}{k}(k-1)n \right| \leqslant \frac{M+1}{k}.$$

Если $n$ достаточно велико, то $M_{kn}$ достаточно близко к $\alpha$, поэтому если $k$ достаточно велико, то $(k-1)/k \cdot s_{kn}$ достаточно близко к $\alpha$, тогда $s_{kn}$ достаточно близко к $k\alpha/(k-1)$ и, значит, достаточно близко к $\alpha$. Согласно $(*)$ любое $s_m$ при $m > n$ достаточно близко к $\alpha$.

б) Сведём этот случай к предыдущему. Преобразуем последовательность так, что сходимость $s_k$ и $M_k$ сохранится, а последовательность $a_k$ станет $o(n)$ вместо $O(n)$.

Ключевой шаг — добавление нулей. Добавление нуля в позиции $n$ означает, что последовательность $a_n$ заменяется на $\tilde{a}_1 = a_1$, $\tilde{a}_2 = a_2$, …, $\tilde{a}_{n-1} = a_{n-1}$, $\tilde{a}_n = 0$, $\tilde{a}_{n+1} = a_n$, $\tilde{a}_{n+2} = a_{n+1}$, $\tilde{a}_{n+3} = a_{n+2}$, …

На этом шаге сходимость $s_k \to \alpha$ не меняется.

Теперь проверим, как меняется $\lim\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k\right)$ при добавлении нулей в позициях $p, 2p, 3p, 4p, \ldots$ (можно выбрать большое $p$, например 999 999).

Положим $q = p - 1$. При $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k$ с большим $n$ получаем взвешенное среднее величин вида $\frac{1}{m}\sum_{k'=1}^{m} s_{k'}$ (где $m \approx n \cdot (p-1)/p$, вес примерно равен $p-1$, а $k'$ пробегает значения $k$, не превосходящие $n$ и не кратные $p$) и $\frac{1}{\ell}\sum_{k=1}^{\ell} s_{kp}$ (где $\ell \approx n/p$ и вес примерно равен 1). Заметим, что обе усредняемые величины стремятся к $\alpha$. Действительно, из условия это следует для суммы и для второго слагаемого, а следовательно, и для первого.

Вторая величина $\frac{1}{\ell}\sum_{k=1}^{\ell} s_{kp}$ при больших $\ell$ распадается на два слагаемых:

$$\frac{1}{\ell}\sum_{k=1}^{L} s_{kp} + \frac{1}{\ell}\sum_{k=L+1}^{\ell} s_{kp}.$$

Первое слагаемое стремится к нулю, а второе достаточно близко к $\frac{1}{\ell p}\sum_{k=Lp+1}^{\ell p} s_k$, так как при $|kp-n|<p$ разности малы: $|s_{kp}-s_n|<Cp/L$ при $kp, n>L$. При этом $\frac{1}{\ell p}\sum_{k=Lp+1}^{\ell p} s_k$ достаточно близко к $\alpha$.

Добавление нулей в позициях $p$, $2p$, $3p$, $4p$, … будем называть $p$-разбавлением. Мы показали, что после $p$-разбавления обе величины $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k$ и $s_k$ имеют общий предел. После $p$-кратного $p$-разбавления плотность исходной последовательности в новой равна $(1-1/p)^p$.

Положим $p_n = 10^{10\cdot n}$. Выполним $p_1$-разбавление $p_1$ раз, затем выполним $p_2$-разбавление $p_2$ раз и т. д.

Последовательность из $N>p_{k+1}$ начальных членов становится менее плотной примерно в $e^k$ раз. Поэтому граница $|a_n|<C/n$ превращается в $|a_n|<C/(e^k n)$, где $k$ — наибольшее число, для которого $N>p_{k+1}$. При $k\to\lim_{n\to\infty}\infty$ получаем $a_n=o(n)$.

