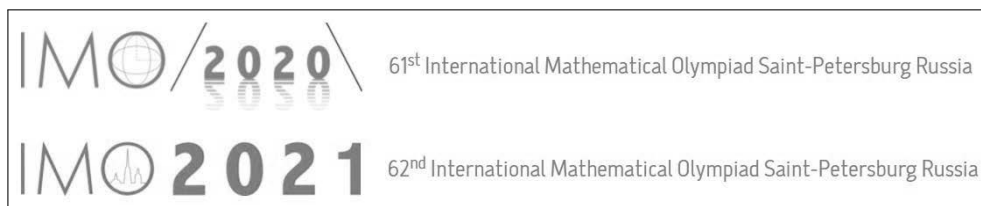


Международные математические олимпиады IMO2020 и IMO2021 (Санкт-Петербург)

Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, Т. Г. Гдалина, П. А. Кожевников,
М. Я. Прагусевич, К. А. Сухов



История и значение IMO

Идея проведения международных конкурсов школьников по решению математических задач давно вызывала интерес. В 1959 году по инициативе Румынского математического общества была организована олимпиада с участием команд семи стран «социалистического лагеря»: Румынии, Болгарии, Венгрии, Германской Демократической Республики, Польши, Советского Союза и Чехословакии. Этой олимпиаде суждено было открыть страницу многолетней истории Международных математических олимпиад IMO (International Mathematical Olympiad). Проведение IMO летом каждого года сразу превратилось в добрую традицию (с 1959 по 2021 год был лишь один 1980 год, в который олимпиада не проводилась). В соответствии со своим замыслом, IMO — не только конкурс по решению задач, но и мероприятие большой научной и социальной значимости, на котором участники имеют возможность познакомиться с историей и культурными достопримечательностями страны-организатора, послушать лекции ведущих математиков мира, общаться со своими коллегами из других стран, участвовать в различной совместной деятельности (спортивные турниры, интеллектуальные конкурсы и т. д.).

IMO непрерывно развивается, количество участвующих стран почти монотонно растёт год от года. В последние годы в IMO принимают

участие практически все страны Европы, большинство стран Азии и Америки, Австралия, Новая Зеландия, а также некоторые страны Африки:

Номер IMO	Год проведения	Количество участвующих стран	Количество участников
1	1959	7	52
6	1964	9	72
11	1969	14	112
16	1974	18	140
21	1979	23	166
26	1985	38	209
31	1990	54	308
36	1995	73	412
41	2000	82	461
46	2005	91	513
51	2010	95	522
56	2015	104	577
61	2020	105	616
62	2021	107	619

Как видим, IMO давно превратилась в масштабный форум. История проведения подтверждает, что IMO неплохо «маркирует» талантливых и способных на выдающиеся достижения в науке людей. Так, из 18 выдающихся математиков, получивших медаль Филдса в XXI веке, десять (включая наших известных соотечественников Григория Перельмана и Станислава Смирнова), будучи школьниками, завоёвывали медали IMO. Славная история IMO в задачах, именах и цифрах собрана на официальном сайте <http://imo-official.com/>.

За последние 10–15 лет появилось много новых интересных международных математических соревнований школьников. Из наиболее представительных олимпиад высокого уровня, которые завоевали вес и признание, выделим ежегодно проводящиеся олимпиады Romanian Master of Mathematics (RM) и European Girls' Mathematical Olympiad (EGMO). Однако именно IMO остаётся «Чемпионатом мира по математике», и её престиж наиболее высок. Во многих странах развилась целая индустрия по отбору и подготовке лучших школьников к IMO.

Конкуренция как на самой олимпиаде, так и за право стать участником IMO необычайно высока, и ни для кого не секрет, что именно медаль IMO считается наилучшим вкладом в портфолио юного математика.

ПРАВИЛА И ТРАДИЦИИ IMO

За годы проведения IMO сложился свод и официальных правил, и неформальных традиций. Скажем о некоторых из них.

