

## Критерии гильбертовости банахова пространства, связанные с теорией приближений\*

П. А. Бородин      В. М. Тихомиров

### 0. ВВЕДЕНИЕ

Эллипсоидом называют образ сферы при линейном преобразовании объемлющего пространства. В трехмерном пространстве в подходящей декартовой системе координат эллипсоид имеет уравнение

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2 = 1.$$

Эллипсоиды выделяются из всех выпуклых центрально-симметричных поверхностей многими уникальными свойствами. Приведем некоторые из них.

1. Если все плоские сечения выпуклой центрально-симметричной поверхности суть эллипсы, то поверхность — эллипсоид.
2. Если при освещении выпуклой центрально-симметричной поверхности произвольным параллельным пучком света она отбрасывает на плоскость тень в виде внутренности эллипса, то поверхность — эллипсоид.
3. Если при освещении выпуклой центрально-симметричной поверхности произвольным параллельным пучком света *граница тени* (точки поверхности, в которых лучи света ее касаются) плоская, то поверхность — эллипсоид.
4. Если для всякого плоского сечения выпуклой центрально-симметричной поверхности найдется направление параллельного освещения, при котором граница тени будет совпадать с этим плоским сечением, то поверхность — эллипсоид.

Ниже мы сформулируем эти утверждения более тщательно, а некоторые из них докажем.

Знаменитый немецкий математик Герман Минковский по каждому выпуклому ограниченному центрально-симметричному множеству в конечномерном пространстве построил метрику, с помощью которой можно мерить расстояние между точками, а американец Винер (изобретатель кибернетики) и поляк Банах распространили определение Минковского на бесконечномерные пространства. При этом изначальное множество является единичным шаром, расстояния от точек которого до начала координат не превосходят единицы. Эти пространства с введенной в них метрикой (и еще одним дополнительным свойством полноты)

---

\*Работа обоих авторов выполнена при поддержке РФФИ (первого — проект № 96-01-01366, второго — проект № 96-01-00325 и проект Программы поддержки вед. научных школ № 96-15-96072).

называются банаховыми пространствами. Среди банаховых пространств особую, уникальную роль играют пространства, у которых в конечномерном случае границами единичных шаров являются эллипсоиды. Они называются гильбертовыми пространствами.

Наличие метрики позволяет ставить задачи о приближении элементов множествами. Приближения в гильбертовом пространстве устроены особенно совершенно. В данной работе показывается, что эти совершенные свойства приближений характеризуют гильбертовы пространства.

Эту статью мы постарались сделать «замкнутой в себе». Вначале делается экскурс в теорию банаховых и гильбертовых пространств, а затем доказываются критерии гильбертовости банахова пространства (в простейшем случае — критерии эллипсоидности единичной сферы этого пространства), связанные с теорией приближений. Излагаются все необходимые понятия и факты теории нормированных пространств, теории приближений и геометрии, так что статья доступна студентам-математикам 1 курса и подготовленным школьникам старших классов.

## 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В линейном пространстве  $X$  (пространстве, элементы которого можно складывать и умножать на вещественные числа) часто бывает необходимо ввести метрику, то есть расстояние  $d(x, y)$  между элементами  $x, y \in X$ . При этом естественно потребовать, чтобы это расстояние не менялось при сдвиге элементов на один и тот же вектор:  $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ . Поэтому достаточно определить расстояние от каждого элемента  $x \in X$  до нулевого элемента, или *норму* элемента  $x$ :  $\|x\| = d(x, 0)$ . Эта норма, то есть функция  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbf{R}$ , должна обладать следующими свойствами:

- а)  $\forall x \in X \quad \|x\| \geq 0; \|x\| = 0 \iff x = 0$  (свойство неотрицательности);
- б)  $\forall x \in X \forall \lambda \in \mathbf{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  (свойство однородности);
- в)  $\forall x \in X \forall y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (неравенство треугольника).

Если теперь положить  $d(x, y) := \|x - y\|$ , то метрика  $d$  будет обладать всеми требуемыми свойствами: неотрицательностью ( $d(x, y) \geq 0$  и  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ), симметричностью ( $d(x, y) = d(y, x)$ ) и неравенством треугольника ( $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ ), так что  $(X, d)$ , по определению, — *метрическое* пространство. Кроме того, для введенной таким образом метрики справедливы равенства  $d(x + z, y + z) = d(x, y)$  и  $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y)$ , естественные в линейном пространстве. Пара  $(X, \|\cdot\|)$  называется *нормированным* пространством.

В одном и том же линейном пространстве  $X$  норму можно ввести многими разными способами. Приведем несколько примеров норм в обычном  $n$ -мерном вещественном пространстве  $\mathbf{R}^n$ , состоящем из векторов  $x = (x_1, \dots, x_n)$  с координатами  $x_k \in \mathbf{R}$ :

- I.  $\|x\| = (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{1/2}$ ;
- II.  $\|x\| = \sum_{k=1}^n |x_k|$ ;
- III.  $\|x\| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ .

Можно рассматривать и бесконечномерные линейные пространства. Так, например, в бесконечномерном линейном пространстве  $C[0, 1]$  вещественных функций  $f$ , непрерывных на отрезке  $[0, 1]$ , норму также можно ввести разными способами:

$$\text{IV. } \|f\| = (\int_0^1 f^2(x) dx)^{1/2};$$

$$\text{V. } \|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx;$$

$$\text{VI. } \|f\| = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)| \text{ (равномерная, или чебышевская норма).}$$

Проверка свойств а), б), в) нормы в каждом из примеров I – VI предоставляется читателю.

Единичный шар  $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$  линейного нормированного пространства  $X$  всегда является *выпуклым центрально-симметричным* (относительно нуля) *поглощающим* ( $\forall x \in X \exists \lambda > 0 : \lambda x \in B$ ) *ограниченным* ( $\forall x \in X \exists \lambda > 0 : \lambda x \notin B$ ) телом в  $X$ . (Выпуклость следует из того, что если  $x, y \in B$ , то для  $0 \leq \alpha \leq 1$  имеем

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y\| \stackrel{a)}{\leq} \|\alpha x\| + \|(1 - \alpha)y\| \stackrel{b)}{=} \alpha \|x\| + (1 - \alpha)\|y\| \leq \alpha + (1 - \alpha) = 1,$$

т. е. весь отрезок с концами  $x, y$  целиком лежит в  $B$ ; остальные из перечисленных свойств достаточно очевидны.) Например, в случае нормы из примера I и прямоугольной системы координат в  $X = \mathbf{R}^n$  единичный шар совпадает с обычным шаром с центром в 0 и радиусом 1 (если система координат произвольна, то  $B$  является эллипсоидом). Единичные шары для норм II и III — многогранники; в частном случае  $n = 3$  и прямоугольной системы координат в  $X = \mathbf{R}^3$  норма II дает правильный октаэдр с вершинами на осях координат, а норма III — куб с ребрами длины 2, параллельными координатным осям.

Верно и обратное (об этом говорилось во введении): *каждое выпуклое центрально-симметричное поглощающее ограниченное множество  $B$  в линейном пространстве  $X$  задает в  $X$  норму  $\|\cdot\|_B$ , в которой оно является «почти» единичным шаром:  $\{x : \|x\|_B < 1\} \subseteq B \subseteq \{x : \|x\|_B \leq 1\}$ . Именно, надо положить  $\|x\|_B = \inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in B\}$ . Проверка свойств нормы а), б), в) и приведенного двойного включения предоставляется читателю.*

Линейное нормированное пространство  $(X, \|\cdot\|)$  называется *полным*, если оно содержит все свои предельные точки (т. е. если для всякой фундаментальной последовательности  $\{x_n\} \in X$ , т. е. такой последовательности, что  $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$  при  $n, m \rightarrow \infty$ , существует элемент  $x \in X$ , к которому эта последовательность сходится:  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ ). Конечномерное нормированное пространство всегда полно, а бесконечномерное — необязательно. Например, пространство  $C[0, 1]$  полно относительно нормы VI, но не полно относительно норм IV или V (проверьте!). Любое неполное пространство  $X$  можно «пополнить», добавив предельные точки, или, другими словами, вложить в полное пространство  $\bar{X}$  с сохранением нормы, так что  $X$  плотно в  $\bar{X}$  (см., напр., [1, гл. II, § 3]).

Полные нормированные пространства называются *банаховыми*, в честь выдающегося польского математика С. Банаха. В дальнейшем мы будем рассматривать только банаховы пространства.

Норма в линейном пространстве  $X$  обладает особенно хорошими свойствами, если она порождена скалярным произведением. *Скалярное произведение* — это функция  $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ , удовлетворяющая следующим требованиям:

- i)  $\forall x \in X \quad (x, x) \geq 0$  и  $(x, x) = 0 \iff x = 0$  (свойство неотрицательности);
- ii)  $\forall x, y \in X \quad (x, y) = (y, x)$  (свойство симметричности);
- iii)  $\forall x, y, z \in X \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R} \quad (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, y) + \beta(y, z)$  (свойство билинейности).