С другой стороны, каждый элемент исходной последовательности сдвигается лишь конечное количество раз, поэтому $\lim s_k$ остаётся прежним. (*Л. Радзивиловский*, *А. Я. Канель-Белов*)

13.8 (поправка в выпуск 24, с. 177). Условие. Непрерывная функция $f$ такова, что

$$\int_0^1 x^k f(x)\,dx = 1 \quad \text{для любого } k\in\{1,\ldots,n-1\}.$$

Докажите, что

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \geqslant n^2.$$

(*SEEMOUS* 2008, *Mircea Dan Rus*)

Первое решение. Первая идея: спроектируем на пространство меньшей размерности. Предположим, что существует многочлен $p(x)$ степени меньше $n$, удовлетворяющий условиям на $f$. Положим $g=f-p$. Тогда

$$\int_0^1 x^k g(x)\,dx = 0 \quad \text{для } k=1,\ldots,n-1$$

и
$$\int\limits_0^1 q(x)g(x)\,dx = 0$$
для любого многочлена $q$ степени меньше $n$. Далее,
$$\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx = \int\limits_0^1 (g(x)+p(x))^2\,dx =$$
$$= \int\limits_0^1 g^2(x)\,dx + 2\int\limits_0^1 g(x)p(x)\,dx + \int\limits_0^1 p^2(x)\,dx \geqslant \int\limits_0^1 p^2(x)\,dx.$$
Значит, если указанный многочлен $p(x)$ существует, то он минимизирует $\int_0^1 f^2(x)\,dx$. Такой многочлен $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ существует и единствен: он является основанием перпендикуляра в пространстве многочленов от $x$ степени ниже $n$, опущенного из 0 на гиперплоскость
$$\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx = 1.$$
При этом
$$\int\limits_0^1 p^2(x)\,dx = \int\limits_0^1 p(x)\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \int\limits_0^1 p(x)x^i\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} a_i. \qquad (**)$$
Таким образом, надо доказать, что $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = n^2$.

Применим следующий приём. Рассмотрим функцию
$$r(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{x+i} - 1.$$
Из условия следует, что она имеет $n$ корней $1, 2, \ldots, n$. Приведём слагаемые к общему знаменателю. Тогда числитель будет многочленом степени не выше $n$:
$$r(x) = \frac{q(x) - x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)}{x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)}.$$
Нетрудно видеть, что $q(x)$ имеет степень $n-1$, а его старший коэффициент равен $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$, что нам и требуется вычислить.

Числитель имеет степень $n$, его старший коэффициент равен $-1$ и мы знаем его корни. Отсюда находим:
$$q(x) = x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n-1) - (x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-n).$$

Осталось вычислить коэффициент при $x^{n-1}$ в обоих произведениях. В итоге получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i = (1+2+\ldots+(n-1)) - (-(1+2+\ldots+n)) = n^2,$$

что и требовалось. (*И. Фещенко*)

Второе решение. Выберем многочлен $p(x)$ как в первом решении. Заметим, что в формуле $(**)$ имеем $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = p(1)$. Зададим следующую последовательность многочленов:

$$p_0(x) = p(x), \quad p_{i+1}(x) = \int\limits_0^x p_i(t)\,dt.$$

Утверждение. $\int\limits_0^1 t^k p_i(t)\,dt = 0$ *при* $0 < i < n-k$.

Доказательство. Пусть $i = 1$, $k < n-1$:

$$1 = \int\limits_0^1 t^{k+1} p_0(t)\,dt = t^{k+1} p_1(t)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 k+1 t^k p_1(t)\,dt,$$

$$t^{k+1} p_1(t)\Big|_0^1 = p_1(1) = \int\limits_0^1 p(t)\,dt = 1, \quad \int\limits_0^1 t^k p_1(t)\,dt = 0.$$

Шаг индукции по $i$: пусть $k < n-i-1$, тогда

$$0 = \int\limits_0^1 t^{k+1} p_i(t)\,dt = t^{k+1} p_{i+1}(t)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 k+1 t^k p_{i+1}(t)\,dt,$$

$$t^{k+1} p_{i+1}(t)\Big|_0^1 = p_{i+1}(1) = \int\limits_0^1 p_i(t)\,dt = 0, \quad \int\limits_0^1 t^k p_{i+1}(t)\,dt = 0,$$

что и требовалось. □

Продолжим решение задачи. По построению $p_i(0) = 0$. По доказанному $p_i(1) = 0$ при $i \leqslant n$. Следовательно, $p_n$ делится на $x^n(x-1)^{n-1}$. При этом $\deg(p_n) < 2n$, так как $\deg(p_0) < n$. Поэтому $p_n = \alpha x^n (x-1)^{n-1}$ для некоторой константы $\alpha$. Вспомним формулу Лейбница:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^k f\right) \times \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k} g\right)$$

(доказывается индукцией по $n$). С её помощью получаем:

$$p_1(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} p_n(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} \left(\alpha x^n (x-1)^{n-1}\right) = \\ = q(x)(x-1) + (n-1)!\alpha x^n$$

для некоторого $q(x)$. Отсюда $1 = p_1(1) = (n-1)! \cdot \alpha$, поэтому

$$p_n(x) = \frac{x^n (x-1)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

После $n$-кратного дифференцирования этой функции единственным ненулевым слагаемым будет

$$n \cdot \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dx}\right) x^n \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} (x-1)^{n-1} = n^2 x^{n-1}.$$

Положив $x = 1$, получаем $p(1) = n^2$, что и требовалось.