Участвовать в IMO разрешено молодым людям моложе 20 лет, которые ещё не начали обучение в университете.

Победители олимпиады определяются по сумме набранных за два тура баллов по следующим принципам: медалями награждаются около половины всех участников олимпиады, и медали среди них распределяются в пропорции 1 : 2 : 3 (соответственно золото, серебро, бронза). Участники, решившие на полный балл (7 баллов) хотя бы одну из задач олимпиады, получают похвальный отзыв (Honorable mention). Команда страны состоит из не более чем шести участников (это правило действует с 1983 года: до 1979 года команды состояли из 8 человек, а в 1981 и 1982 годах — из 4 человек).

В первый день официальной программы IMO для школьников проводится торжественное открытие, на котором происходит представление участников и парад команд. Команды по очереди выходят на сцену с флагами, некоторые сборные одеваются в национальные костюмы и успевают за время прохода по сцене разыграть небольшую сценку. На церемонии закрытия происходит вручение медалей, в котором участвуют высокопоставленные руководители, представители науки и образования.

Руководство IMO осуществляет Консультативный совет (Advisory board, коротко — ИМОВ). В его функции входит решение ключевых вопросов, связанных с организацией и проведением IMO — взаимодействие со спонсорами, утверждение места проведения IMO, внесение изменений в регламент IMO и т. д. В настоящий момент в ИМОВ пять постоянных позиций (сроком на 4 года) занимают: Geoff Smith (Великобритания), Gregor Dolinar (Словения), Yongjin Song (Корея), Назар Агаханов (Россия), Dávid Kunszenti-Kovács (Норвегия).

ОРГАНИЗАЦИЯ IMO2020 и IMO2021

Очередная 61-я IMO должна была состояться в Санкт-Петербурге в июле 2020 года. Официальная заявка России на проведение IMO2020

была подана ещё в 2017 году. Инициатором проведения выступил РГПУ им. А. И. Герцена, и эта инициатива была поддержана в Министерстве образования и науки и в Правительстве России. На закрытии 60-й IMO, проходившей в городе Бат (Великобритания) в июле 2019 года, официальная делегация России выступила с презентацией предстоящей олимпиады (красивый ролик-приглашение в Петербург можно посмотреть на канале YouTube: <https://www.youtube.com/c/IMO2020-2021>) и получила переходящий флаг IMO. Официальными организаторами IMO2020 стали: Министерство просвещения РФ, Правительство Санкт-Петербурга, Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, ГБНОУ «Академия талантов», Президентский физико-математический лицей № 239.

В июле 2019 года подготовка IMO2020 уже шла полным ходом, и до весны 2020 года не было сомнений, что в июле гости со всего мира порадуются и красоте северной столицы, и красоте математики на IMO2020. Но пандемия рушит планы. В апреле 2020 года становится ясно, что очное проведение олимпиады в запланированные сроки невозможно. В надежде на ослабление эпидемии принимается решение о переносе IMO на вторую половину сентября. Как мы знаем, этим надеждам тоже не суждено было сбыться, и новые волны пандемии охватывают на долгое время практически все страны. Олимпиада всё же будет проведена в сентябре 2020 года, но регламент в срочном порядке перестраивается под распределённый дистанционный режим. В разных странах мира организуется более 120 оснащённых видеонаблюдением и специально оборудованных экзаменационных центров, в которых участники в одно и то же время будут выполнять работу под наблюдением представителей оргкомитета IMO. На базе Президентского физматлицей № 239 был развёрнут центр видеонаблюдения, где отслеживалось соблюдение правил проведения состязания. Оргкомитет из РГПУ им. А. И. Герцена во взаимодействии с ИМОВ и IT-командой IMO (вебмастер — Matjaž Željko (Словения)), берёт на себя большую организационную работу, обеспечивая все необходимые коммуникации, информационную и техническую поддержку мероприятия.

