

Длинные кривые, гауссовы диаграммы и инварианты

Ю. М. Бурман

Кривая есть след движущейся точки. Это утверждение кажется нам сегодня простым и естественным, но для его формулировки математикам потребовалось не одно тысячелетие. Попытка объяснить, что такое кривая, имеется в «Началах» Евклида, но только в конце XIX века французский математик Камилл Жордан сформулировал приведенное выше определение — первое, удовлетворяющее современным стандартам математической строгости (правда, следует заметить, что сами эти стандарты родились примерно в то же время). То же самое происходит и с изучением свойств кривых — о них немало было известно уже в древности, и вместе с тем большинство результатов, излагаемых в этой статье, было получено три–пять лет назад.

Наша статья посвящена, в основном, теории деформаций плоских кривых. Мы изучаем вопрос, когда две кривые можно непрерывно продеформировать друг в друга, и какие события — например, тройные самопересечения — могут или обязаны произойти при такой деформации. Эта задача оказывается весьма интересной и непростой, по сложности не уступающей теории узлов (об узлах см. статью С. В. Дужина и С. В. Чмутова в настоящем сборнике, с. 59–93). Узлы и плоские кривые вообще связаны между собой множеством разнообразных связей — на некоторых из них мы коротко остановимся в конце статьи.

Основным «героем» нашей статьи являются так называемые *длинные кривые*. Их определение приводится в начале раздела 1; в этом же разделе вводится описание кривых с помощью специальных схем, называемых *гауссовыми диаграммами*. В разделах 2 и 3 мы определяем с помощью гауссовых диаграмм разнообразные инварианты кривых; в большей общности полученные инварианты исследуются в разделе 4. Заключительный раздел 5 посвящен обобщениям введенных инвариантов на другие объекты, тесно связанные с длинными кривыми — замкнутые кривые, плоские лежандровы фронты и узлы.

Мы предполагаем, что читатель данной статьи знаком с основами дифференциального исчисления и линейной алгебры. Текст, набранный мелким шрифтом, — в основном это доказательства технических утверждений — порой требует знакомства с более сложным материалом. Некоторые простые, но скучные доказательства мы опускаем вовсе, отсылая читателя за подробностями к специальной литературе.

1. ГАУССОВЫ ДИАГРАММЫ ДЛИННЫХ КРИВЫХ

Начнем с определений. Назовем *длинной кривой* гладкое отображение прямой в плоскость $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами:

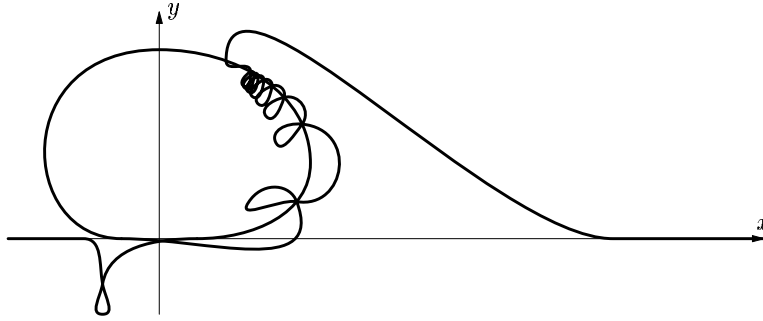


Рис. 1. Пример длинной кривой

1. Производные функций $x(t)$ и $y(t)$ ни при каком t не обращаются одновременно в нуль: $\forall t (x'(t))^2 + (y'(t))^2 > 0$.
2. При $t \leq -1$ и $t \geq 1$ выполнены равенства $x(t) = t$ и $y(t) = 0$.
3. Если $t_1 \in \mathbb{R}$ и $t_2 \in \mathbb{R}$ обладают тем свойством, что $x(t_1) = x(t_2)$ и $y(t_1) = y(t_2)$, то $-1 \leq t_1, t_2 \leq 1$.

Свойство 1 означает, что образ длинной кривой (множество точек $\{(x(t), y(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$, т.е. то, что мы обычно привыкли называть «кривой») является гладким. Действительно, в каждой его точке $(x(t), y(t))$ определен ненулевой касательный вектор $(x'(t), y'(t))$, определяющий однозначно направление касательной прямой. Свойство 2 означает, что вне отрезка $t \in [-1, 1]$ длинная кривая ведет себя стандартным образом — движется вдоль оси абсцисс с единичной скоростью (поэтому кривую и называют длинной).

Пары t_1, t_2 , о которых идет речь в свойстве 3, называются, по очевидным причинам, *точками самопересечения* длинной кривой γ . Свойство 3 означает, что все точки самопересечения лежат на отрезке $[-1, 1]$, — длинная кривая не пересекает себя на том участке, где она идет вдоль оси абсцисс. Разумеется, ничто не запрещает длинной кривой пересекаться с осью абсцисс и при $t \in [-1, 1]$, и вообще, — при $t \in [-1, 1]$ длинная кривая может вести себя весьма непростым образом, см., например, рис. 1.

Читатель, ознакомившийся со статьей С. В. Дужина и С. В. Чмутова, знает, какую важную роль играют в геометрии соображения «общего положения», показывающие, что интересующий нас объект (узел, зацепление, лежандров фронт, длинную кривую и т. п.) можно сколь угодно малым шевелением привести к виду, не содержащему сложных особенностей. Для длинных кривых необходимое утверждение выглядит следующим образом:

Предложение 1. *Всякую длинную кривую γ можно сколь угодно мало пошевелить так, чтобы получить длинную кривую γ_0 , обладающую следующими свойствами:*

1. *Кривая γ_0 имеет конечное (возможно, равное нулю) число точек самопересечения.*

2. Все точки самопересечения кривой γ_0 простые — равенства

$$x(t_1) = x(t_2) = x(t_3), y(t_1) = y(t_2) = y(t_3)$$

не выполнены ни для какой тройки различных чисел $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$.