(*Л. Радзивиловский*)

Набросок третьего решения. Как и в первом решении, потребуется решить задачу из линейной алгебры. Нужно решить уравнение $Ax = \mathbf{1}$, где $A$ — матрица Гильберта, в которой на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца стоит $1/(i+j-1)$, а $\mathbf{1}$ — единичный вектор. Матрица Гильберта является частным случаем матрицы Коши, в которой на пересечении строки $i$ и столбца $j$ стоит $1/(s_i + t_j)$. Все подматрицы в матрице Гильберта — также матрицы Коши.

Если уметь вычислять определитель матрицы Коши, можно обратить матрицу Гильберта по правилу Лейбница — Крамера.

(*Л. Радзивиловский*)

Четвёртое решение. Скалярное произведение удобнее рассматривать в ортогональном базисе. Для рассматриваемого скалярного произведения такой базис хорошо известен: это *смещённые* (*сдвинутые*) *многочлены Лежандра*

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n ((x^2 - x)^n)$$

(с обычными многочленами Лежандра, ортогональными относительно скалярного произведения $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$, они связаны подстановкой $x \mapsto 2x - 1$).

Выбранный базис не ортонормирован, но ортогонален: $\langle P_n, P_n \rangle = 1/(2n+1)$ и $\langle P_m, P_n \rangle = 0$ при $m \neq n$ (доказывается интегрированием по частям). При этом $P_n(1) = 1$, что доказывается с помощью формулы Лейбница (приведённой во втором решении).

Многочлен $p(x)$ степени меньше $n$, имеющий скалярное произведение 1 с многочленами $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$, характеризуется следующим образом. Для любого многочлена

$$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}$$

степени меньше $n$ имеем

$$\langle p, q \rangle = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} = q(1).$$

Отсюда получаем разложение $p(x)$ по смещённым многочленам Лежандра: $\langle p, P_k \rangle = P_k(1) = 1$. Следовательно,

$$p = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) P_n$$

и

$$\langle p, p \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^2 \langle P_n, P_n \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2.$$

(*Шахар Папини*)

23.10′ (выпуск 24, с. 180). Условие. По рёбрам октаэдра бегают паук и муха. Паук видит муху, находясь с ней на одном ребре. Сможет ли он её поймать, если скорость паука в 2,5 раза больше скорости мухи?[1) ] (*Фольклор*)

Ответ. Да.

Решение. Обозначим вершины октаэдра (рис. 1) через $A, B, C, D, E, F$, где $A$ противоположна $D$, $B$ противоположна $E$, а $C$ противоположна $F$. Пусть паук бегает по пути (назовём его «путём паука»)

$$A-B-C-D-E-F-A-B-C-D-E-F\ldots,$$

пока не увидит муху. С этого момента паук бежит по направлению к мухе, пока не поймает её. Докажем, что рано или поздно паук увидит муху.

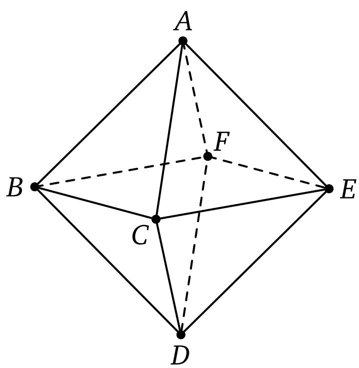

Рис. 1

Пусть некоторая окружность разделена шестью точками $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$, $F'$ (в указанном порядке) на равные части. Точку $A'$ считаем

[1)] Задача содержала также открытый вопрос: при каком наименьшем соотношении скоростей паук может поймать муху? Вопрос остаётся открытым.

*тенью* точки $A$, точку $B'$ — тенью точки $B$ и т. д. Когда точка равномерно движется от некоторой вершины октаэдра $X$ к другой вершине $Y$, её тень равномерно движется от соответствующей тени $X'$ к тени $Y'$ по кратчайшей дуге. Это определение корректно, поскольку противоположные вершины шестиугольника соответствуют противоположным вершинам октаэдра.