Как показало время, IMO2021 тоже пришлось проводить для участников в распределённом режиме — т. е. организация IMO2021 в целом повторяла олимпиаду, прошедшую в 2020 году. Однако важный шаг по возвращению IMO в нормальный режим в 2021 году был сделан — большая часть жюри и ИМОВ работали в Петербурге в очном режиме.

Отметим, что задолго до начала пандемии была одобрена заявка США на проведение IMO2021. Однако уже весной 2020 года американ-

ская сторона объявляет об отказе финансировать проведение IMO2021 из-за форс-мажора. Таким образом, во время проведения IMO2020 место проведения следующей международной олимпиады оставалось под вопросом. Ситуация прояснилась на закрытии IMO2020, когда заместитель Министра просвещения России Виктор Басюк предложил председателю ИМОВ Джеффу Смигу провести олимпиаду 2021 года также в Санкт-Петербурге. Это была официальная заявка, которую поддержал и губернатор Санкт-Петербурга Александр Беглов, который отметил, что для города на Неве будет большой честью принять олимпиаду второй год подряд. И вот в прямом эфире онлайн-закрытия IMO2020 председатель ИМОВ утверждает проведение IMO2021 в Санкт-Петербурге!

Внеконкурсная программа IMO2020 и IMO2021 для участников была насыщенной, хотя вынужденно проводилась дистанционно. Школьники имели возможность виртуально послушать лекции ведущих математиков мира и задать им вопросы. Лекторами выступили: Грант Сандерсон (2020 г., 2021 г.), Станислав Смирнов (2020 г., 2021 г.), Николай Андреев (2020 г., 2021 г.), Ласло Ловас (2021 г.), Андрей Райгородский (2021 г.), Даниил Мусатов (2021 г.), Тимоти Гауэрс (2020 г.), Lisa Sauermann (2020 г., 2021 г.). Также для участников IMO были проведены видеоэкскурсии на официальных языках IMO (английский, испанский, немецкий, русский, французский), на которых в реальном времени можно было прогуляться по Санкт-Петербургу с экскурсоводом. В 2021 году было разработано приложение с экскурсиями на официальных языках олимпиады, где участники могли самостоятельно в любое удобное время погулять по виртуальному Петербургу.

Был создан youtube-канал (<https://www.youtube.com/c/IMO2020-2021>), посвящённый IMO, а также официальный Instagram, в котором были организованы различные игры и конкурсы для участников. Большой интерес был проявлен к шахматам. Так, в турнире IMO Chess cup 2021 принял участие 71 участник из 51 страны, было сыграно 423 партии и сделано 28 933 хода.

На всех онлайн-активностях участникам помогали волонтеры — гиды и переводчики, большинство из которых — студенты Герценовского университета.

Организаторы постарались сделать церемонии открытия и закрытия интересными и насыщенными — онлайн-парад команд и выступления почётных гостей сменялись музыкальными номерами, развлекательными видеосюжетами об IMO и даже лазерным шоу.

Для координаторов и ИМОВ, которые смогли приехать в Санкт-Петербург, была организована экскурсионная программа. А традицион-



ный полуденный выстрел сигнальной пушки Нарышкина бастиона Петропавловской крепости в честь IMO2021 произвёл президент IMOВ Джефф Смит.

На закрытии IMO2020 была показана анимация об интересных фактах из истории IMO, а также анимация, посвящённая развитию математики в России: обыгрывается приглашение Эйлера и других выдающихся учёных из Европы в Санкт-Петербург. Анимации доступны на YouTube канале <https://www.youtube.com/c/IMO2020-2021>.

В завершение рассказа об организации отметим, что в условиях пандемии проведение многих мероприятий выродилось в дистанционную «лайт-версию». Сейчас с уверенностью можно сказать о том, что это не относится к IMO. Усилиями многих людей IMO 2020 и 2021 года сохранили главные черты, присущие международным олимпиадам: это высокая конкурентность, честная борьба с трудными задачами и праздник общения в математической среде.