Скалярное произведение порождает норму  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  (проверка свойств а), б), в) нормы предоставляются читателю). Так, норма из примера I порождена стандартным скалярным произведением в  $\mathbf{R}^n$ :  $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ , а норма из примера IV — скалярным произведением функций:  $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ . Любое скалярное произведение на плоскости  $\mathbf{R}^2$  задается так: если  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$ , то  $(x, y) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$ , где  $a_{12} = a_{21}$  и (необходимое и достаточное условие неотрицательности)  $a_{11} > 0$ ,  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ . При этом единичный шар, т. е. совокупность тех  $x \in \mathbf{R}^2$ , для которых  $(x, x) \leq 1$ , — внутренность эллипса. Вообще, любое скалярное произведение в  $\mathbf{R}^n$  задается положительно определенной симметрической билинейной формой  $A(x, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_iy_j$  ( $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbf{R}$ ,  $\forall x \neq 0 \quad A(x, x) > 0$ ). Имеются критерии положительной определенности формы  $A$  — например, в терминах главных миноров матрицы  $a_{ij}$  (критерий Сильвестра — см., напр., [2]). Единичный шар в соответствующей норме —  $\{x \in \mathbf{R}^n : \sum a_{ij}x_ix_j \leq 1\}$  — эллипсоид с центром в 0, вместе со своей внутренностью. Обратно, любой эллипсоид с центром в нуле задает норму, порожденную некоторым скалярным произведением.

Банахово пространство, в котором норма задана скалярным произведением, называется *гильбертовым пространством*, в честь великого немецкого математика Д. Гильберта. Норма в гильбертовом пространстве обладает многими замечательными свойствами, которые зачастую являются характеристическими для гильбертовости. Приведем классический пример такого свойства.

**ЛЕММА А** (П. Йордан, Дж. фон Нейманн, [3]). *Банахово пространство  $X$  является гильбертовым тогда и только тогда, когда для любых двух векторов  $x, y \in X$  выполнено равенство параллелограмма:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

(сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Выполнение равенства параллелограмма в гильбертовом пространстве проверяется непосредственно.

Обратно, пусть в банаховом пространстве выполнено равенство параллелограмма. Положим

$$(x, y) := \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

и покажем, что эта функция двух переменных обладает всеми свойствами скалярного произведения. Свойства а) и б) очевидны. Для доказательства с) установим вначале аддитивность:

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z),$$

которая в нашем случае равносильна равенству

$$\|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2 = \|x + z\|^2 - \|x - z\|^2 + \|y + z\|^2 - \|y - z\|^2. \quad (1)$$

Запишем равенства параллелограмма для параллелограммов, натянутых на пары векторов  $x + z$  и  $y$ ,  $y + z$  и  $x$ ,  $x - z$  и  $y$ ,  $y - z$  и  $x$ :

$$\begin{aligned}\|x + z + y\|^2 + \|x + z - y\|^2 &= 2(\|x + z\|^2 + \|y\|^2), \\ \|y + z + x\|^2 + \|y + z - x\|^2 &= 2(\|y + z\|^2 + \|x\|^2), \\ \|x - z + y\|^2 + \|x - z - y\|^2 &= 2(\|x - z\|^2 + \|y\|^2), \\ \|y - z + x\|^2 + \|y - z - x\|^2 &= 2(\|y - z\|^2 + \|x\|^2).\end{aligned}$$

Вычитая из суммы первых двух равенств сумму последних двух равенств, получаем (1).

Оставшееся свойство однородности  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$  получается так: для целых  $\lambda$  оно следует из аддитивности; от целых  $\lambda$  легко перейти к рациональным  $\lambda$ , а от рациональных, по непрерывности, ко всем  $\lambda \in \mathbf{R}$ .

Теперь нетрудно проверить, что введенное таким образом скалярное произведение  $(x, y)$  порождает исходную норму. Лемма А доказана.

**СЛЕДСТВИЕ.** Если каждое двумерное (или каждое  $n$ -мерное,  $n \geq 2$ ) подпространство банахова пространства  $X$  гильбертово, то и само  $X$  гильбертово.

Отсюда вытекает одна из упомянутых во введении характеристик эллипсоида: если любое плоское сечение выпуклой центрально-симметричной поверхности есть эллипс, то сама поверхность — эллипсоид.

С помощью леммы А легко показать, что пространства из примеров II, III, V, VI гильбертовыми не являются.

Гильбертовы пространства изучаются и применяются в самых разных областях математики, и очень часто возникают утверждения, подобные лемме А, — когда какое-либо свойство гильбертова пространства оказывается характеристическим и кладется в основу критерия гильбертовости банахова пространства. Доказательству некоторых из этих критериев — именно, критериев, возникающих из теории приближений, — и посвящена настоящая работа.

Несколько слов об истории. Скалярное произведение (под названием inner product — «внутреннее произведение», это название сохранилось в англоязычной литературе до сих пор) ввел Гамильтон в 1853 г. Гильбертово пространство было определено в начале XX века в работах Гильберта и Шмидта. Последний в 1908 г. ввел обозначение  $\|\cdot\|$  для нормы. Нормированные пространства были определены Банахом и Винером в 1922 г. Гильбертовы пространства выделяются среди банаховых пространств не только богатством свойств, но и «одинаковостью»: любые два гильбертовых пространства одинаковой размерности изометрически изоморфны друг другу (т. е. между ними существует линейное взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее норму). Так, любое  $n$ -мерное вещественное пространство со скалярным произведением  $\sum a_{ij}x_iy_j$  изометрически изоморфно стандартному (евклидову) пространству  $\mathbf{R}^n$  со скалярным произведением  $\sum x_ky_k$  (дело в том, что любую положительно определенную симметрическую билинейную форму можно привести к диагональному виду линейной заменой переменных — см., напр., [2]). Любое бесконечномерное сепарабельное (т. е. обладающее счетным всюду плотным подмножеством) гильбертово пространство — в частности, пополнение пространства  $C[0, 1]$  по норме IV — изометрически изоморфно пространству  $l_2$ , состоящему из векторов  $(x_1, x_2, \dots)$  со

счетным числом координат, удовлетворяющих неравенству  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$  (см., напр., [1, гл. III, § 4]). Скалярное произведение в этом пространстве задается так:  $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ . Такая уникальность гильбертова пространства дает еще один повод к отысканию критериев гильбертовости.

Нельзя не упомянуть еще об одном банаховом пространстве, которое по своей значимости, быть может, сравнимо с гильбертовыми, — именно, о пространстве  $C[0, 1]$  непрерывных функций с равномерной нормой (пример VI). Дело в том, что *любое* сепарабельное банахово пространство изометрически изоморфно некоторому (своему) подпространству пространства  $C[0, 1]$  (теорема Банаха – Мазура). Такая универсальность пространства  $C[0, 1]$  делает его противоположным гильбертову пространству по многим свойствам (см. замечание в конце следующего пункта).

В заключение этой вводной части приведем точную формулировку двух геометрических характеристик эллипсоидов в трехмерном пространстве, о которых говорилось во введении. На них мы будем опираться далее при доказательстве критериев гильбертовости.

**ТЕОРЕМА А.** Пусть в  $\mathbf{R}^3$  задана двумерная выпуклая замкнутая поверхность  $S$ , которая касается каждого описанного вокруг нее цилиндра по множеству, лежащему в двумерной плоскости. Тогда  $S$  — эллипсоид (т. е. задается в некоторой системе координат как множество уровня положительно определенной квадратичной формы).

Эта теорема обычно называется теоремой Бляшке об эллипсоиде. Сам В. Бляшке [4] доказал ее для так называемого овалоида (регулярной аналитической замкнутой выпуклой поверхности с везде отличной от нуля кривизной). В общем случае теорема А доказана А. Д. Александровым [5]. Если интерпретировать множество, по которому поверхность  $S$  пересекается с описанным вокруг нее цилиндром, как границу «тени»  $S$  при освещении параллельным пучком света, направленным по образующей этого цилиндра, то теорема А будет звучать так: *всякая поверхность с плоскими границами теней — эллипсоид* (этой аналогией и объясняется название статьи [5]). Верно и обратное: любой эллипсоид имеет плоские границы теней (докажите!).

**ТЕОРЕМА В.** Пусть в  $\mathbf{R}^3$  задана двумерная выпуклая замкнутая поверхность  $S$ , симметричная относительно начала координат  $O$ . Если для каждой двумерной плоскости  $\Gamma$ , проходящей через  $O$ , существует направление  $\tau(\Gamma)$ , опорное к  $S$  во всех точках пересечения  $S \cap \Gamma$ , то  $S$  — эллипсоид.

Эту теорему обычно называют теоремой Бляшке – Какутани. Сформулировавший ее С. Какутани [6] не дал полного доказательства, лишь указав на возможность сведения этой теоремы к теореме А. Доказательство теоремы В содержится в [7, гл. 5]. Вывод теоремы В из теоремы А осуществлен в [8].