Заметим, что если кто-то бежит по «пути паука», то его тень движется вдвое медленнее, чем если бы он бежал по одному из остальных рёбер. Но так как паук бежит в 2,5 раза быстрее мухи, его тень всё равно догонит тень мухи. Если в этот момент муха находится на «пути паука», она уже поймана. Если нет, то муха находится на ребре между какими-то вершинами $X$ и $Y$, а паук бежит из $X$ в $Y$ через вершину $Z$, причём $XYZ$ — грань октаэдра.

Возможны два случая: либо муха ближе к $X$, чем к $Y$, либо нет.

В первом случае паук увидит муху, будучи в вершине $X$, поскольку в это время муха уже будет находиться на ребре $XY$.

Во втором случае паук увидит муху из точки $Y$, поскольку в этот момент муха ещё находится на ребре $XY$. В обоих случаях паук поймает муху. (*Л. Радзивиловский*)

24.11. Условие. б) Известно, что $0<a_0<a<\ldots<a_n$. Докажите, что тригонометрический многочлен $a_0+a_1\cos x+\ldots+a_n\cos nx$ на отрезке $[0, \pi]$ ровно $n$ раз обращается в нуль.

(*В. А. Сендеров, А. Я. Канель-Белов*)

Решение. Нам потребуется

Лемма. *Если* $0<a_0<a_1<\ldots<a_n$, *то все корни многочлена* $p(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n$ *находятся в открытом единичном круге* $\{|z|<1\}$.

Из леммы следует по принципу аргумента, что если $z$ пробегает окружность $|z|=1$, то $p(z)$ совершает ровно $n$ оборотов вокруг нуля, так что $p(z)$ пересекает положительную полуось не меньше $n$ раз и отрицательную полуось также не меньше $n$ раз.

Такими образом, $\mathrm{Re}(p(z))$ имеет не меньше $2n$ нулей на окружности $|z|=1$.

Покажем, что нулей ровно $2n$. Положим $q(x, y)=\mathrm{Re}(p(x+iy))$.

Произведение $q(x, y)\cdot q(x, -y)$ является многочленом степени $2n$, чётным по $y$. Возьмём $y=\sqrt{1-x^2}$. Получаем многочлен

$$Q(x)=q\big(x, \sqrt{1-x^2}\big)\cdot q\big(x, -\sqrt{1-x^2}\big)$$

от $x$ степени $2n$, поскольку корень входит лишь в чётных степенях. Каждый корень появляется в $Q$ дважды, поскольку из $q(x, y) = 0$ следует $q(x, -y) = 0$, а вещественные значения $x = \pm 1$ не являются корнями для $Q$, поскольку $p(\pm 1)$ имеет ненулевую действительную часть. Значит, $Q$ имеет не больше $n$ различных корней, а $\mathrm{Re}(p(z))$ имеет не больше $2n$ нулей на окружности $|z| = 1$.

Итак, $\mathrm{Re}(p(z))$ имеет ровно $2n$ нулей на окружности $|z| = 1$.

Положив $z = e^{ix}$, переформулируем доказанный факт: многочлен из условия задачи имеет ровно $n$ нулей на $[-\pi, \pi]$, причём все они не равны 0 или $\pm\pi$. Поскольку многочлен чётен, ровно половина из этих корней принадлежит интервалу $(0, \pi)$.

Осталось доказать лемму. Приведём два доказательства.

Первое доказательство леммы. Докажем, что

$$a_n z^n + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \neq 0 \quad \text{при } |z| \geqslant 1.$$

В последовательности комплексных чисел $a_n z^n$, ..., $a_2 z^2$, $a_1 z$, $a_0$ аргументы образуют арифметическую прогрессию, а абсолютная величина убывает. Заметим, что если в последовательности $z_n, z_{n-1}, \ldots, z_0$ абсолютная величина постоянна, а аргументы составляют арифметическую прогрессию, то последовательность частичных сумм 0, $z_n$, $z_n + z_{n-1}$, $z_n + z_{n-1} + z_{n-2}$, ... расположена на комплексной плоскости в точках окружности (рис. 2), так как каждые четыре последовательных элемента образуют равнобокую трапецию.