СОСТАВЛЕНИЕ ВАРИАНТА IMO

Задания IMO — это шесть задач, покрывающие разные разделы и темы математики, а точнее, «доуниверситетской» математики. Регламент проведения олимпиады вначале претерпевал небольшие изменения,



На церемонии закрытия IMO2021: Максим Туревский возвращает флаг IMO председателю ИМОВ Джеффу Смиту, который готов передать его Норвегии — стране-организатору IMO2022

но вот уже на протяжении многих лет IMO проводится в два дня (два тура), в каждом туре школьники решают в течение 4,5 часов по три задачи, которые расположены в порядке возрастающей сложности (по мнению составителей). Правильное и полное решение каждой из задач оценивается в 7 баллов (несмотря на их различную сложность).

Обычно схема отбора шести задач IMO состоит в следующем.

На начальном этапе, почти за 3 месяца до проведения IMO, формируется так называемый *лонг-лист* — список задач на основе предложений из стран-участниц IMO. Каждая страна может предложить до шести задач, и ежегодно лонг лист содержит порядка 170 задач. Далее задачный комитет (Problem Selection Committee), в который входит небольшое число специалистов страны-организатора IMO и приглашённых из других стран экспертов, работает над задачами из лонг-листа и отбирает в шорт-лист около 30 задач разной трудности, разбитых по четырём разделам школьной математики: алгебре и анализу, геометрии, теории чисел, комбинаторике. После того, как шорт-лист сформирован, уже незадолго до проведения IMO, происходит несколько закрытых заседаний руководителей команд, на которых из шорт-ли-

ста отбираются (путём весьма непростой процедуры голосования) те шесть задач, которые и будут составлять вариант олимпиады.

Традиции ИМО накладывают отпечаток на стиль и тематику отбираемых задач. Так, регулярно среди шести задач варианта ИМО мы видим две задачи по классической элементарной геометрии. Алгебра часто бывает представлена неравенствами и функциональными уравнениями. Примерно с частотой раз в 2–3 года в варианте ИМО появляется задача по комбинаторной геометрии. В последние годы среди отобранных задач редко можно увидеть задачи, связанные с матанализом. А задачи по стереометрии вот уже долгие годы практически отсутствуют в варианте ИМО. Негласный «запрет на стереометрию» возник из-за её отсутствия в школьной программе многих стран.

В 2020 и 2021 годах традиционная схема отбора задач претерпела вынужденные изменения, вызванные пандемией. Из-за невозможности проводить очные заседания руководителей команд, в 2020 году вариант ИМО, так же как и шорт-лист, был сформирован задачным комитетом. В 2021 году функции руководителей команд по отбору задач взял на себя ИМОВ, и итоговый вариант был сформирован на совместном заседании задачного комитета и ИМОВ.

В 2020 году в задачный комитет вошли: Илья Богданов (председатель), Сергей Берлов, Александр Гайфуллин, Александр Голованов, Géza Kós (Венгрия), Павел Кожевников, Дмитрий Крачун, Иван Митрофанов, Фёдор Петров, Paul Vaderlind (Швеция).

Коллаж Гёзы Кош с фотографиями членов задачного комитета можно видеть на первой странице шорт-листа ИМО2020 https://drive.google.com/file/d/1kYK9XxlSkevOkmf65tt28wfJ-F9KE0-_/_/view?usp=sharing.

Задачный комитет 2021 года составили: Илья Богданов (председатель), Сергей Берлов, Александр Голованов, Géza Kós (Венгрия), Дмитрий Крачун, Иван Митрофанов, Фёдор Петров, Алексей Устинов, Иван Фролов, Paul Vaderlind (Швеция), Gerhard Woeginger (Австрия).

Условия задач ИМО2020 и ИМО2021 и небольшую статистику, отражающую успешность решения задач участниками, приводим в конце статьи.