## 2. МЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ И ГИЛЬБЕРТОВОСТЬ

Пусть  $(X, \|\cdot\|)$  — банахово пространство,  $Y$  — некоторое подмножество  $X$ ,  $\rho(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$  — расстояние от элемента  $x \in X$  до множества  $Y$ ,  $P_Y(x) = \{y \in Y : \|x - y\| = \rho(x, Y)\}$  — метрическая проекция  $x$  на  $Y$ , т. е. множество ближайших к  $x$  элементов в  $Y$  (элементов наилучшего приближения). Для

данного  $x$  метрическая проекция  $P_Y(x)$  может не содержать ни одного элемента или содержать более одного элемента, а отображение  $P_Y : x \rightarrow P_Y(x)$ , называемое *оператором метрического проектирования*, вообще говоря, определено не на всем  $X$ , многозначно и даже разрывно.

Если же  $X$  — гильбертово пространство, а  $Y$  — его замкнутое (т.е. полное относительно нормы) линейное подпространство (вообще, везде ниже слово подпространство будет обозначать замкнутое линейное подпространство), то свойства  $P_Y$  предельно совершенны. В этом случае, как мы сейчас покажем, оператор  $P_Y$  *определен на всем  $X$ , однозначен, линеен и имеет норму 1*. Действительно, пусть  $x \in X$ ,  $\rho = \rho(x, Y)$  и последовательность  $\{y_n\}$  такова, что  $\|x - y_n\| \rightarrow \rho$ . По равенству параллелограмма,

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - \|2x - y_n - y_m\|^2 = \\ &= 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4\|x - \frac{1}{2}(y_n + y_m)\|^2 \leq \\ &\leq 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4\rho^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } n, m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

так что последовательность  $y_n$  сходится по норме к некоторому элементу  $y \in Y$  (подпространство  $Y$  замкнуто). Очевидно,  $\|x - y\| = \rho$ , т.е.  $y \in P_Y(x)$ . Кроме того, для любого  $y' \in Y$  и любого числа  $\lambda$  имеем

$$\|x - y + \lambda y'\|^2 = \|x - y\|^2 + |\lambda|^2 \|y'\|^2 + 2\lambda(x - y, y') \geq \rho^2 = \|x - y\|^2.$$

При малых  $\lambda$  это неравенство может выполняться лишь в том случае, если  $(x - y, y') = 0$ . Отсюда  $\|x - y + \lambda y'\| > \|x - y\| = \rho$  при всех  $y' \neq 0$  и  $\lambda \neq 0$ . Итак, метрическая проекция  $P_Y(x)$  состоит ровно из одного элемента  $y$ , причем  $\forall y' \in Y \quad (x - y, y') = 0$ . Положим  $Y^\perp = \{z \in X : \forall y' \in Y \quad (z, y') = 0\}$  — ортогональное дополнение к подпространству  $Y$ , являющееся, очевидно, подпространством. Как мы только что показали,  $X = Y \oplus Y^\perp$ , т.е. любой элемент  $x \in X$  однозначно разлагается в сумму элемента  $y = P_Y(x) \in Y$  и элемента  $x - y \in Y^\perp$ . Линейность отображения  $x \mapsto y = P_Y(x)$  следует из линейности  $Y^\perp$ . Кроме того, оператор  $P_Y$  имеет норму 1:  $\|P_Y\| := \sup_{\|x\|=1} \|P_Y(x)\| = 1$ , поскольку  $1 = \|x\|^2 = \|x - y + y\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y\|^2 + 2(x - y, y) = \|x - y\|^2 + \|y\|^2 \geq \|y\|^2$ , а с другой стороны, если  $x \in Y$ , то  $P_Y(x) = x$  и  $\|P_Y(x)\| = \|x\|$ .

Итак, в данном случае оператор метрического проектирования  $P_Y : X \rightarrow Y$  совпадает с оператором ортогонального проектирования на подпространство  $Y$ , однозначен, линеен и имеет норму 1. (Конечно, в нашем трехмерном пространстве это полностью соответствует нашим представлениям: ортогональная проекция точки  $x$  на плоскость  $Y$  является единственной ближайшей к  $x$  точкой в  $Y$ .) Возникает естественный вопрос: *не является ли какое-нибудь из этих свойств — скажем, линейность оператора  $P_Y$  или существование линейного проектора  $X \rightarrow Y$  нормы 1 — характеристическим для гильбертова пространства? Или вдруг существуют другие банаховы пространства с такими замечательными свойствами?*

Рассмотрим трехмерное гильбертово пространство  $X = \mathbf{R}^3$ , норма в котором задается единичным шаром — некоторым эллипсоидом с центром в начале координат. Для любого одномерного подпространства  $Y \subset X$ , порожденного некоторым вектором  $v$ , оператор метрического проектирования  $P_Y$  линеен. Это означает, что множество  $\text{Ker}(P_Y) = \{q \in X : P_Y(q) = 0\} = Y^\perp$  — двумерное

(линейное) подпространство. В то же время,  $\text{Ker}(P_Y)$  — это в точности те элементы  $q \in X$ , для которых  $\|q + \lambda v\| \geq \|q\|$  при любом числе  $\lambda$ , т. е. те точки  $q$ , в которых параллельные  $Y$  прямые являются опорными к сфере  $\{x \in X : \|x\| = \|q\|\}$ . Вот мы и доказали, что любой цилиндр, описанный вокруг эллипсоида, касается его по плоской кривой. Но по теореме А из п. 1 это есть характеристическое свойство эллипсоида! Таким образом, если в трехмерном банаховом пространстве оператор метрического проектирования на каждое одномерное подпространство линеен, то единичная сфера в этом пространстве удовлетворяет условиям теоремы А, а значит, это пространство гильбертово.

Ниже мы покажем, что существование линейного проектора нормы 1 на любое двумерное подпространство в трехмерном банаховом пространстве  $X$  равносильно тому, что единичная сфера  $S(X)$  удовлетворяет условиям теоремы В — т. е. опять же, равносильно гильбертовости  $X$ .

Какие же аналогичные условия будут критериями гильбертовости в банаховом пространстве произвольной размерности?

Один из авторов этой статьи (В. М. Тихомиров) в начале 60-х годов столкнулся с такой проблемой, поставленной С. М. Никольским на конгрессе в Амстердаме ([17, стр. 263]). Пусть  $X$  — банахово пространство,  $Y$  — подпространство в  $X$ ,  $C$  — подмножество в  $X$ . Определим *уклонение*  $C$  от  $Y$  в  $X$ :  $d(C, Y, X) = \sup_{x \in C} \rho(x, Y)$ . Если  $X$  гильбертово, то  $\rho(x, Y) = \|x - P_Y(x)\|$ , и, следовательно, уклонение  $d(C, Y, X)$  равно верхней грани  $\sup_{x \in C} \|x - P_Y(x)\|$ , где  $P_Y$  — линейный оператор метрического проектирования на  $Y$ . В других пространствах, не гильбертовых, дело обстоит сложнее, так как ближайший к  $x$  элемент пространства  $Y$  находится при помощи, вообще говоря, нелинейной операции. И здесь возникает проблема (пишет С. М. Никольский): нельзя ли все же построить такой линейный оператор  $\Lambda$ , который отображал бы множество  $C$  в подпространство  $Y$  так, чтобы  $d(C, Y, X) = \sup_{x \in C} \|x - \Lambda(x)\|$ ? Конечно, для отдельной пары  $C, Y$  такой оператор может найтись и в негильбертовом пространстве  $X$  — например, в случае, когда оператор  $P_Y$  допускает *линейную выборку* (т. е. существует такой линейный оператор  $P : X \rightarrow Y$ , что  $P(x) \in P_Y(x)$  для любого  $x \in X$ ). Скажем, в пространстве  $C[-1, 1]$  с равномерной нормой (оно, как мы знаем, не гильбертово) существует линейная выборка из оператора метрического проектирования на подпространство всех четных функций из  $C[-1, 1]$ :  $f(x) \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2}$  (проверьте!). Поэтому вопрос С. М. Никольского надо уточнить: *как велика в негильбертовом пространстве  $X$  может быть совокупность пар  $\{C, Y\}$ , для каждой из которых найдется (свой) оператор  $\Lambda$  с указанными свойствами?*

На эти и некоторые другие вопросы частично отвечает

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $X$  — вещественное банахово пространство,  $\dim X \geq 3$ . Следующие условия эквивалентны:

- 0)  $X$  — гильбертово;
- 1) существует такое число  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \leq \dim X - 2$ , что для любого  $n$ -мерного подпространства  $Y_n \subset X$  и любого подмножества  $C \subset X$  найдется линейный оператор  $\Lambda : X \rightarrow Y_n$ , для которого  $\sup_{x \in C} \|x - \Lambda(x)\| = d(C, Y_n, X)$ ;



- 2) существует такое число  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \leq \dim X - 2$ , что для любого  $n$ -мерного подпространства  $Y_n \subset X$  оператор метрического проектирования  $P_{Y_n}$  допускает линейную выборку;
- 3) существует такое число  $k \in \mathbf{N}$ ,  $2 \leq k \leq \dim X - 1$ , что для любого  $k$ -мерного подпространства  $Y_k \subset X$  найдется линейный проектор  $\pi_{Y_k} : X \rightarrow Y_k$  нормы 1.