3. Если t_1, t_2 — точка самопересечения кривой γ , то векторы $(x'(t_1), y'(t_1))$ и $(x'(t_2), y'(t_2))$ не коллинеарны.

Иными словами, в каждой точке самопересечения пересекаются лишь две ветви кривой и касательные к этим ветвям не совпадают (говорят, что самопересечение *трансверсально*). Кривые, обладающие свойствами кривой γ_0 из предложения 1, будем называть *кривыми общего положения*.

Доказывается предложение 1 с помощью одного чрезвычайно важного утверждения — теоремы Тома о трансверсальности. Читатель может познакомиться с теоремой Тома по книге [1].

Пусть теперь γ — кривая общего положения. Изобразим вещественную ось \mathbb{R} в виде прямой и отметим на этой прямой все точки t_1, t_2 самопересечения кривой γ — их будет, по свойству 1 кривых общего положения, конечное число пар. Точки, принадлежащие одной и той же паре, соединим дугой. По свойству 2 разные дуги не имеют общих концов.

Свойство 3 позволяет приписать каждой дуге число ± 1 . А именно, рассмотрим числа t_1, t_2 , соединенные дугой — т. е. относящиеся к одной точке самопересечения. Упорядочим их по возрастанию — пусть, например, $t_1 < t_2$. Векторы $(x'(t_1), y'(t_1))$ и $(x'(t_2), y'(t_2))$ не коллинеарны и поэтому образуют на плоскости базис. Припишем дуге число $+1$, если этот базис «правый», т. е. вектор $(x'(t_2), y'(t_2))$ получается из вектора $(x'(t_1), y'(t_1))$ поворотом (на угол, меньший развернутого) *против часовой стрелки* (и соответствующим растяжением, конечно). В противном случае — если базис «левый» — припишем дуге число -1 .

Полученная конструкция — прямая с отмеченными точками, которые попарно соединены дугами с приписанными им числами ± 1 — называется *гауссовой диаграммой*¹⁾ длиной кривой γ .

Пусть Γ_1 и Γ_2 — две гауссовы диаграммы и $a_1 < a_2 < \dots < a_N, b_1 < b_2 < \dots < b_N$ — соответствующие наборы концов дуг. Мы будем говорить, что Γ_1 и Γ_2 *эквивалентны*, если точки a_i и a_j соединены дугой тогда и только тогда (при тех же i и j), когда дугой соединены точки b_i и b_j , причем знаки обеих дуг совпадают. Иными словами, эквивалентные гауссовы диаграммы не отличаются ни знаками, ни взаимным расположением дуг (хотя и могут отличаться конкретными значениями параметра t , при которых происходят самопересечения).

Оказывается, гауссова диаграмма, взятая с точностью до эквивалентности, аккумулирует в себе практически всю существенную информацию о длинной кривой:

Предложение 2. Пусть γ_1 и γ_2 — две длинные кривые общего положения, гауссовы диаграммы которых эквивалентны. Тогда существуют гладкое взаимно однозначное преобразование плоскости Φ и гладкое взаимно однозначное

¹⁾По имени К.-Ф. Гаусса — знаменитого математика XVIII — начала XIX в., заслужившего при жизни наименование «короля математиков». Насколько известно автору этой статьи, К.-Ф. Гаусс исследованием длинных кривых не занимался.

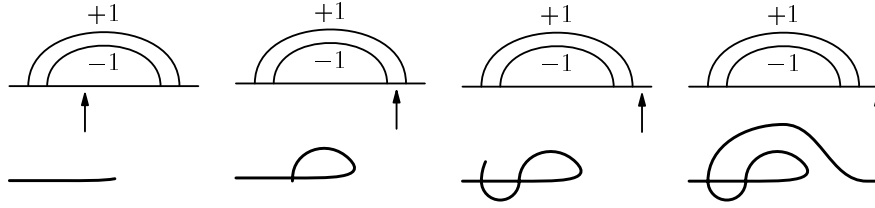


Рис. 2. Построение кривой по ее гауссовой диаграмме

преобразование прямой φ , для которых выполнено равенство

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \gamma_2(t) = \Phi(\gamma_1(\varphi(t))). \quad (1)$$

По-другому равенство (1) можно выразить так: на плоскости и на прямой существуют, помимо стандартных, другие системы координат — на плоскости в общем случае система координат криволинейная — такие что кривая γ_2 записывается в этих системах координат теми же выражениями $(x(t), y(t))$, что кривая γ_1 — в стандартной. Иными словами, предложение 2 утверждает, что гауссова диаграмма содержит всю информацию о длинной кривой на плоскости, не зависящую от выбора систем координат.

Аккуратное доказательство предложения 2 довольно трудоемко. Идею его, однако, понять несложно. Действительно, пусть нам задана гауссова диаграмма кривой γ . Будем строить кривую γ следующим образом. При $t \leq -1$ кривая проводится однозначно — движется вдоль оси абсцисс с единичной скоростью. Продолжим движение до тех пор, пока на гауссовой диаграмме не встретится конец A какой-нибудь дуги. Если конец A — левый, то сделаем на кривой отметку и продолжим движение, не пересекая уже проведенной части кривой. Если конец A — правый, то найдем отметку, соответствующую левому концу B той же самой дуги. За небольшое время до точки A загнем кривую так, чтобы приблизиться к этой отметке, по-прежнему не пересекая уже проведенной части кривой; при этом знак дуги AB показывает, с какой стороны нужно приближаться — справа или слева. В момент времени A пересечем кривую в точке, отмеченной B , и продолжим движение, следуя тем же правилам.