ПРОВЕРКА РАБОТ И КООРДИНАЦИЯ

Оценка работ участников ИМО осуществляется на *координации*, в которой принимают участие, с одной стороны, руководители команд, с другой — независимое жюри ИМО. Членов этого независимого жюри по традиции называют *координаторами* (Coordinators). Цель команды координаторов — обеспечить качественную и единообразную провер-

ку работ всех участников олимпиады (независимо от квалификации руководителя, языка, на котором участник пишет работу и т. д.). Работа координатора IMO ответственная и непростая. Жюри IMO формируется из числа математиков, разных стран (хотя обычно большинство представляют страну-организатора), имеющих большой опыт в проверке трудных математических текстов на разных языках. Почти все координаторы — в прошлом победители IMO или других олимпиад высокого уровня. Любое правильное решение задачи IMO, в котором присутствует полное обоснование всех выполненных шагов, оценивается в 7 баллов; при этом длина и эстетика решения не влияет на оценку. Но далеко не всегда решения в работе школьника полны, а зачастую работа содержит лишь идеи и начальные продвижения, которые могут (а иногда не могут) привести к решению. Для единообразного оценивания работ школьников жюри заранее (до чтения работ) проводит тщательный анализ различных подходов к решению задачи и вырабатывает по каждой задаче единую систему критериев (Marking Scheme).

Перечислим математиков, принявших участие в координации на IMO2021. В иностранную часть жюри вошли Evan Chen (США), Zuming Feng (США), Luis Eduardo Garcia Hernandez (Мексика), Maria-Romina Ivan (Великобритания) — старший по проверке задачи 2 IMO2021, Géza Kós (Венгрия) — старший по проверке задачи 1 IMO2021 и задачи 5 IMO2020, Marcin Kuczma (Польша), Charles Leytem (Люксембург) — старший по проверке задачи 1 IMO2020, Sofia Lindqvist (Норвегия), Jana Madjarova (Швеция), Leonardo Ignacio Martinez Sandoval (Мексика), Vlad Matei (Румыния), Jaime Mendizabal (Великобритания), Joseph Myers (Великобритания), Madalina Persu (США), Mark Saul (США), Jorge Tipe (Перу), Gerhard Woeginger (Австрия), Yufei Zhao (США). Алмаз Кунгожин (Казахстан), Медеубек Кунгожин (Казахстан). Остальные члены жюри из России (хотя у некоторых текущее место работы за границей): Марат Абдрахманов, Александр Антропов, Будимир Баев, Егор Бакаев, Дмитрий Белов, Сергей Берлов, Павел Бибииков, Иван Блинец, Илья Богданов — старший по проверке задачи 5 IMO2021 и задачи 6 IMO2020, Михаил Бондарко, Вера Буланкина, Георгий Вепрев, Надежда Власова, Алексей Волостнов, Андрей Гаврилюк, Александр Гайфуллин — старший по проверке задачи 4 IMO2020, Алексей Гарбер, Никита Гладков, Алексей Глазырин, Александр Голованов, Николай Гравин, Александр Гребенников, Михаил Григорьев, Павел Губкин, Максим Дидин, Олег Дмитриев, Мария Дмитриева, Алексей Доледенок, Сергей Дориченко, Михаил Дубашинский, Тимофей Зайцев, Алексей Заславский, Александр Зимин, Михаил Иванов (Висконсин), Михаил