В этой теореме утверждение о равносильности 0) и 1) частично отвечает на вопрос С. М. Никольского и вытекает, как мы увидим, из эквивалентности 0)  $\iff$  2), доказанной в [8] (соответствующая теорема 3 в [8] формулируется в других терминах). До этого Рудин и Смит [9] нашли необходимое и достаточное условие гильбертовости более сильное, чем 2): они требовали, чтобы сам оператор  $P_{Y_n}$  был однозначным и линейным для каждого  $n$ -мерного подпространства  $Y_n \subset X$ . Утверждение о равносильности 0) и 3) доказано в [8] и обобщает теорему Какутани [6], в которой требовалось существование проектора  $\pi_Y$  нормы 1 на *любое* подпространство  $Y \subset X$ . Для  $k = 2$  эквивалентность 0)  $\iff$  3) была доказана Филлипсом [10]. В работе [8] содержатся также обобщения этих критериев и близкие им утверждения.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Выполнение каждого из условий 1), 2) и 3) в гильбертовом пространстве уже отмечалось выше. Докажем обратные утверждения по следующей схеме: 1)  $\implies$  2)  $\implies$  0) и 3)  $\implies$  0).

1)  $\implies$  2). Возьмем произвольное  $n$ -мерное подпространство  $Y_n \subset X$  и положим  $C = Y_n + B$ , где  $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$  — единичный шар пространства  $X$ . Согласно 1),  $1 = d(C, Y_n, X) = \sup_{x \in C} \|x - \Lambda(x)\|$ , где  $\Lambda : X \rightarrow Y_n$  — некоторый ограниченный линейный оператор. Докажем, что  $\Lambda$  является выборкой из оператора  $P_{Y_n}$  метрического проектирования на подпространство  $Y_n$ . Возьмем любой элемент  $x \in X$ , какой-нибудь его элемент наилучшего приближения  $y \in P_{Y_n}(x)$  и положим  $q = x - y$ . Элемент  $x' = x/\|q\| = q/\|q\| + y/\|q\| = q' + y'$  принадлежит множеству  $C$ , а значит,  $1 \geq \|x' - \Lambda(x')\| = \|q' + (y' - \Lambda(x'))\|$ . Нулевой элемент 0 является в  $Y_n$  элементом наилучшего приближения для  $q$ , а значит, и для  $q'$ , поэтому  $\|q' + (y' - \Lambda(x'))\| \geq \|q' - 0\| = \|q'\| = 1$ . Вместе с предыдущим неравенством это дает  $\|x' - \Lambda(x')\| = 1$ , откуда  $\|x - \Lambda(x)\| = \|q\| \|x' - \Lambda(x')\| = \|q\| = \rho(x, Y_n)$ , т. е.  $\Lambda(x) \in P_{Y_n}(x)$ .

Итак, для любого  $n$ -мерного подпространства  $Y_n \subset X$  мы нашли линейную выборку из оператора  $P_{Y_n}$ , так что  $X$  удовлетворяет условию 2) при данном  $n$ .

2)  $\implies$  0). Можно считать, что  $\dim X = n + 2$ . Действительно, в противном случае возьмем произвольное подпространство  $X_{n+2} \subset X$  размерности  $n+2$ . Оно также будет удовлетворять условию 2). Доказав гильбертовость любого такого  $X_{n+2}$ , мы в силу следствия из леммы А докажем и гильбертовость исходного пространства  $X$ .

Итак, считаем  $\dim X = n + 2$ . Возьмем произвольное подпространство  $Z \subset X$  размерности  $n - 1$ . В факторпространстве  $X/Z$ , состоящем из классов смежности  $[x] = \{x + z : z \in Z\}$ , как обычно (см., напр., [1], гл. III, § 3), введем норму  $\|[x]\| = \inf_{z \in Z} \|x - z\|$  (доказательство того, что это действительно норма, предоставляется читателю). Любое одномерное подпространство в  $X/Z$  есть  $Y/Z$  для некоторого подпространства  $Y \subset X$ ,  $\dim Y = n$ . По условию, существует линейный проектор  $P : X \rightarrow Y$ , сопоставляющий каждому  $x \in X$  какой-то

элемент наилучшего приближения  $P(x) \in P_Y(x)$ . Покажем, что возникающий линейный проектор  $\tilde{P} : X/Z \rightarrow Y/Z$ ,  $\tilde{P}([x]) = [P(x)]$ , обладает тем же свойством в факторпространстве  $X/Z$ . Действительно, для любого  $[y] \in Y/Z$  имеем

$$\begin{aligned} \|[x] - \tilde{P}([x]) - [y]\|_{X/Z} &= \inf_{z \in Z} \|x - P(x) - y - z\| \geq \inf_{z \in Z} \|x - P(x)\| = \|x - P(x)\| = \\ &= \inf_{z \in Z} \|x - P(x) - z\| = \|[x] - [P(x)]\|_{X/Z} = \|[x] - \tilde{P}([x])\|_{X/Z}. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого  $(n-1)$ -мерного подпространства  $Z \subset X$  трехмерное пространство  $\tilde{X} = X/Z$  удовлетворяет 2) с  $n=1$ . Если мы докажем, что каждое такое  $\tilde{X}$  гильбертово, то гильбертовость  $X$  будет вытекать из следующей леммы.

**ЛЕММА В** ([8]). *Пусть  $X$  — конечномерное банахово пространство, и существует такое натуральное число  $d \leq \dim X - 2$ , что для любого  $d$ -мерного подпространства  $Z \subset X$  факторпространство  $X/Z$  гильбертово. Тогда гильбертовым является и само  $X$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО** ЛЕММЫ В. Достаточно показать, что для любых двух элементов  $f, g \in X$  выполняется равенство параллелограмма. Возьмем в  $X$  гиперплоскость  $F$ , опорную к шару  $\{x \in X : \|x\| \leq \|f\|\}$  в точке  $f$ , и аналогичную гиперплоскость  $G$  для элемента  $g$ . В пересечении  $F \cap G$  выберем  $d$ -мерную плоскость, и пусть  $Z$  —  $d$ -мерное подпространство, параллельное этой плоскости. Плоскость  $Z + f$  содержится в плоскости  $F$ , т. е. является опорной к шару  $\{x : \|x\| \leq \|f\|\}$  в точке  $f$ . Это означает, что  $\|f+z\| \geq \|f\|$  для любого  $z \in Z$ . Аналогично,  $\|g+z\| \geq \|g\|$  для любого  $z \in Z$ . Поэтому в факторпространстве  $X/Z$  нормы классов смежности  $[f]$  и  $[g]$  совпадают с нормами исходных элементов  $f$  и  $g$ :  $\|[f]\|_{X/Z} = \|f\|$ ,  $\|[g]\|_{X/Z} = \|g\|$ .

Пространство  $X/Z$  — гильбертово, поэтому

$$\|[f] + [g]\|^2 + \|[f] - [g]\|^2 = 2(\|[f]\|^2 + \|[g]\|^2)$$

или

$$\inf_{z \in Z} \{\|f + g + z\|^2\} + \inf_{z \in Z} \{\|f - g + z\|^2\} = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

Отсюда

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 \geq 2(\|f\|^2 + \|g\|^2) \quad \forall f, g \in X.$$

Запишем последнее неравенство с заменой  $f$  и  $g$ , соответственно на  $(f+g)/2$  и  $(f-g)/2$ :

$$\|f\|^2 + \|g\|^2 \geq \frac{\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2}{2}.$$

Последние два неравенства вместе дают искомое равенство параллелограмма. Лемма В доказана.

Геометрически лемму В можно интерпретировать так: если выпуклая центрально-симметричная поверхность  $S \subset \mathbf{R}^n$  при проектировании вдоль любого  $d$ -мерного подпространства  $L$  ( $d \leq n-2$  — заданное натуральное число) на некоторую  $(n-d)$ -мерную плоскость  $\Pi = \Pi(L)$  дает эллипсоид в  $\Pi$ , то она сама является эллипсоидом (ср. с одной из приведенных во введении характеристик эллипсоидов в  $\mathbf{R}^3$ ).

Вернемся к доказательству теоремы. Осталось доказать гильбертовость трехмерного пространства  $\tilde{X}$ , удовлетворяющего условию 2) с  $n = 1$ . Докажем, что единичная сфера  $S$  этого пространства — эллипсоид. Возьмем произвольное одномерное подпространство  $Y \subset \tilde{X}$  и соответствующий проектор  $P : \tilde{X} \rightarrow Y$ ,  $\forall x \in \tilde{X} \quad P(x) \in PY(x)$ . Ядро этого проектора — некоторое двумерное подпространство  $U = U(Y)$ . Для каждого элемента  $u \in U$  одним из ближайших элементов в  $Y$  является  $0$ , т. е.  $\|u + y\| \geq \|u + 0\| = \|u\|$  при любом  $y \in Y$ . Это означает, что прямая, параллельная  $Y$  и проходящая через  $u$ , является опорной к сфере  $\{x : \|x\| = \|u\|\}$  в точке  $u$ . В частности, пересечение единичной сферы  $S$  и описанного вокруг нее цилиндра  $C(Y)$  с образующей  $Y$  целиком содержит кривую  $S \cap U$ , т. е.  $(S \cap C(Y)) \supseteq (S \cap U)$ . Для окончательного приведения к условиям теоремы А (см. п. 1) надо доказать, что  $(S \cap C(Y)) = (S \cap U)$ .