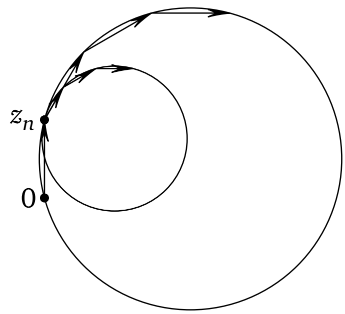


Рис. 2

Одновременно уменьшим абсолютные величины $z_{n-1}, z_{n-2}, \ldots, z_1, z_0$, а именно сохраним аргументы и $|z_n|$ и положим $|z_n| > |z_{n-1}| = \ldots = |z_0|$. Тогда все частичные суммы, кроме 0 и $z_n$, а именно $z_n + z_{n-1}$, $z_n + z_{n-1} + z_{n-2}$, ... гомотетически сжимаются к $z_n$. Теперь они на меньшей окружности, которая касается исходной в точке $z_n$ с коэффициентом гомотетии $|z_{n-1}|/|z_n|$.

Теперь положим $|z_{n-2}| = \ldots = |z_0|$ и заметим, что $z_n + z_{n-1} + z_{n-2}$, ... принадлежат ещё меньшей окружности, и т. д. В итоге сумма оказывается внутри последовательности вложенных окружностей. Исходная окружность проходит через нуль, вторая касается её в точке $z_n \neq 0$, так что сумма заведомо не нуль. Лемма доказана. □

Второе доказательство леммы. Умножим многочлен на $z - 1$:

$$(z-1)(a_n z^n + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0) = a_n z^n - b_{n-1} z^{n-1} - \ldots - b_2 z^2 - b_1 z - b_0.$$

Если $0 < a_0 < a_1 < \ldots < a_n$, то $b_k > 0$ при любом $k$, причём

$$a_n = b_{n-1} + \ldots + b_2 + b_1 + b_0,$$

поскольку 1 является корнем нового многочлена. Если $|z| \geqslant 1$, то

$$|a_n z^n| \geqslant |b_{n-1} z^{n-1}| + \ldots + |b_2 z^2| + |b_1 z| + |b_0| \geqslant |b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_0|.$$

Равенство здесь возможно лишь при $z = 1$. Это корень нового многочлена, но не корень исходного. □ (*Л. Радзивиловский*)

25.6. Условие. а) Пусть $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ — такие вещественные числа, что при любых целых $x$ и $y$ по крайней мере одно из чисел $a_1 x + b_1 y + c_1$, $a_2 x + b_2 y + c_2$ целое и чётное. Докажите, что по крайней мере в одной из троек коэффициентов $a_1, b_1, c_1$ и $a_2, b_2, c_2$ все числа целые. Что получится, если требовать только целочисленность значений одной из линейных форм? (*С. Л. Крупецкий*)

б) Пусть $a_{ij}, c_i$; $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, n$, — такие вещественные числа, что при любых целых $x_j$ по крайней мере одно из чисел вида

$$t_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + c_i$$

число рациональное. Верно ли, что по крайней мере в одном из наборов коэффициентов $a_{i1}, \ldots, a_{in}, c_i$ все числа рациональные?

(*С. Л. Крупецкий, А. Я. Канель-Белов*)

в) Пусть $a_{ij}, c_i$; $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, n$, — такие вещественные числа, что при любых целых $x_j$ по крайней мере одно из чисел вида

$$t_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + c_i$$

число целое, делящееся на $n!$. Верно ли, что по крайней мере в одном из наборов коэффициентов $a_{i1}, \ldots, a_{in}, c_i$ все числа целые?

(*С. Л. Крупецкий, А. Я. Канель-Белов*)

а) Ответ. Целочисленности значений одной из форм недостаточно.

Решение. Рассмотрим множество $M$ из девяти точек решётки, образующих квадрат. Покрасим в красный цвет те точки $(x, y) \in M$, для которых выражение $a_1 x + b_1 y + c_1$ целое и чётное, а в синий цвет те точки, для которых выражение $a_2 x + b_2 y + c_2$ целое и чётное (допускается покраска узла в два цвета).

Из 9 узлов не менее 5 покрашены в один цвет, пусть это красный. По принципу Дирихле, в одном из горизонтальных рядов имеется два красных узла. Их координаты $(x_1, y)$ и $(x_2, y)$, где $|x_1 - x_2|$ равно 1 или 2. Подставляя эти координаты в первое выражение и вычитая, получим, что $a_1(x_1 - x_2)$ целое и чётное, а стало быть, $a_1$ целое. Рассмотрев вертикальные ряды, аналогично находим, что и $b_1$ целое. Но тогда целым будет и $c_1$, что и требовалось доказать.