Конечно, в процессе такого построения у нас остается значительная свобода действий — «приближаться к отметке» и «продолжать движение» можно по-разному. Утверждение предложения 2 заключается в том, что эту свободу действий можно скомпенсировать выбором подходящего преобразования плоскости Φ . Преобразование прямой φ отвечает за то, что для эквивалентных гауссовых диаграмм пересечение может происходить в разные моменты времени. Пример построения кривой по (очень простой) гауссовой диаграмме приведен на рис. 2.

Предложение 2, однако, не утверждает, что по *всякой* гауссовой диаграмме (т. е. прямой с точками, дугами и знаками) можно построить кривую. Причины этого более или менее ясны из приведенной идеи доказательства: может оказаться невозможным достичь отметки B , не пересекая при этом кривую. На рис. 3 приведен пример гауссовой диаграммы, не соответствующей никакой кривой.

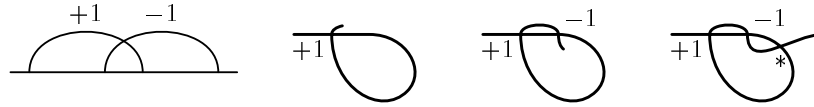


Рис. 3. Нереализуемая гауссова диаграмма

Гауссовы диаграммы, получающиеся как гауссовы диаграммы кривых, называются *реализуемыми*.

Представляет интерес вопрос о том, как по гауссовой диаграмме определить, реализуема она или нет. Ответ дается следующей теоремой:

ТЕОРЕМА 1. *Гауссова диаграмма Γ реализуема тогда и только тогда, когда для каждой ее дуги AB выполнено равенство*

$$\sum_{\substack{\lambda \\ \text{дуга } \lambda \\ \text{от } A \text{ до } B}} \varepsilon(\lambda) = 0$$

Рисунок под знаком суммирования означает, что сумма берется по всем дугам λ , правый конец которых находится между точками A и B (а левый — где угодно); $\varepsilon(\lambda)$ — знак дуги λ .

Идея доказательства теоремы 1 такова. Каждой точке пересечения отрезка кривой γ между точкой B и точкой, расположенной непосредственно перед A , соответствует правый конец дуги, лежащий между B и A . Сумма знаков таких дуг равна индексу пересечения отрезка кривой и уже проведенного участка кривой. Очевидно, что для того, чтобы точки A и B можно было соединить, не пересекая уже проведенную кривую дополнительно, необходимо и достаточно, чтобы этот индекс равнялся нулю.

Таким образом, далеко не все гауссовы диаграммы реализуемы. Общее число классов эквивалентности гауссовых диаграмм с n дугами равно $(2n)!/n!$; вычисление общего числа классов эквивалентности реализуемых гауссовых диаграмм с n дугами (т. е. числа типов длинных кривых с n самопересечениями) — нерешенная задача. Приведем для сравнения результаты компьютерных вычислений, принадлежащие С. М. Гусейн-Заде и Ф. С. Дужину:

Число дуг	1	2	3	4	5	6	7
Все диаграммы	2	12	120	1680	30240	665280	17297280
Реализуемые диаграммы	2	8	42	260	1796	13396	105706

Число дуг	8	9	10
Все диаграммы	518918400	17643225600	670442572800
Реализуемые диаграммы	870772	7420836	65004584

2. Гомотопии и индекс Уитни

Гомотопией длинных кривых называется семейство длинных кривых γ_τ , непрерывно зависящих от параметра $\tau \in [0, 1]$. Иными словами, речь идет о непрерывной деформации кривой γ_0 в кривую γ_1 . Подчеркнем, что гомотопия рисунка 4 «незаконна», поскольку в процессе ее (на средней кривой) возникает острие — точка, в которой $x'(t) = y'(t) = 0$.



Рис. 4. «Незаконная» гомотопия

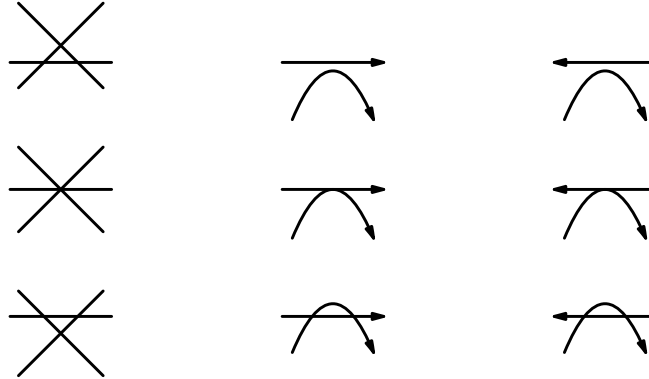


Рис. 5. Локальные катастрофы при гомотопиях

Кривые γ_τ в общем случае не предполагаются кривыми общего положения. Более того, как мы вскоре увидим, даже если γ_0 и γ_1 — кривые общего положения, то, как правило, невозможно «пошевелить» гомотопию γ_τ так, чтобы все кривые стали кривыми общего положения: нарушение общности положения, которое, согласно предложению 1, можно шевелением удалить для конкретной кривой γ_{τ_0} , неизбежно при этом появится у кривой γ_τ с другим, близким к τ_0 , значением параметра τ . Тем не менее, «теорема об общем положении», аналогичная предложению 1, существует и для гомотопий:

Предложение 3. *Всякую гомотопию γ_τ длинных кривых можно сколь угодно мало пошевелить так, чтобы выполнялись следующие условия:*

1. *Для всех значений параметра τ , кроме конечного набора τ_1, \dots, τ_n «катастрофических значений», кривые γ_τ — общего положения.*
2. *При проходе каждого из катастрофических значений нарушение общности положения возникает только в одной точке кривой и принадлежит к одному из трех типов, изображенных на рис. 5.*

Катастрофы, изображенные в столбцах на рис. 5, называются соответственно прохождением тройной точки, попутным касанием и противокасанием. Имеется в виду, что эти катастрофы могут происходить в любом из двух возможных направлений — так, при касании число точек самопересечения может как увеличиваться на 2, так и уменьшаться на 2.