Пусть, вопреки этому, прямая  $l$  параллельна подпространству  $Y$  и является опорной к сфере  $S$  в точке  $p \notin U$ . Эта прямая пересекается с  $U$  в некоторой точке  $q$ . Как мы знаем,  $l$  является опорной к сфере  $\{x : \|x\| = \|q\|\}$  в точке  $q$ , и в то же время, по предположению, она является опорной к  $S = \{x : \|x\| = 1\}$  в точке  $p$ . Отсюда  $\|q\| = 1$ , отрезок  $pq \subset S$  (единичный шар — выпуклое множество), а прямая  $l$  является опорной к  $S$  во всех точках этого отрезка.

Пусть  $\Pi$  — двумерная плоскость, опорная к  $S$  во всех точках отрезка  $pq$ , а  $\Gamma$  — двумерное подпространство, порожденное векторами  $p$  и  $q$ . Существует одномерное подпространство  $Y' \neq Y$ , параллельное  $\Pi$  и такое, что соответствующее ему подпространство  $U'$  (такое, что  $(S \cap C(Y')) \supseteq (S \cap U')$ ) не совпадает с  $\Gamma$ . Действительно, если  $(S \cap \Gamma) \subseteq (S \cap C(Y'))$  для любого  $Y' \parallel \Pi$ ,  $Y' \neq Y$ , то по непрерывности  $(S \cap \Gamma) \subseteq (S \cap C(Y))$ , что невозможно, так как  $Y \subset \Gamma$  (отрезок  $pq \parallel Y$ ). Таким образом, прямая  $\Pi \cap U'$  и отрезок  $pq$ , лежащие в одной плоскости  $\Pi$ , не параллельны. Как и выше, доказывается, что всякий отрезок, параллельный подпространству  $Y'$  и имеющий один конец на отрезке  $pq$  и другой на прямой  $\Pi \cap U'$ , целиком лежит на сфере  $S$ . Следовательно, пересечение  $\Pi \cap S$  имеет внутренние точки относительно плоскости  $\Pi$ , т. е. представляет собой невырожденную (выпуклую замкнутую) плоскую область  $D$ .

Возьмем вектор  $v$ , не параллельный плоскости  $\Pi$ , порожденное им одномерное подпространство  $Y(v)$  и соответствующее двумерное подпространство  $U(v)$  (для которого  $(S \cap C(Y(v))) \supseteq (S \cap U(v))$ ). Это подпространство  $U(v)$  не может пересекать область  $D$  по внутренности, иначе часть  $D$  (а значит, и сферы  $S$ ) лежит вне цилиндра  $C(Y(v))$ , описанного по кривой  $S \cap U(v)$ . Итак, для любого вектора  $v$ , не параллельного  $\Pi$ , область  $D$  лежит в  $\Pi$  по одну сторону от прямой  $\Pi \cap U(v)$  (при этом, если вектор  $v$ , будучи приставлен к какой-нибудь точке из  $\Pi \cap U(v)$ , «смотрит» в то из двух подпространств, где лежит  $S$ , то его проекция на плоскость  $\Pi$  и область  $D$  лежат в  $\Pi$  по разные стороны от прямой  $\Pi \cap U(v)$ ). По непрерывности мы можем утверждать это и для любого вектора  $v$ , параллельного  $\Pi$ . Но тогда, как уже было дважды показано выше в подобных случаях, область  $D$  вместе с каждой своей точкой  $p$  содержит отрезок  $pq$ , параллельный  $v$  и соединяющий  $p$  с точкой  $q \in \Pi \cap U(v)$  (при этом вектор  $\overline{pq}$  сонаправлен с  $v$ ).

Итак, мы получили невырожденную выпуклую замкнутую область  $D \subset \Pi$ , которая по любому направлению  $v$ , параллельному плоскости  $\Pi$ , сама по себе проектируется на некоторую прямую  $l(v) = \Pi \cap U(v)$ , не пересекающую внутренность  $D$ . Такой области не существует (докажите!).

Итак, наше предположение неверно,  $(S \cap C(Y)) = (S \cap U(Y))$  для любого одномерного подпространства  $Y \subset \tilde{X}$ , и по теореме А из п. 1  $S$  — эллипсоид, а  $\tilde{X}$  — гильбертово пространство.

Импликация 2)  $\implies$  0) полностью доказана.

3)  $\implies$  0). Предположим вначале, что пространство  $X$  удовлетворяет условию 3) с  $k = 2$  (случай Филлипа [10]). Тогда, очевидно, любое трехмерное подпространство  $X_3 \subset X$  также удовлетворяет этому условию. Доказав гильбертовость любого такого  $X_3$ , мы в силу следствия из леммы А докажем и гильбертовость  $X$ .

Итак, надо доказать гильбертовость трехмерного банахова пространства, в котором на каждое двумерное подпространство  $Y$  есть проектор  $\pi_Y$  нормы 1. Существование  $\pi_Y$  равносильно существованию такого вектора  $\tau(Y)$ , определяющего направление проектирования, что  $\|y\| = \|\pi_Y(y + \lambda\tau(Y))\| \leq \|y + \lambda\tau(Y)\|$  для любого  $y \in Y$  и любого числа  $\lambda$ . Это означает, что направление  $\tau(Y)$  является опорным к единичной сфере  $S = S(X_3)$  во всех точках пересечения  $S \cap Y$ . По теореме В из п. 1,  $S$  — эллипсоид, а значит,  $X_3$  — гильбертово пространство.

Пусть теперь исходное пространство  $X$  удовлетворяет условию 3) с  $k \geq 3$ . Возьмем в  $X$  произвольное подпространство  $Y$  размерности  $k$ , а в  $Y$  — произвольное  $(k-1)$ -мерное подпространство  $Y_1$ . Возьмем также какой-нибудь элемент  $c \in \text{Ker}(\pi_Y)$ ,  $c \neq 0$ , и порожденное им подпространство  $\langle c \rangle$ . Подпространство  $Z := \langle c \rangle \oplus Y_1$  имеет в  $X$  размерность  $k$  — ту же, что и  $Y$ . По условию существует проектор  $\pi_Z : X \rightarrow Z$  нормы 1. Рассмотрим действие композиции  $\pi_Y \circ \pi_Z$  на подпространстве  $Y$ . Для всех  $y \in Y$  имеем  $\pi_Z(y) = y_1 + \lambda c$ , где  $y_1 \in Y_1$ , а  $\lambda$  — число. Отсюда  $\pi_Y \circ \pi_Z(y) = \pi_Y(y_1) + \lambda\pi_Y(c) = y_1 + \lambda \cdot 0 = y_1$ , т. е. оператор  $\pi_Y \circ \pi_Z$  переводит  $Y$  в его собственное подпространство  $Y_1$ . Поскольку  $\pi_Y$  и  $\pi_Z$  не увеличивают норму, то их композиция также обладает этим свойством. При этом для любого  $y_1 \in Y_1$  имеем  $\pi_Y \circ \pi_Z(y_1) = y_1$ . Таким образом,  $\pi_Y \circ \pi_Z = \pi_{Y_1} : Y \rightarrow Y_1$  — проектор нормы 1, т. е.  $Y$  как банахово пространство удовлетворяет условию 3) с  $k = 1$ . При этом в рассматриваемом случае  $Y$  не менее чем трехмерно.

Точно так же доказывается, что в любом  $(k-1)$ -мерном подпространстве существует проектор нормы 1 на любое его  $(k-2)$ -мерное подпространство. Продолжая так далее, за конечное число шагов мы покажем, что в любом трехмерном пространстве  $X_3 \subset X$  существует проектор нормы 1 на любое двумерное подпространство, т. е. придем к уже разобранным случаю.

Можно обойтись и без индукции, показав, что для любого  $(k-3)$ -мерного подпространства  $U$  в  $k$ -мерном  $Y$  в факторпространстве  $Y_3 = Y/U$  существует проектор  $\pi_V : Y_3 \rightarrow V$  нормы 1 на любое двумерное подпространство  $V \subset Y_3$ . После этого остается только применить лемму В.

Теорема 1 полностью доказана.

Заметим, что условия на  $n$  и  $k$  в теореме 1 существенны. Если  $\dim X \neq \infty$  и  $n = \dim X - 1$ , то для любого  $n$ -мерного подпространства  $Y \subset X$  оператор метрического проектирования  $P_Y$  допускает линейную выборку (именно, проектирование вдоль любого направления  $v \neq 0$ , для которого  $P_Y(v) \ni 0$ ). В условии 3) равенство  $k = 1$  также не годится: в любом банаховом пространстве  $X$  есть проектор  $\pi_Y$  нормы 1 на любое одномерное подпространство  $Y$  (именно, проектирование идет вдоль гиперплоскости, опорной к единичной сфере  $S$  в точках  $S \cap Y$ ).