Иванов (СПбГУ), Фёдор Ивлев, Никита Калинин, Алексей Канель-Белов, Дмитрий Карпов, Константин Кноп, Павел Кожевников — старший координатор, Павел Козлов, Константин Кохась, Дмитрий Крачун, Станислав Крымский, Александр Кузнецов — старший по проверке задачи 3 IMO2021, Каринэ Куюмжиян, Сергей Левин, Александр Логунов, Сергей Лучинин, Евгения Малинникова, Дауд Мамий, Александр Матушкин, Андрей Меньщиков, Иван Митрофанов — старший по проверке задачи 3 IMO2020, Евгений Молчанов. Ольга Нечаева, Фёдор Нилов, Владислав Новиков, Алексей Пастор, Владимир Петров, Фёдор Петров — старший по проверке задачи 6 IMO2021 и задачи 2 IMO2020, Олег Подлипский, Александр Полянский, Вадим Ретинский, Иван Решетников, Сергей Рукшин, Егор Рябов, Леонид Самойлов, Алина Сафиуллина, Олег Смирнов, Андрей Солянин, Александра Сониная, Дмитрий Терешин — старший по проверке задачи 4 IMO2021, Сергей Тихомиров, Юлий Тихонов, Изабелла Толокно, Кирилл Тыщук, Константин Тыщук, Алексей Устинов, Борис Френкин, Иван Фролов, Александр Храбров, Дмитрий Храмцов, Антон Целищев, Григорий Челноков, Владимир Шарич, Дмитрий Ширяев, Игорь Шнурников.

Подготовка и выступление команды России

Результаты выступлений команд разных стран на IMO зависят от многих факторов: уровень образования, численность населения, традиции и системность в олимпиадном движении; государственная поддержка и пр. По этим показателям ситуация в нашей стране совсем не плоха, и Россия достаточно уверенно занимает на IMO место в числе стран-лидеров. С 2018 года система подготовки кандидатов в сборную и сама система отбора на IMO претерпела значительные изменения, которые, возможно, также повлияли на улучшение результатов.

Сейчас полный годичный цикл подготовки кандидатов в команду России на IMO состоит из пяти очных сборов (осенние, январские, февральские, майские и летние) и порядка десяти заочных заданий. Наиболее длительные сборы проводятся с середины июня. На летние сборы приглашается команда из шести школьников, отобранная в текущем году, а также около 40 кандидатов из IMO следующего года. Отбор шести участников IMO от России происходит по формальному алгоритму на основе баллов, полученных в пяти испытаниях на протяжении текущего сезона. Эти испытания — олимпиады осенних, январских и майских сборов, а также олимпиада Romanian Master и Всероссийская олимпиада. Руководство процессом подготовки ведёт Тренерский штаб.

Команду России на IMO2020 составили:

Данила Дёмин (Сочи, 11 класс),
Алексей Львов (Новосибирск, 11 класс),
Иван Гайдай-Турлов (Москва, 11 класс),
Антон Садовничий (Москва, 10 класс),
Данил Сибгатуллин (Казань, 10 класс),
Максим Туревский (Санкт-Петербург, 9 класс).

Д. Дёмин и А. Львов завоевали золотые медали, поделив 4-е место в абсолютном рейтинге всех участников. У остальных наших участников серебро. В командном зачёте команда России второе место. Первое место — у Китая. Третье — за США, на 4-м месте Южная Корея.

В команду России на IMO2021 вошли:

Иван Бахарев (Санкт-Петербург, 10 класс),
Айдар Ибрагимов (Казань — Москва, 11 класс),
Матвей Исупов (Ижевск, 11 класс),
Данил Сибгатуллин (Казань — Москва, 11 класс),
Максим Туревский (Санкт-Петербург, 10 класс),
Андрей Шевцов (Москва, 11 класс).

Несмотря на то, что по сравнению с IMO2020 состав участников команд обновился, а вариант из шести задач был другим по стилю и содержанию, изменений в топе командного зачёта почти не произошло. В 2021 году Россия вновь на второй строчке, Китай — на первой, и только команды США и Южной Кореи поменялись строчками в таблице. И всё же 2021 год для России надо признать более успешным, чем 2020-й — отрыв от конкурентов в 2021-м более убедительный, да и достижения в медальном зачёте выше: А. Шевцов получил серебряную медаль, а у остальных наших участников — золото. Отметим отличное выступление М. Туревского — 39 баллов из 42 возможных: это 2-е место в абсолютном рейтинге всех участников. Интересно, что 20 июля, в день написания второго тура, Максиму исполнилось 16 лет. Так Максим отметил свой день рождения, решая задачи IMO. Результат — полный балл за задачи второго дня и нарисованный в работе торт.