Предложение 3, как и предложение 1, является следствием теоремы Тома о трансверсальности.

Рассмотрим теперь влияние гомотопий на гауссовы диаграммы кривых. Очевидно, что на участках параметра $\tau \in (\tau_k, \tau_{k+1})$, где кривая γ_τ остается кривой

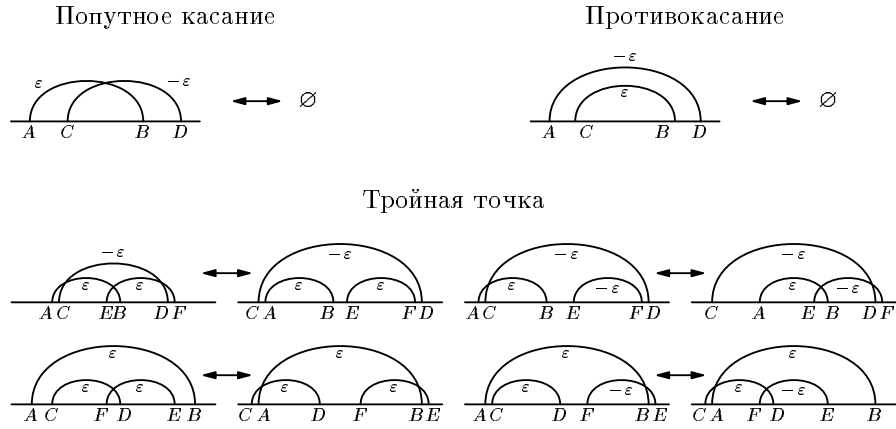


Рис. 6. Изменение гауссовых диаграмм при катастрофах

общего положения, ее гауссова диаграмма заменяется на эквивалентную. Мы не будем в дальнейшем различать эквивалентные гауссовы диаграммы; так что будем считать, что на интервалах между катастрофами гауссова диаграмма кривой не меняется.

Изменение гауссовой диаграммы при катастрофе зависит от типа катастрофы. Начнем со случая касания — слияния и исчезновения двух точек самопересечения. Две близкие точки самопересечения изображаются на диаграмме двумя близкими дугами, AB и CD , причем между A и C (левыми концами), а также между B и D других концов дуг нет. После катастрофы обе дуги исчезают. Нетрудно видеть — это обстоятельство будет неоднократно использовано в дальнейшем — что знаки дуг AB и CD обязательно противоположны. Существует два варианта расположения концов сливающихся дуг на прямой (рис. 6). При одном из них дуги пересекаются — это соответствует случаю попутного касания. При другом одна из дуг «объемлет» другую — это случай противокасания. Разумеется, процесс может происходить и в обратном направлении — вместо исчезновения получится рождение двух близких дуг.

В катастрофе прохождения тройной точки участвуют три точки самопересечения, и, как следствие, три дуги гауссовой диаграммы, AB , CD и EF . Эти дуги близки в том смысле, что их концы разбиваются на «близкие» пары (на рис. 6 — (A, C) , (B, E) и (D, F)), между которыми нет концов «посторонних» дуг. При прохождении тройной точки концы дуг в каждой «близкой» паре меняются местами; знаки дуг сохраняются. Конкретное расположение и знаки дуг при прохождении тройной точки могут быть различными — они зависят от ориентации сторон «исчезающего треугольника» на рис. 5 и порядка, в котором кривая проходит эти стороны. Перебор возможных случаев показывает, что всего существует 8 вариантов — они показаны на рис. 6; здесь везде $\varepsilon = \pm 1$.

Примером применения предложения 3 (и образцом того, как вообще применяются подобные «теоремы об общем положении») является следующее важное утверждение.

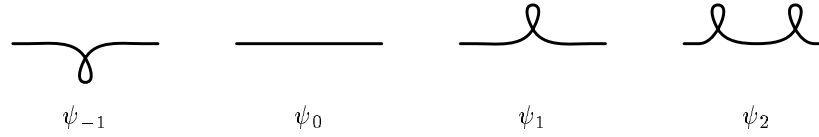


Рис. 7. Примеры кривых с различным индексом Уитни

ТЕОРЕМА УИТНИ²⁾. Пусть γ_0 и γ_1 — две гомотопные длинные кривые, а Γ_0 и Γ_1 — соответствующие гауссовы диаграммы. Тогда сумма знаков всех дуг на диаграммах Γ_0 и Γ_1 совпадает.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть γ_τ — гомотопия, соединяющая кривые γ_0 и γ_1 . Можно считать, что эта гомотопия удовлетворяет условиям предложения 3. Тем самым в процессе гомотопии гауссова диаграмма кривой претерпевает конечное количество перестроек, типы которых описаны выше. При перестройке, соответствующей прохождению тройной точки, знаки дуг на гауссовой диаграмме не меняются вовсе — меняется только их взаимное расположение. При перестройках, соответствующих самокасанию, появляются или пропадают две дуги разных знаков — следовательно, сумма знаков все равно остается прежней. \square

Построенный инвариант — сумма знаков дуг гауссовой диаграммы — называется *индексом Уитни* кривой. Мы показали, что он одинаков у гомотопных кривых; отсюда немедленно следует, что кривые, изображенные на рисунке 7, попарно негомотопны.

Оказывается, индекс Уитни можно вычислить и не обращаясь к гауссовым диаграммам (в частности, из этого следует, что он определен не только для кривых общего положения). А именно, рассмотрим касательный вектор $v(t) = (x'(t), y'(t))$ к кривой γ . Согласно свойству 1 этот вектор никогда не обращается в нуль. По свойству 2 длинной кривой вектор $v(t)$ при $t = 1$ и $t = -1$ одинаков: $v(-1) = v(1) = (1, 0)$. Тем самым, пока t пробегает отрезок $[-1, 1]$, вектор $v(t)$ описывает на плоскости некоторую замкнутую кривую, не проходящую через начало координат. Полное число оборотов, которое делает эта кривая вокруг начала координат (обороты против часовой стрелки считаются с плюсом, против — с минусом), называется *числом вращения* кривой γ .