Если требовать только *целочисленность* значений одной из линейных форм $a_1x + b_1y + c_1$ и $a_2x + b_2y + c_2$, то утверждение задачи перестаёт быть верным. Вот простейший контрпример: положим

$$a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = 1.$$

Если $x$ и $y$ разной чётности, то первое выражение целое. Если одной чётности, то второе. (*А. Я. Канель-Белов*)

Переходя к пп. б), в), напомним, что *подгруппой* в $\mathbb{Z}^n$ является центрально-симметричное подмножество векторов $A$, содержащее нулевой вектор и замкнутое относительно сложения. Оно порождается как абелева группа не более чем $n$ своими элементами. Мощность фактор-группы $\mathbb{Z}^n/A$ называется *индексом* подгруппы $A$ в $\mathbb{Z}^n$. Индекс конечен тогда и только тогда, когда в $A$ можно выбрать $n$ линейно независимых над $\mathbb{Z}$ векторов. В этом случае индекс равен минимальному ненулевому значению модуля определителя матрицы $n \times n$, столбцы которой — векторы из $A$. Если индекс $A$ в $\mathbb{Z}^n$ равен $d$, то $\mathbb{Z}^n$ можно покрыть $d$ непересекающимися сдвигами множества $A$.

Подробнее о подгруппах конечно порождённых абелевых групп можно прочитать, например, в учебнике «Курс алгебры» Э. Б. Винберга.

Лемма 1. *Пусть $M \subset \mathbb{Z}^n$ — подмножество, состоящее из целочисленных точек $n$-мерного пространства. Обозначим $M - M$ множество всех векторов, соединяющих точки $M$, а $\langle M - M\rangle$ — подгруппу в $\mathbb{Z}^n$, порождённую множеством $M - M$ (т. е. множество всех конечных целочисленных линейных комбинаций элементов из $M - M$). Допустим, что $\langle M - M\rangle$ является подгруппой конечного индекса $d$ в $\mathbb{Z}^n$.*

*Пусть $f(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ — линейная функция, т. е.*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + c$$

*для некоторых $a_1, \ldots, a_n, c$. Допустим, что для любой точки $v \in M$ число $f(v)$ является целым. Тогда все коэффициенты $a_i$ и $c$ являются целыми числами, делёнными на $d$.*

Доказательство. Обозначим $g$ функцию $f$ без свободного члена, т. е. $g(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$.

Для любых двух точек $v_1, v_2 \in M$ имеем

$$g(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) \in \mathbb{Z}.$$

Так как $g$ принимает целые значения на элементах, порождающих $\langle M - M\rangle$, то $g$ принимает целые значения на всех векторах из $\langle M - M\rangle$. Факторгруппа $\mathbb{Z}^n/\langle M - M\rangle$ содержит $d$ элементов, и из теоремы Лагранжа о порядке группы следует, что для любого вектора $v \in \mathbb{Z}^n$ выполнено $d \cdot v \in \langle M - M\rangle$, а значит, $dg(v) \in \mathbb{Z}$. Беря $i$-й базисный вектор в качестве $v$, получаем, что $a_i$ — целое число, делённое на $d$. Так как это выполнено для всех $a_i$, утверждение леммы выполнено также и для $c$. □

Пусть $M$ — подмножество в $\mathbb{Z}^n$. *Плотностью* $\rho(M)$ назовём предел

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\text{число элементов из } M \text{ в шаре с центром в нуле и радиусом } R}{\text{число целых точек в шаре с центром в нуле и радиусом } R},$$

если такой предел существует. Соответствующий верхний предел назовём *верхней плотностью* $\bar{\rho}(M)$, а нижний предел *нижней плотностью*.

Лемма 2. *Если для некоторого $k$ пространство $\mathbb{Z}^n$ содержит $k$ непересекающихся параллельных переносов множества $M$, то верхняя плотность множества $M$ не превосходит* $1/k$.