Сборными России на IMO2020 и IMO2021 руководил Кирилл Сухов, с 2018 года он также возглавляет тренерский штаб по подготовке команды к IMO. Заместителями руководителя являлись Владимир Брагин и Андрей Кушнир.

Кроме перечисленной команды руководителей, большой вклад в подготовку кандидатов на разных её этапах внесли: Б. Баев, С. Берлов, П. Бибииков, И. Богданов, Н. Власова, Н. Иванина, К. Кноп, П. Кожев-



Команда России только что получила медали ИМО2021. Слева направо: руководитель команды К. Сухов (держит золотую медаль приболевшего Данила Сибгатуллина), А. Ибрагимов, И. Бахарев, М. Исупов, А. Шевцов, М. Туревский

ников, П. Козлов, А. Кушнир, А. Кузнецов, Ф. Петров, М. Пратусевич, А. Сухова и многие другие. С большой благодарностью отметим организации, оказавшие помощь и поддержку в вопросах подготовки команды: Образовательный центр «Сириус» (Сочи), Президентский физико-математический лицей № 239 (Санкт-Петербург), РГПУ им Герцена (Санкт-Петербург), Математический институт РАН (Москва, Санкт-Петербург), ДЦ «Компьютерия» (Тверская область), Центр педагогического мастерства г. Москвы.

Задачи ИМО2020

(решения см. «Квант», 2020, № 10, с. 54–56)

Задача 1. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась точка P , такая что выполняются равенства

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BA : \angle BPC.$$

Докажите, что следующие три прямые пересекаются в одной точке: внутренние биссектрисы углов ADP и PCB и серединный перпендикуляр к отрезку AB .

Задача 2. Даны вещественные числа a, b, c, d , такие что $a > b > c > d > 0$ и $a + b + c + d = 1$. Докажите, что $(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1$.

Задача 3. Имеется $4n$ камушков массами $1, 2, 3, \dots, 4n$. Каждый из камушков покрашен в один из n цветов, причём имеется по 4 камушка каждого цвета. Докажите, что камушки можно разделить на две кучи равного суммарного веса так, чтобы в каждой куче было по два камушка каждого цвета.

Задача 4. Дано целое число $n > 1$. На горном склоне расположено n^2 фуникулёрных станций на разных высотах. Каждая из двух фуникулёрных компаний А и В владеет k подъёмниками. Каждый подъёмник осуществляет регулярный беспересадочный трансфер с одной из станций на другую, более высоко расположенную станцию. k трансферов компании А начинаются на k различных станциях; также они заканчиваются на k различных станциях; при этом трансфер, который начинается выше, и заканчивается выше. Те же условия выполнены для компании В. Будем говорить, что две станции связаны фуникулёрной компанией, если можно добраться из нижней станции в верхнюю, используя один или несколько трансферов данной компании (другие перемещения между станциями запрещены). Найдите наименьшее k , при котором заведомо найдутся две станции, связанные обеими компаниями.

Задача 5. Имеется $n > 1$ карточек, на каждой из которых написано целое положительное число. Оказалось, что для любых двух карточек среднее арифметическое написанных на них чисел равно среднему геометрическому чисел, написанных на карточках некоторого набора, состоящего из одной или более карточек. При каких n из этого следует, что все числа, написанные на карточках, равны?

Задача 6. Докажите, что существует положительная константа c , для которой выполняется следующее утверждение.

Пусть S — множество из $n > 1$ точек плоскости, в котором расстояние между любыми двумя точками не меньше 1. Тогда существует прямая ℓ , разделяющая множество S , такая что расстояние от любой точки S до ℓ не меньше чем $cn - 1/3$.