Иными словами, число вращения можно определить как элемент фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$, соответствующий кривой $v(t)$. Читатель, незнакомый с понятием фундаментальной группы, может познакомиться с ним по любому учебнику топологии (например, по книге [3] или по замечательной книге [4], изданной в серии «Библиотечка Квант»).

ТЕОРЕМА УИТНИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ). Число вращения кривой равно ее индексу Уитни.

Мы докажем эту часть теоремы несколько позднее.

Важность индекса Уитни (числа вращения) как инварианта длинной кривой подчеркивается тем обстоятельством, что он является, по сути, единственной

²⁾На самом деле Уитни в своей знаменитой работе [2] рассматривал не длинные кривые, а замкнутые, однако его теорема, вместе с доказательством, остается верной и для нашего случая. О замкнутых кривых мы немного скажем в разделе 5.1.

характеристикой длинной кривой, сохраняющейся при гомотопиях. А именно, имеет место утверждение, обратное теореме Уитни:

ТЕОРЕМА УИТНИ (ОКОНЧАНИЕ). *Пусть длинные кривые γ_0 и γ_1 таковы, что их числа вращения совпадают. Тогда кривые γ_0 и γ_1 гомотопны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что вектор-функция $v(t) = (a(t), b(t))$ тогда и только тогда может быть представлена в виде $(x'(t), y'(t))$ для некоторой длинной кривой $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, когда выполнены следующие условия:

$$\forall t \in [-1, 1] \quad v(t) \neq (0, 0), \quad (2)$$

$$v(-1) = v(1) = (1, 0), \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 a(t) dt = 2, \quad \int_{-1}^1 b(t) dt = 0. \quad (4)$$

Пусть теперь $v_0(t)$ и $v_1(t)$ — вектор-функции, соответствующие длинным кривым γ_0 и γ_1 и имеющие одинаковое число вращения. Требуется доказать, что можно построить гомотопию $v_\tau(t)$, $\tau \in [0, 1]$, в которой каждая кривая $v_\tau(t)$ удовлетворяет условиям (2) и (4).

Рассмотрим для каждого вектора (p, q) вектор-функцию $V_{p,q}(t)$, определенную на отрезке $[1 - |p| - |q|, 1]$ и обладающую следующими свойствами:

$$\forall t \quad V_{p,q}(t) \neq (0, 0),$$

$$V_{p,q}(1 - |p| - |q|) = V_{p,q}(1) = (1, 0),$$

$$\int_{1 - |p| - |q|}^1 V_{p,q}(t) dt = (p, q),$$

$$\text{число вращения } V_{p,q} = 0.$$

Поскольку числа вращения вектор-функций $v_0(t)$ и $v_1(t)$ совпадают, можно построить гомотопию $w_\tau(t)$ между ними, обладающую свойствами (2) и (3), но не обладающую, вообще говоря, свойством (4). Пусть $\int_{-1}^1 w_\tau(t) dt = (p_\tau, q_\tau)$. Без ограничения общности можно считать, что $w_\tau(t) \equiv (1, 0)$ при $t \in [1 - |p_\tau| - |q_\tau|, 1]$. Тогда определим новую гомотопию $v_\tau(t)$ формулой

$$v_\tau(t) = \begin{cases} w_\tau(t), & t \in [-1, 1 - |p_\tau| - |q_\tau|], \\ V_{p_\tau, q_\tau}(t), & t \in [1 - |p_\tau| - |q_\tau|, 1]. \end{cases}$$

Очевидно, построенная гомотопия удовлетворяет всем условиям (2)–(4). \square

Теперь мы можем доказать вторую часть теоремы Уитни — она следует из третьей. Действительно, рассмотрим набор кривых $\dots, \psi_{-1}, \psi_0, \psi_1, \dots$, изображенных на рис. 7. Индекс Уитни кривой ψ_k равен k ; нетрудно видеть, что таково же и ее число вращения. Пусть теперь k — число вращения какой-либо длинной кривой γ . Из третьей части теоремы Уитни следует, что γ гомотопна кривой ψ_k . Но тогда из первой части теоремы следует, что индекс Уитни кривой γ такой же, как и у ψ_k , т.е. тоже равен k . Теорема Уитни доказана. \square

3. СТРАННОСТЬ, J^+ и J^-

Таким образом, инварианты длинных кривых с точностью до гомотопии исчерпываются индексом Уитни. Новые инварианты появляются, если мы рассмо-

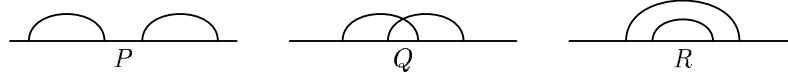


Рис. 8. Взаимное расположение пары дуг

трим более узкие классы кривых и, соответственно, уменьшим число разрешенных гомотопий. В этом случае кривые, которые ранее считались гомотопными, могут стать негомотопными, и теория станет более содержательной.

Чаще всего рассматривают три варианта таких теорий:

1. Теорию кривых без тройных точек.
2. Теорию кривых без попутных касаний.
3. Теорию кривых без противокасаний.

Покажем, что все эти три теории не сводятся к теории раздела 2, иными словами, что в них имеются инварианты, отличные от индекса Уитни.

Все эти инварианты будут выражаться через гауссовы диаграммы формулами, похожими на формулу для индекса Уитни, но только суммирование будет происходить по всем парам дуг на диаграмме. Существуют три способа взаимного расположения пары дуг — они указаны на рис. 8.