Существуют «антиподы» гильбертовых пространств — банаховы пространства, в которых нет собственных подпространств  $Y$  коразмерности  $> 1$  с линейным оператором метрического проектирования  $P_Y : X \rightarrow Y$ . Таким является, например, пространство  $C[0, 1]$  с равномерной нормой [11]. Можно построить и (даже трехмерное) пространство  $X$ , в котором нет собственных подпространств  $Y$  коразмерности  $> 1$  с линейной выборкой из оператора  $P_Y$ . В справедливости этого последнего факта мы предлагаем читателю убедиться самостоятельно.

### 3. ПОПЕРЕЧНИКИ И ГИЛЬБЕРТОВОСТЬ

Пусть  $(X, \|\cdot\|)$  — банахово пространство,  $C$  — подмножество  $X$ ,  $\Phi = \{F\}$  — некоторое семейство непрерывных отображений из  $C$  в  $X$ . Рассмотрим величину

$$p_\Phi(C, X) = \inf_{F \in \Phi} \sup_{x \in C} \|x - F(x)\|. \quad (2)$$

Если  $\Phi$  — совокупность линейных (на линейной оболочке  $C$ ) отображений, образ которых  $n$ -мерен, величина (2) называется *линейным поперечником*  $\lambda_n(C, X)$ ; при том же  $\Phi$  величина  $d^n(C, X) = \frac{1}{2} \inf_{F \in \Phi} \sup_{x \in C} \text{diam}[F^{-1}(F(x))]$  называется *поперечником по Гельфанду* множества  $C$ . Если  $\Phi$  — совокупность всех непрерывных отображений  $F$ , образ каждого из которых принадлежит некоторой  $n$ -мерной плоскости  $\Pi = \Pi_n(F)$ , величину (2) называют *поперечником по Колмогорову*  $d_n(C, X)$ . Если же  $\Phi$  — совокупность всех непрерывных отображений, образ которых —  $n$ -мерный комплекс<sup>1)</sup>, расположенный в  $X$ , то (2) называется *александровским поперечником* (в честь П. С. Александрова) и обозначается  $a_n(C, X)$ .

О свойствах поперечников и их роли в теории приближений можно подробно узнать в гл. 3 обзора [12]. Здесь же мы займемся поперечниками подмножеств гильбертова пространства и теми их свойствами, которые являются характеристическими для гильбертовости.

Для любого отображения  $F$  множества  $C$  в  $n$ -мерную плоскость  $L$  величина  $\sup_{x \in C} \|x - F(x)\|$  не меньше уклонения  $C$  от  $L$ . Поэтому  $\lambda_n(C, X) \geq d_n(C, X) \geq \inf_{\dim L=n} d(C, L, X)$ . Но, как мы знаем, в гильбертовом пространстве  $d(C, L, X) = \sup_{x \in C} \|x - P_L(x)\|$ , где  $P_L$  — линейный оператор ортогонального проектирования на  $L$ , откуда  $\lambda_n(C, X) \leq \inf_{\dim L=n} d(C, L, X)$ . Следовательно,  $\lambda_n(C, X) = d_n(C, X)$  для любого множества  $C$  в гильбертовом пространстве  $X$ .

Далее, для линейного  $P_L$  имеем

$$\frac{1}{2} \sup_{x \in C} \text{diam}[P_L^{-1}(P_L(x))] \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in C} 2 \sup_{z \in C: P_L(z)=P_L(x)} \|z - P_L(x)\| = \sup_{x \in C} \|x - P_L(x)\|,$$

откуда  $d^n(C, X) \leq d_n(C, X)$  (в случае произвольного банахова пространства  $X$  поперечники  $d^n$  и  $d_n$ , вообще говоря, никак не связаны).

Если  $Y$  — некоторое подпространство в гильбертовом пространстве  $X$ , то оператор  $P_Y$  имеет норму 1, откуда  $\sup_{x \in C} \|x - F(x)\| \geq \sup_{x \in C} \|P_Y(x) - P_Y \circ F(x)\|$ . Отсюда для любого поперечника  $p_n = \lambda_n, d_n, d^n, a_n$  следует, во-первых,

<sup>1)</sup>Объединение в некотором числе не более чем  $n$ -мерных симплексов: точек (нульмерные симплексы), отрезков (одномерные симплексы), треугольников (двумерные симплексы), тетраэдров (трехмерные симплексы) и т. д.

что  $p_n(P_Y(C), X) \leq p_n(C, X)$ , а во-вторых, что если  $C \subset Y$ , то  $p_n(C, Y) = p_n(C, X)$ .

При этом для множеств  $C \not\subset Y$  поперечник не обязан строго уменьшаться после ортогонального проектирования на подпространство. Докажем, например, что для единичного шара  $B$  и любого  $(n+1)$ -мерного подпространства  $Y$  выполняется равенство  $a_n(B \cap Y, X) = a_n(B, X) = 1$ . Прежде всего,  $a_n(B \cap Y, Y) = a_n(B \cap Y, X) \leq a_n(B, X) \leq 1$  (последнее неравенство следует из того, что для отображения  $F: B \rightarrow \{0\}$  шара  $B$  в нульмерный комплекс  $\{0\}$  имеем  $\sup_{x \in B} \|x - F(x)\| = 1$ ). Осталось доказать равенство  $a_n(B \cap Y, Y) = 1$ . Следуя М. И. Стесину ([13, теорема 1.1.7]), предположим противное: существует такое непрерывное отображение  $F$  шара  $B_Y = B \cap Y$  в  $n$ -мерный комплекс  $K_n \subset Y$ , что  $\|x - F(x)\| \leq 1 - \delta$ ,  $\delta > 0$ , для любого  $x \in B_Y$ . Возьмем произвольный элемент  $y \in Y$ ,  $\|y\| \leq \delta/2$ , и покажем, что  $y \in F(B_Y)$ . Если  $y \notin F(B_Y)$ , то  $G(x) := \frac{y - F(x)}{\|y - F(x)\|}$  — непрерывное отображение шара  $B_Y$  в себя, точнее, в сферу  $S_Y = \{y : \|y\| = 1\}$ . По теореме Брауэра о неподвижной точке у отображения  $G$  существует неподвижная точка  $x_0: G(x_0) = x_0$ ,  $\|x_0\| = 1$ . Отсюда  $F(x_0) = y - \|y - F(x_0)\|x_0$ , так что

$$\begin{aligned} \|x_0 - F(x_0)\| &= \|x_0(1 + \|y - F(x_0)\|) - y\| \geq \|x_0\|(1 + \|y - F(x_0)\|) - \|y\| \geq \\ &\geq \|x_0\| - \delta/2 > 1 - \delta, \end{aligned}$$

что противоречит предположению. Поэтому образ  $F(B_Y)$  содержит  $(\frac{\delta}{2})$ -окрестность нуля и не может быть  $n$ -мерным комплексом (напомним, наше пространство  $Y$  имеет размерность  $n+1$ ), так что действительно  $a_n(B_Y, Y) = 1$ . Заметим, что это рассуждение Стесина годится для любого  $(n+1)$ -мерного банахова пространства.

Если  $X$  — произвольное банахово пространство с  $\dim X \geq n+1$ , то, вообще говоря,  $a_n(B \cap Y, X) \leq 1$ . В то же время для колмогоровских поперечников всегда  $d_n(B \cap Y, X) = 1$ .

Как показывает следующая теорема, выполнение любого из выявленных нами (не)равенств при каком-то фиксированном  $n$  является характеристическим свойством гильбертовых пространств.

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $X$  — вещественное банахово пространство,  $\dim X \geq 3$ . Следующие условия эквивалентны:

- 0)  $X$  — гильбертово;
- 1) существует такое число  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \leq \dim X - 2$ , что для любого множества  $C \subset X$  справедливо равенство  $d_n(C, X) = \lambda_n(C, X)$ ;
- 2) существует такое число  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \leq \dim X - 2$ , что для любого множества  $C \subset X$  справедливо неравенство  $d^n(C, X) \leq d_n(C, X)$ ;
- 3) существует такое число  $n \in \mathbf{Z}_+$ ,  $n \leq \dim X - 3$ , что для любого  $(n+2)$ -мерного подпространства  $Y \subset X$  и любого множества  $C \subset Y$  справедливо равенство  $d_n(C, Y) = d_n(C, X)$ ;
- 4) существует такое число  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \leq \dim X - 2$ , что для любого  $(n+1)$ -мерного подпространства  $Y \subset X$  справедливо равенство  $a_n(B \cap Y, X) = 1$ .

В этой теореме утверждение о равносильности 0) и 3) доказано в [14]. Статья одного из авторов (В. М. Тихомиров), в которой были сформулированы эквивалентности  $0) \iff 1) \iff 2)$ , осталась неопубликованной. Равносильность условий 0) и 4) доказана М. И. Стесиным [13].

**Доказательство.** Выполнение каждого из условий 1), 2), 3) и 4) в гильбертовом пространстве уже отмечалось выше. Докажем обратные утверждения.