(Прямая ℓ разделяет множество точек S , если она пересекает некоторый отрезок, концы которого принадлежат S .)

ЗАМЕЧАНИЕ. Более слабые результаты с заменой $cn - 1/3$ на $cn - \alpha$ могут оцениваться в зависимости от значения константы $\alpha > 1/3$.

Страны, предложившие задачи: Польша, Бельгия, Венгрия, Индия, Эстония, Тайвань.

	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6
Количество участников (из 616), решивших задачу (набравших 5–7 баллов)	461	154	47	312	236	6

Задачи IMO2021

(решения см. «Квант», 2021, № 8, с. 47–50)

Задача 1. Дано целое число $n > 100$. Ваня написал числа $n, n + 1, \dots, 2n$ на $n + 1$ карточке, каждое по одному разу. Затем он перемешал колоду из этих карточек и разделил её на две стопки. Докажите, что хотя бы одна из двух стопок содержит две карточки, сумма чисел на которых — точный квадрат.

Задача 2. Докажите, что для любых вещественных чисел x_1, \dots, x_n выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}.$$

Задача 3. Точка D внутри остроугольного треугольника ABC , в котором $AB > AC$, такова, что $\angle DAB = \angle CAD$. Точка E на отрезке AC такова, что $\angle ADE = \angle BCD$; точка F на отрезке AB такова, что $\angle FDA = \angle DBC$; точка X на прямой AC такова, что $CX = BX$. Точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ADC и EXD соответственно. Докажите, что прямые BC, EF и O_1O_2 пересекаются в одной точке.

Задача 4. Дана окружность Γ с центром I . Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что каждый из отрезков AB, BC, CD и DA касается Γ . Пусть Ω — описанная окружность треугольника AIC .

Продолжение отрезка BA за точку A пересекает Ω в точке X , продолжение отрезка BC за точку C пересекает Ω в точке Z . Продолжения отрезков AD и CD за точку D пересекают Ω в точках Y и T соответственно. Докажите, что $AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC$.

Задача 5. Чип и Дейл собрали на зиму 2021 орешек. Чип пронумеровал орешки числами от 1 до 2021 и вырыл 2021 маленькую ямку вокруг их любимого дерева. На следующее утро он обнаружил, что Дейл положил в каждую ямку по орешку, ничуть не беспокоясь о порядке.

Расстроившись, Чип решил переупорядочить орешки посредством следующей последовательности из 2021 действия: во время k -го действия он меняет местами орешки, соседние с орешком под номером k . Докажите, что найдётся такое число k , что во время k -го действия поменялись местами орешки с номерами a и b такими, что $a < k < b$.

Задача 6. Дано целое число $m > 2$. В конечном множестве A , состоящем из (не обязательно положительных) целых чисел, нашлись такие подмножества $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$, что при каждом $k = 1, 2, \dots, m$ сумма элементов множества B_k равна m_k . Докажите, что множество A содержит хотя бы $m/2$ элементов.

Страны, предложившие задачи: Австралия, Канада, Украина, Польша, Испания, Австрия.

	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6
Количество участников (из 619), решивших задачу (набравших 5–7 баллов)	360	19	15	315	184	39

Назар Хангельдыевич Агаханов, МФТИ

nazar_ag@mail.ru

Илья Игоревич Богданов, МФТИ

ilya.i.bogdanov@gmail.com

Татьяна Геннадьевна Гдалина, РГПУ им. А. И. Герцена

tgdalina@mail.ru

Павел Александрович Кожевников, МФТИ

kozhevnikov.pa@phystech.edu

Максим Яковлевич Пратусевич, Президентский физико-математический лицей № 239

max_p2005@mail.ru

Кирилл Андреевич Сухов, Президентский физико-математический лицей № 239

suxob239@gmail.com