Пусть Φ — один из типов расположения пары дуг, а γ — кривая общего положения. Рассмотрим величину

$$\Phi(\gamma) = \sum_{(\lambda_1, \lambda_2) = \Phi} \varepsilon(\lambda_1)\varepsilon(\lambda_2). \quad (5)$$

Здесь сумма берется по всем парам дуг (λ_1, λ_2) на гауссовой диаграмме кривой γ , относящимся к типу Φ ; $\varepsilon(\lambda)$ означает знак дуги λ . Таким образом, мы имеем для каждой кривой γ величины $P(\gamma)$, $Q(\gamma)$ и $R(\gamma)$. Введем еще величину $S(\gamma)$, равную количеству дуг на диаграмме, независимо от их знаков. Величину $S(\gamma)$ можно рассматривать как частный случай величин (5) — в этом случае нужно считать, что сумма в (5) берется по всем парам *совпадающих* дуг λ_1 и λ_2 .

Величины $\Phi(\gamma)$ представляют собой функции на множестве классов эквивалентности кривых общего положения. Все функции на этом множестве, очевидно, образуют линейное пространство. Рассмотрим в нем подпространство (которое по причинам, излагаемым позже, назовем \mathcal{G}_2), натянутое на функции P , Q , R , S ; произвольная функция из этого подпространства имеет вид $f = aP + bQ + cR + dS$. Рассмотрим, как меняется число $f(\gamma)$, когда кривая γ претерпевает одну из катастроф, описанных в разделе 2.

При катастрофе попутного касания (рождение двух близких точек самопересечения) появляются две новые дуги, λ_1 и λ_2 , расположенных по типу Q . Разобьем все пары дуг на диаграмме кривой γ (после катастрофы) на 4 типа:

1. Пары, в которые не входит ни λ_1 , ни λ_2 .
2. Пары, в которые входит λ_1 и еще одна дуга, отличная от λ_1 и λ_2 .
3. Пары, в которые входит λ_2 и еще одна дуга, отличная от λ_2 и λ_1 .
4. Пары (λ_1, λ_2) , (λ_1, λ_1) и (λ_2, λ_2) .

Пары типа 1 входят в сумму, определяющую значение функции f , как до, так и после катастрофы. Поэтому при вычислении разности $f(\gamma_{\text{после}}) - f(\gamma_{\text{до}})$ такие пары можно не учитывать.

Между парами типа 2 и парами типа 3 можно установить взаимно однозначное соответствие, заменяя в каждой паре типа 2 дугу λ_1 на дугу λ_2 . При этом соответствии тип пары не меняется, поскольку дуги λ_1 и λ_2 — «близкие», между их соответствующими концами нет концов других дуг. Произведение же знаков меняется на противоположное, поскольку знаки дуг λ_1 и λ_2 различны. Поэтому вклады, вносимые парами типов 2 и 3 в разность $f(\gamma_{\text{после}}) - f(\gamma_{\text{до}})$, сокращаются.

Тем самым единственный вклад в разность вносят пары типа 4, не имеющие соответствий в диаграмме кривой до катастрофы. Поскольку $\varepsilon(\lambda_1)\varepsilon(\lambda_2) = -1$, вклад равен $2d - b$.

Для катастрофы противокасания рассуждения совершенно аналогичны, за исключением того, что дуги λ_1 и λ_2 расположены по типу R . Изменение значения функции f при такой катастрофе равно, тем самым, $2d - c$.

При катастрофе прохождения тройной точки существует несколько вариантов расположения и знаков дуг, см. рис. 6. Так же, как и для катастроф самокасания, устанавливается, что вклад в разность вносится только парами дуг, участвующих в катастрофе. Нетрудно проверить, что если катастрофа происходит в направлении «слева направо» на рис. 6 (мы будем говорить, что происходит положительное прохождение тройной точки), то изменение значения функции равно $a + b - 2c$, независимо от конкретного расположения дуг.

Приравнивая нулю соответствующие разности, мы можем отобразить в пространстве \mathcal{G}_2 функции, остающиеся неизменными при определенных типах катастроф, и, тем самым, построить примеры инвариантов в трех теориях, указанных выше.

Результаты этих вычислений мы сведем в теорему:

ТЕОРЕМА 2. 1. *Пространство функций $f \in \mathcal{G}_2$, остающихся инвариантными при перестройке самокасания, двумерно и порождено функциями $W^2 = P + Q + R + S$ и $St = Q + R + S/2$. Значение первой из этих функций не изменяется также и при прохождении тройной точки, а значение второй увеличивается на единицу при положительном прохождении.*

2. *Пространство функций $f \in \mathcal{G}_2$, остающихся инвариантными при перестройке прохождения тройной точки и при перестройке попутного касания, двумерно и порождено функциями W^2 и $J^- = 4Q + 2R + 2S$. Функция J^- увеличивается на 2 при противокасании с появлением двух новых точек самопересечения.*

3. *Пространство функций $f \in \mathcal{G}_2$, остающихся инвариантными при перестройке прохождения тройной точки и при перестройке противокасания, двумерно и порождено функциями W^2 и $J^+ = -4Q - 2R - S$. Функция J^+ увеличивается на 2 при попутном касании с появлением двух новых точек самопересечения.*

Теорема 2 показывает, что теории кривых без тройных точек, без попутных касаний и без противокасаний богаче, чем просто теория длинных кривых —

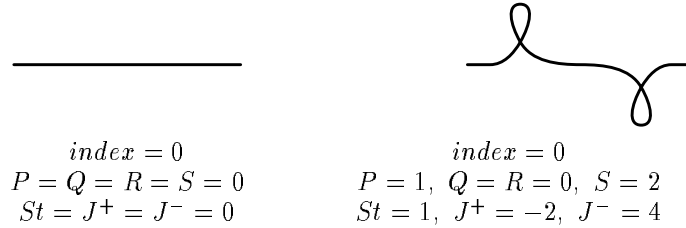


Рис. 9. Инварианты St , J^+ и J^-

здесь есть новые инварианты. На рис. 9 изображены две кривые, имеющие одинаковый индекс Уитни, но разные инварианты St , J^+ и J^- . Отсюда следует, что они негомотопны ни в одной из трех теорий. Иными словами, их можно соединить гомотопией, но в процессе такой гомотопии обязательно встретятся тройные точки, попутные касания и противокасания.