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — векторы сдвигов. Обозначим $D = \max |e_i|$. Обозначим $B_R$ и $B_R^+$ соответственно множества всех целых точек внутри шара радиуса $R$ и внутри шара радиуса $R + D$ (оба шара с центром в нуле). Пусть $M_R = B_R \cap M$. Легко видеть, что сдвиги $M_R + e_i$ не пересекаются и лежат в $B_R^+$, поэтому $|M_R| \leqslant |B_R^+|/k$. Утверждение леммы следует из того, что $\lim_{R\to\infty} |B_R^+|/|B_R| = 1$. □

Следующие леммы доказывается аналогично, и их доказательство мы оставляем читателю как упражнение.

Лемма 3. *Если для некоторого $k$ пространство $\mathbb{Z}^n$ является объединением $k$ параллельных переносов множества $M$, то нижняя плотность $M$ не меньше* $1/k$.

Лемма 4. *Если пространство $\mathbb{Z}^n$ является объединением конечного числа множеств $M_1, \ldots, M_k$, то сумма их верхних плотностей хотя бы* 1.

Лемма 5. *Если два множества $M_1, M_2 \subset \mathbb{Z}^n$ переводятся друг в друга сдвигом, то их верхняя (нижняя) плотность совпадает.*

Из этих лемм следует, что *у любой подгруппы $A$ в $\mathbb{Z}^n$ существует плотность*. При этом $\rho(A) > 0$ в том и только том случае, когда индекс $d$ подгруппы $A$ в $\mathbb{Z}^n$ конечен, и в этом случае $\rho(A) = 1/d$.

(*А. Я. Канель-Белов*)

б) Ответ. Да, верно.

Решение. Покрасим точку $v \in \mathbb{Z}^n$ в цвет $i$, если $t_i$ рациональное. По лемме 4, плотность хотя бы одного из цветов положительна. Не умаляя общности считаем, что это точки первого цвета, и пусть

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + c_1$$

— соответствующая линейная функция. Точки первого цвета не могут лежать в одной гиперплоскости, иначе можно было бы рассмотреть непересекающиеся сдвиги этой гиперплоскости и из леммы 2 получить, что плотность этого цвета равна 0. Значит, найдутся $n+1$ точек первого цвета, являющиеся вершинами симплекса ненулевого объёма. Обозначим это множество точек $M$. Векторы, соединяющие вершину симплекса со всеми остальными, линейно независимы. Поэтому в множестве $M - M$ есть $n$ линейно независимых векторов, и согласно сказанному выше подгруппа $\langle M - M \rangle$ имеет конечный индекс в $\mathbb{Z}^n$. При этом существует натуральное $N$ такое, что $Nf(v) \in \mathbb{Z}$ для любой точки $v \in M$ (например, можно взять НОК знаменателей всех значений $f$ на множестве $M$).

Теперь утверждение задачи следует из леммы 1.

(*И. В. Митрофанов*)

в) Ответ. Да, верно.

Решение. Действуем так же, как в п. (б): покрасим точку $v \in \mathbb{Z}^n$ в цвет $i$, если $t_i$ рациональное. По лемме 4 верхняя плотность одного из цветов не меньше чем $1/k$. Пусть это первый цвет. Обозначим соответствующее множество через $M$, а линейную функцию $t_i$ через $f$. Пусть $d$ — индекс подгруппы $\langle M - M \rangle$ в $\mathbb{Z}^n$. Если $d > k$, то

$$\bar{\rho}(M) \leqslant \rho(\langle M - M \rangle) = \frac{1}{d} < \frac{1}{k}$$

и мы получим противоречие. Значит, $d$ является делителем числа $k!$. Применяя лемму 1 к множеству $M$ и функции $f/k!$, получаем утверждение задачи. (*И. В. Митрофанов*)

## От редакции

В выпуске 25 (с. 167) опубликована задача 25.1, посвящённая индексу Хирша, а в выпуске 26 (с. 284) — её решение. Мы получили письмо одного физика, которое показывает, что затронутый в ней вопрос актуален.

Нам пишут: «Нормальный учёный не может полноценно руководить десятью аспирантами, и аспиранты не публикуют 12 статей в год. В лучшем случае 4–5».

Действительно, если говорится, что за 56 месяцев 10 аспирантов выходят на нобелевский уровень, — преувеличение очевидно. Однако искусственное «накачивание» индекса цитирования весьма распространено (см. библиографию к решению, которая состоит из басни Крылова «Кукушка и петух»).

В письме уточняется также, что индекс 50, согласно Хиршу, — уровень не нобелевского лауреата, а американского академика (но в основном американские академики ближе к 80).