1)  $\implies$  0). Пусть  $Y_n$  — произвольное  $n$ -мерное подпространство в  $X$ . Положим  $C = Y_n + B = \{x \in X : \rho(x, Y_n) \leq 1\}$ . Очевидно,  $d_n(C, X) = d(C, Y_n, X) = 1$ . Отсюда  $\lambda_n(C, X) = 1$ , и подпространство  $Y_n$  является экстремальным также и для этого поперечника (если  $\pi_k$  — линейные проекторы множества  $C$  на  $n$ -мерные плоскости  $Y_{n_k}$  и  $\sup_{x \in C} \|x - \pi_k(x)\| \rightarrow 1$  при  $k \rightarrow \infty$ , то все  $Y_{n_k} \parallel Y_n$ ,  $d(Y_{n_k}, Y_n, X) \rightarrow 1$ , а  $\pi_k(x) \rightarrow P(x)$ , где  $P : C \rightarrow Y_n$  — линейный проектор,  $\sup_{x \in C} \|x - P(x)\| = 1$ ). Итак, существует линейный проектор  $P : X \rightarrow Y_n$  с условием  $\forall x \in C \quad \|x - P(x)\| \leq 1$ . Рассуждая точно так же, как при доказательстве импликации 1)  $\implies$  2) в теореме 1, доказываем, что  $P$  является линейной выборкой из оператора метрического проектирования  $P_{Y_n}$ . По теореме 1  $X$  — гильбертово.

2)  $\implies$  0). Возьмем произвольное  $(n+2)$ -мерное подпространство  $X_{n+2} \subset X$ , а в нем — произвольное  $n$ -мерное подпространство  $Y_n$ . Положим опять  $C = Y_n + B$ . Имеем  $1 = d^n(B, X) \leq d^n(C, X) \leq d_n(C, X) = 1$ , так что  $d^n(C, X) = 1$ . Пусть  $\rho_k = \frac{1}{2} \sup_{x \in C} \text{diam}[F_k^{-1}(F_k(x))]$   $\rightarrow 1$ , где  $F_k : X \rightarrow Y_n^{(k)}$  — линейные проекторы на некоторые  $n$ -мерные подпространства  $Y_n^{(k)}$  (при определении поперечника по Гельфанду можно ограничиться отображениями только на  $n$ -мерные подпространства). Для любого элемента  $q \in \text{Ker}(F_k) \cap C$  весь отрезок  $[-q, q] \subset (\text{Ker}(F_k) \cap C)$ , поэтому  $\frac{1}{2} \text{diam}[-q, q] \leq \rho_k$ , т. е.  $\|q\| \leq \rho_k$ . Ядра  $\text{Ker}(F_k)$  трансверсальны  $Y_n$ , поэтому в  $X_{n+2}$  можно рассмотреть линейные проекторы  $\pi_k : X_{n+2} \rightarrow Y_n$  вдоль двумерных подпространств  $X_{n+2} \cap \text{Ker}(F_k)$ . Для любого элемента  $x \in X_{n+2}$ ,  $x = y + q$ ,  $y \in Y_n$ ,  $q \in \text{Ker}(F_k)$  имеем

$$\|\pi_k(x) - x\| = \|q\| \leq \rho(q, Y_n) \left\| \frac{q}{\rho(q, Y_n)} \right\| \leq \rho(q, Y_n) \rho_k = \rho(x, Y_n) \rho_k \rightarrow \rho(x, Y_n).$$

Далее, в  $X_{n+2}$  из последовательности  $\pi_k$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность, и для предельного проектора  $\pi : X_{n+2} \rightarrow Y_n$  будет  $\|\pi(x) - x\| \leq \rho(x, Y_n)$ , так что  $\pi$  — линейная выборка из оператора метрического проектирования  $P_{Y_n} : X_{n+2} \rightarrow Y_n$ . По теореме 1  $X_{n+2}$  — гильбертово, а значит,  $X$  тоже гильбертово.

В доказательстве оставшихся утверждений теоремы 2 существенную роль будет играть один результат А. Л. Гаркави. Прежде чем формулировать его, напомним, что нулевой колмогоровский поперечник  $d_0(C, X)$  называется также *чебышевским радиусом* множества  $C$  (infimum радиусов шаров, содержащих  $C$ ), а точка  $t = t(C)$ , для которой  $d_0(C, X) = \sup_{x \in C} \|x - t\|$ , (если она существует) — *чебышевским центром* множества  $C$ .

**ЛЕММА С** (А. Л. ГАРКАВИ, [15]). *Вещественное банахово пространство  $X$ ,  $\dim X \geq 3$ , является гильбертовым тогда и только тогда, когда для*

любых трех точек некоторый их чебышевский центр принадлежит их линейной оболочке.

Как видим, здесь критерием гильбертовости выступает ослабленное условие 3) при  $n = 0$  из теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ С. Необходимость уже отмечалась. Докажем достаточность.

Возьмем произвольное трехмерное подпространство  $X_3 \subset X$ , двумерное подпространство  $Y_2 \subset X_3$  и точку  $x \in X_3 \setminus Y_2$ . Обозначим  $S_r = \{y \in Y_2 : \|x - y\| = r\}$ . Если  $y_1, y_2, y_3 \in S_r$ , то шары  $B(y_j, r) = \{z \in X_3 : \|z - y_j\| \leq r\}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , имеют общую точку в плоскости  $Y_2$  (иначе никакой чебышевский центр трех точек  $\{y_j\}_{j=1}^3$  не лежит в  $Y_2$ ). Отсюда по теореме Хелли ([16, гл. I, § 7]) существует общая точка  $z_r \in Y_2$ , принадлежащая всем шарам  $B(y, r)$  при  $y \in S_r$ .

Докажем теперь, что все шары вида  $B(y, \|x - y\|)$ ,  $y \in Y_2$ , имеют общую точку. Достаточно доказать это для любых трех шаров  $B(y_j, \|x - y_j\|)$ ,  $j = 1, 2, 3$  (а потом опять применить теорему Хелли). Положим  $a = \max\{\|x - y_j\| : j = 1, 2, 3\}$ , и пусть  $y'_j$  — такая точка из  $S_a$ , что отрезок  $[z_a, y'_j]$  содержит  $y_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  (при этом, конечно,  $y'_j = y_j$  по крайней мере для одного  $j$ ). Имеем  $\|z_a - y_j\| + \|y_j - y'_j\| \leq a = \|x - y'_j\| \leq \|x - y_j\| + \|y'_j - y_j\|$ , т.е.  $\|z_a - y_j\| \leq \|x - y_j\|$ , а значит,  $z_a \in B(y_j, \|x - y_j\|)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , что и требовалось.

Если точка  $z \in B(y, \|x - y\|) \cap Y_2$  для всех  $y \in Y_2$  (существование такой точки только что доказано), то  $\|y - z\| \leq \|y - x\|$  для всех  $y \in Y_2$ . А это означает, что существует проектор  $\pi : X_3 \rightarrow Y_2$  нормы 1. Действительно, каждый элемент  $v \in X_3$  можно однозначно представить в виде  $v = \alpha(x - z) + y$ , где  $y \in Y_2$ , а  $\alpha$  — некоторое число, и можно определить отображение  $\pi : v \rightarrow y$ . Это линейный проектор, и его норма равна 1:

$$\|v\| = \|\alpha(x - z) + y\| = |\alpha| \|x - (z - \frac{y}{\alpha})\| \geq |\alpha| \|z - (z - \frac{y}{\alpha})\| = \|y\| = \|\pi(v)\|.$$

Итак, в пространстве  $X_3$  существует проектор нормы 1 на каждое двумерное подпространство  $Y_2$ . По теореме 1  $X_3$  — гильбертово. Следовательно (по следствию из леммы А), гильбертовым является и исходное пространство  $X$ .

Лемма С доказана.

Продолжим доказательство теоремы 2.

3)  $\implies$  0). Пусть  $X$  не гильбертово. По лемме С существуют три точки  $x_1, x_2, x_3 \in X$ , никакой чебышевский центр которых не лежит в их линейной оболочке. Можно считать, что эта линейная оболочка — двумерное подпространство  $Y_2$ ,  $0$  — чебышевский центр множества  $C_0 = \{x_1, x_2, x_3\}$  относительно  $Y_2$  и  $d_0(C_0, Y_2) = 1 \geq d_0(C_0, X)$ .

Покажем, что  $\|x_j\| = 1$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Менее чем для двух точек это равенство выполняться не может, иначе  $0$  не является чебышевским центром  $C_0$  в  $Y_2$ . Предположим, что  $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ , а  $\|x_3\| < 1$ . Если  $\|x_1 - x_2\| < 2$ , то для  $z(\alpha) = \alpha \frac{x_1 + x_2}{2}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , при  $j = 1, 2$  имеем

$$\|x_j - z(\alpha)\| \leq \|\alpha(x_j - \frac{x_1 + x_2}{2})\| + \|(1 - \alpha)x_j\| = \alpha \|\frac{x_1 - x_2}{2}\| + 1 - \alpha < 1,$$

в то время как  $\|x_3 - z(\alpha)\| < 1$  при всех достаточно малых  $\alpha$ , так что опять получаем, что  $0$  — не чебышевский центр. Если же  $\|x_1 - x_2\| = 2$ , то  $d_0(C_0, X) \geq$



$\geq d_0(\{x_1, x_2\}, X) = 1$ , что опять противоречит условиям на точки  $x_j$ . Поэтому наше предположение неверно, и все три точки лежат на единичной сфере  $S(Y_2)$  подпространства  $Y_2$ .