Функция W^2 представляет собой, как нетрудно видеть, квадрат индекса Уитни. Это объясняет ее инвариантность при всех катастрофах, а также то, что она является единственной, с точностью до пропорциональности, функцией из \mathcal{G}_2 , обладающей таким свойством. Что касается выбора второй базисной функции, St , J^+ и J^- , в соответствующих подпространствах, то он обусловлен следующим обстоятельством.

На множестве длинных кривых можно определить операцию *прямой суммы*. Прямая сумма кривых $\gamma_1(t) = (a_1(t), b_1(t))$ и $\gamma_2(t) = (a_2(t), b_2(t))$ это кривая $\gamma(t)$, задаваемая равенством

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0), & t \leq -1 \text{ и } t \geq 1, \\ \left(\frac{1}{2}a_1(2t+1) - \frac{1}{2}, b_1(2t+1) \right), & -1 \leq t \leq 0, \\ \left(\frac{1}{2}a_2(2t-1) + \frac{1}{2}, b_2(2t-1) \right), & 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Иными словами, кривая $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_1 + \gamma_2$ проходит сначала γ_1 , а затем γ_2 . Коэффициенты в формуле вызваны необходимостью соблюдать условия нормировки. Гауссова диаграмма прямой суммы получается, с точностью до эквивалентности, «приставлением» гауссовой диаграммы кривой γ_2 справа от гауссовой диаграммы кривой γ_1 .

Вычислим теперь значение функции $f \in \mathcal{G}_2$ на кривой $\gamma_1 + \gamma_2$. Пары, обе дуги которых лежат в гауссовой диаграмме кривой γ_1 , дадут в сумме $f(\gamma_1)$; пары, обе дуги которых лежат в гауссовой диаграмме кривой γ_2 , дадут $f(\gamma_2)$. Если одна дуга пары лежит в диаграмме кривой γ_1 , а другая — в диаграмме кривой γ_2 , то они образуют пару типа P . Поэтому получаем

$$f(\gamma_1 + \gamma_2) = f(\gamma_1) + f(\gamma_2) + aW(\gamma_1)W(\gamma_2),$$

где W — индекс Уитни. Функции $f \in \mathcal{G}_2$, для которых $a = 0$ (и только они), обладают свойством аддитивности: $f(\gamma_1 + \gamma_2) = f(\gamma_1) + f(\gamma_2)$. Функции St , J^+ и J^- аддитивны. Более того, свойство аддитивности вместе со свойством

инвариантности при катастрофах соответствующих типов определяет функции $St, J^+, J^- \in \mathcal{G}_2$ однозначно с точностью до пропорциональности.

Первоначально функции St (называемая *странностью* кривой) и J^\pm были определены В. И. Арнольдом в статье [5] аксиоматически — как функции, обладающие свойствами, указанными в теореме 2, и свойством аддитивности. Гауссовы диаграммы в определении не участвовали; проблема при этом состояла, во-первых, в том, чтобы описать без их участия, что такое «положительное» и «отрицательное» прохождение тройной точки, и, во-вторых, в доказательстве существования и единственности таких функций. Первоначальное доказательство существования не давало явной формулы, позволявшей вычислить инварианты St и J^\pm по виду конкретной кривой. Первые явные формулы были получены в работах О. Виро [6] и А. Шумаковича [7] (в частном случае также Ф. Аикарди [8]). Подход, излагаемый в данной статье, принадлежит М. Поляку; значительная часть содержания статьи заимствована из его работы [9].

4. ГАУССОВЫ ИНВАРИАНТЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

По аналогии с инвариантами P, Q, R, S предыдущего раздела мы можем определить инварианты высших порядков. Для этого следует рассмотреть вместо пар дуг наборы из n дуг. Эти n дуг могут быть расположены на прямой различными способами; в число способов расположения мы будем, как и раньше, включать и такие способы, где некоторые дуги совпадают. Эти способы естественным образом изображаются в виде гауссовых диаграмм, где, в отличие от гауссовых диаграмм кривых, допускаются кратные дуги. Обозначим множество гауссовых диаграмм с дугами суммарной кратности n символом \mathcal{A}_n . Каждой диаграмме $\Phi \in \mathcal{A}_n$ соответствует функция

$$\Phi(\gamma) = \sum_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \Phi} \varepsilon(\lambda_1) \dots \varepsilon(\lambda_n). \quad (6)$$

Здесь γ — длинная кривая общего положения; суммирование производится по всем наборам из n дуг, расположение которых соответствует диаграмме Φ ; $\varepsilon(\lambda)$ — знак дуги λ . Как и в предыдущем разделе, мы рассмотрим линейное пространство \mathcal{G}_n , порожденное всеми функциями типа (6) для $\Phi \in \mathcal{A}_n$; элементы пространства \mathcal{G}_n будем называть *гауссовыми функциями* порядка n . Можно также рассмотреть линейное пространство $G_n = \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{G}_k$ гауссовых функций порядка не выше n . Если гауссова функция является инвариантом одной из теорий, описанных в разделе 3, то мы будем называть ее гауссовым инвариантом.