Если в  $Y_2$  провести прямые  $l_j$ , опорные к  $S(Y_2)$  в точках  $x_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  (в одной точке может быть много опорных прямых — выберем какую-нибудь), то эти прямые будут образовывать треугольник  $T$ , содержащий внутри себя сферу  $S(Y_2)$  (докажите!).

Возьмем в  $X$  какое-нибудь  $(n + 3)$ -мерное подпространство  $X'$  (напомним,  $\dim X \geq n + 3$ ), содержащее  $Y_2$ , а в нем — гиперплоскости  $\Gamma_j$ , опорные к единичной сфере  $S(X')$  в точках  $x_j$  и содержащие в себе прямые  $l_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Пересечение трех подпространств  $\Gamma_j^0 \subset X'$ , параллельных  $\Gamma_j$ , по крайней мере  $n$ -мерно. Возьмем в этом пересечении  $n$ -мерное подпространство  $Y_n$  и положим  $C = C_0 + Y_n$ ,  $Y = Y_2 + Y_n$ . Размерность  $Y$  равна  $n + 2$ , поскольку  $Y_n$  трансверсально  $Y_2$ .

Очевидно,  $d_n(C, X) \leq d_0(C, X) < 1$ . Для получения противоречия с условием 3) осталось доказать, что  $d_n(C, Y) = d_0(C_0, Y_2) = 1$ .

Если  $d_n(C, Y) < 1$ , то существует такая  $n$ -мерная плоскость  $\Pi \subset Y$ , параллельная  $Y_n$ , что  $\forall x \in C \quad \rho(x, \Pi) \leq 1 - \delta$ , где  $\delta > 0$  (плоскость  $\Pi$  не может быть не параллельна  $Y_n$ , иначе  $d(C, \Pi, Y) = \infty$ ). Это равносильно тому, что расстояние от точки  $p = \Pi \cap Y_2$  до множества  $C$  не превосходит  $1 - \delta$ , откуда  $\rho(p, \Gamma_j) \leq \rho(p, x_j + Y_n) \leq 1 - \delta$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Следовательно, точка  $p$  при каждом  $j$  лежит в той из двух полуплоскостей в  $Y_2 \setminus (Y_2 \cap \Gamma_j^0)$ , где лежит  $x_j$ . Но эти три полуплоскости не пересекаются именно в силу того, что треугольник  $T$ , образованный прямыми  $l_j$ , содержит внутри себя сферу  $S(Y_2)$  (проверьте!).

4)  $\implies$  0). Будем опять доказывать от противного: предположим, что  $X$  не гильбертово, возьмем те же точки  $x_1, x_2, x_3 \in Y_2$  и треугольник  $T$ , что и в предыдущем пункте.

Как и в предыдущем пункте, возьмем в  $X$  какое-нибудь  $(n + 2)$ -мерное подпространство  $X'$  (напомним,  $\dim X \geq n + 2$ ), содержащее  $Y_2$ , а в нем — гиперплоскости  $\Gamma_j$ , опорные к единичной сфере  $S(X')$  в точках  $x_j$  и содержащие в себе прямые  $l_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Пересечение трех подпространств  $\Gamma_j^0 \subset X'$ , параллельных  $\Gamma_j$ , по крайней мере  $(n - 1)$ -мерно. Возьмем в этом пересечении  $(n - 1)$ -мерное подпространство  $Y_{n-1}$  и положим  $Y = Y_2 + Y_{n-1}$ . Размерность  $Y$  равна  $n + 1$ , поскольку  $Y_{n-1}$  трансверсально  $Y_2$ .

Из включения  $B \cap Y \subset T + Y_{n-1}$  вытекает неравенство  $a_n(B \cap Y, X) \leq a_1(T, X)$  (действительно, если для какого-то непрерывного отображения  $F$  треугольника  $T$  в одномерный комплекс  $K_1$  имеем  $s = \sup_{t \in T} \|t - F(t)\|$ , то для непрерывного отображения  $\tilde{F} : x = t + z \mapsto F(t) + z$ ,  $t \in T, z \in Y_{n-1}$  пересечения  $B \cap Y$  в некоторый  $n$ -мерный комплекс из суммы  $K_1 + Y_{n-1}$  будет справедливо неравенство  $\sup_{t \in B \cap Y} \|t - \tilde{F}(t)\| \leq s$ ).

Для получения противоречия с условием 4) осталось доказать неравенство  $a_1(T, X) < 1$ . Возьмем какую-нибудь точку  $w \in X$  с условием  $\|w - x_j\| = \rho < 1$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Такая точка существует, поскольку  $d_0(C_0, X) < 1$ , и заведомо не лежит в  $Y_2$ . Обозначим через  $y_k$  вершины треугольника  $T$  — так, чтобы стороны  $l_i$  и  $l_j$  пересекались в точке  $y_k$  с  $k \neq i, j$ . Построим теперь отображение  $F$  треугольника  $T$  в комплекс  $[w, y_1] \cup [w, y_2] \cup [w, y_3]$  следующим образом: в маленьком треугольнике  $x_1 x_2 x_3 \subset T$  положим  $F(x) = w$ , а в каждом из трех оставшихся

маленьких треугольников  $x_i x_j y_k \subset T$ , где  $i, j, k$  — отличные друг от друга числа из набора  $\{1, 2, 3\}$ , определим  $F(x)$  как такую точку на отрезке  $[w, y_k]$ , для которой отрезок  $[F(x), x]$  параллелен плоскости треугольника  $w x_i x_j$ . Нетрудно видеть, что отображение  $F$  непрерывно и  $\|x - F(x)\| \leq \rho$  для любой точки  $x \in T$ . Отсюда следует требуемое неравенство  $a_1(T, X) < 1$ .

Теорема 2 полностью доказана.

Известно множество других критериев гильбертовости банахова пространства; в настоящее время их число достигает нескольких сотен и постоянно увеличивается. В связи с этим ценность каждого нового критерия невелика, да и формулировки их, как правило, весьма естественны. Одним из немногих аргументов в пользу результатов этого типа может служить, пожалуй, возможность получения из них геометрических характеристик эллипсоидов в классе всех выпуклых замкнутых центрально-симметричных поверхностей в многомерных пространствах. Так, теоремы 1 и 2 дают многомерные обобщения теорем Бляшке-Александрова и Бляшке-Какутани (см. [9], [8], [15]).

Мы, впрочем, и не стремились побудить читателя заняться изобретением новых критериев гильбертовости, а лишь хотели познакомить его с несколькими изящными фактами из геометрии и теории приближений, возникающими при доказательстве таких критериев.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
- [2] Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М., 1971.
- [3] Jordan P., Neumann J. von. On inner products in linear metric spaces // Ann. Math. (2). 1935. V. 36. P. 719-723.
- [4] Бляшке В. Круг и шар. М., 1967.
- [5] Александров А. Д. О выпуклых поверхностях с плоскими границами теней // Матем. сборник. 1939. Т. 5, № 2. С. 309-316.
- [6] Kakutani S. Some characterizations of euclidian spaces // Japan. J. Math. 1939. V. 16, No 2. P. 93-97.
- [7] Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М., 1959.
- [8] Бородин П. А. Квазиортогональные множества и условия гильбертовости банахова пространства // Матем. сборник. 1997. Т. 188, № 8. С. 63-74.
- [9] Rudin W., Smith K. T. Linearity of best approximation: a characterization of ellipsoids // Indag. Math. 1961. V. 23, No 1. P. 97-103.
- [10] Phillips R. S. A characterization of euclidian spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1940. V. 46, No 12. P. 930-933.
- [11] Бородин П. А. О линейности оператора метрического проектирования на чебышевские подпространства в пространствах  $L_1$  и  $C$  // Матем. заметки. 1998. Т. 63, вып. 6. С. 812-820.

- [12] *Тихомиров В. М.* Теория приближений. Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Т. 14. ВИНТИ, 1987. С. 103-260.
- [13] *Стесин М. И.* Александровские поперечники множеств в банаховых пространствах. Канд. дисс. М., 1975.
- [14] *Тихомиров В. М., Исмагилов Р. С., Бабаджанов С. Б.* Геометрия банахова пространства и поперечники множеств // Изв. АН Узбекской ССР. Сер. физ.-мат. 1979. № 4. С. 25-32.
- [15] *Гаркави А. Л.* О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества // УМН, 1964. Т. 19, № 6. С. 139-145.
- [16] *Лейтвейс К.* Выпуклые множества. М., 1985.
- [17] *Никольский С. М.* Некоторые вопросы приближений функций полиномами // Международный Математический Конгресс в Амстердаме. М.: Физматгиз, 1961.