Теория гауссовых инвариантов n -ого порядка весьма напоминает теорию 2-го порядка, рассмотренную в разделе 3. Теорию удобно строить последовательно, «индукцией по n », ввиду следующего факта:

Предложение 4. Пусть γ_0 и γ_1 — две гомотопные кривые общего положения, такие что при гомотопии γ_τ между ними происходит ровно одна катастрофа типов, описанных в предложении 3. Пусть $\Phi \in \mathcal{G}_n$. Тогда существует гауссова функция $\Psi \in G_n$ такая, что $\Phi(\gamma_1) - \Phi(\gamma_0) = \Psi(\gamma_0)$. Функция Ψ не зависит от кривых γ_0 и γ_1 , а только от функции Φ и типа катастрофы. Для катастроф самокасания можно выбрать $\Psi \in \mathcal{G}_{n-2}$.

Доказательство предложения состоит в явном построении функции Ψ . Очевидно, что достаточно разобрать случай, когда Φ — функция типа (6).

Доказательство. Предположим сначала, что происходит катастрофа попутного самокасания с возникновением пары точек самопересечения, которым соответствуют дуги λ_1 и λ_2 . Как и в разделе 3 заметим, что вклад в разность $\Phi(\gamma_1) - \Phi(\gamma_0)$ вносят только наборы из n дуг, содержащие как λ_1 , так и λ_2 . Поскольку знаки дуг λ_1 и λ_2 противоположны, вклад от каждого такого набора равен взятому со знаком минус произведению знаков всех дуг набора, кроме λ_1 и λ_2 . Поэтому в качестве функции Ψ в этом случае можно взять сумму (со знаком минус) всех поддиаграмм диаграммы Φ , получающихся из нее выкидыванием пары дуг, расположенных по типу Q и таких, что между их соответствующими концами нет концов других дуг (ибо только такие пары дуг могут соответствовать λ_1 и λ_2). В случае катастрофы противокасания ситуация аналогична, только выкидывать нужно пары, расположенные по типу R .

Для катастрофы прохождения тройной точки рассуждения аналогичны. Трудность здесь заключается в том, что перестройки гауссовой диаграммы при такой катастрофе могут быть различными — см. рис. 6. Небольшой перебор показывает, тем не менее, что функция Ψ во всех случаях получается одна и та же. \square

Предложение 4 позволяет в принципе перечислить гауссовы инварианты порядка n в каждой из трех теорий, описанных в начале раздела 3. Действительно, для каждой гауссовой диаграммы $\Phi \in \mathcal{A}_n$ можно вычислить функцию Ψ для каждого типа катастрофы. Тогда условие того, что функция $f = \sum_{\Phi \in \mathcal{A}_n} \alpha_\Phi \Phi$ инвариантна при катастрофах данного типа (т.е. является инвариантом соответствующей теории) превращается в систему линейных уравнений на коэффициенты α_Φ . Условие аддитивности, описанное в разделе 3, приводит к дополнительным уравнениям.

Следует, однако, иметь ввиду некоторые трудности, которые «не видны» для функций второго порядка, но появляются, когда порядок становится большим.

Во-первых, две функции различных порядков могут совпадать. Это связано с тем, что знак дуги $\varepsilon(\lambda) = \pm 1 = \varepsilon^3(\lambda)$, и поэтому тройная дуга эквивалентна одинарной. Например, функция из \mathcal{G}_3 , соответствующая диаграмме с одной тройной дугой, является инвариантом во всех трех теориях — это просто индекс Уитни. Чтобы избежать этого, мы будем рассматривать впредь гауссовы диаграммы с кратностью дуг не более 2.

Во-вторых, на пространстве $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n$ всех гауссовых функций имеется естественное умножение. Нетрудно видеть, что функция $\Phi\Psi$, где $\Phi \in \mathcal{G}_k$, а $\Psi \in \mathcal{G}_l$, принадлежит \mathcal{G}_{k+l} . Точнее, $\Phi\Psi$ есть сумма всех диаграмм из $k+l$ дуг, получающихся объединением диаграмм Φ и Ψ ; при этом концы дуг, принадлежащих Φ и Ψ , чередуются между собой всеми возможными способами. Таким образом, в $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n$ имеется структура градуированного кольца. Если функции Φ и Ψ являются инвариантами какой-нибудь теории, то $\Phi\Psi$ тоже, разумеется, инвариант. Этот инвариант, однако, не является в разумном смысле «новым».

Третья, и наиболее существенная, трудность заключается в том, что сумма $f = \sum_{\Phi \in \mathcal{A}_n} \alpha_\Phi \Phi$ с ненулевыми коэффициентами может порождать функцию на кривых, тождественно равную нулю. Например, равны нулю функции Z_+ и Z_- третьего порядка, соответствующие диаграммам на рис. 10 (символ 2 означает

дугу кратности 2), — это следует из условия реализуемости гауссовой диаграммы (теорема 1). Соответственно равны нулю и все функции вида $Z_{\pm}\Phi$, для всех гауссовых функций Φ .

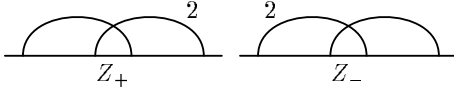


Рис. 10. Функции, равные нулю

Приведем результаты компьютерных вычислений инвариантов третьего порядка. Всего здесь имеется 21 диаграмма (включая диаграммы рис. 10). Функции, являющиеся инвариантами во всех трех теориях, образуют пространство размерности 7. В нем содержится одномерное подпространство, порожденное кубом индекса Уитни; дополнительное шестимерное пространство образуют функции, тождественно равные нулю.

Инварианты третьего порядка типа странности (не изменяющиеся при самокасаниях, но изменяющиеся при прохождении тройных точек) образуют пятимерное пространство. Двумерное подпространство в нем образуют аддитивные инварианты. Двумерное подпространство порождено «старыми» инвариантами — кубом индекса Уитни и произведением индекса Уитни на странность. Остальные 4 инварианта, включая оба аддитивных, — новые.

Инварианты третьего порядка типа J^+ (выдерживающие все перестройки, кроме попутных касаний) образуют трехмерное пространство. Базис в нем составляют куб индекса Уитни, произведение индекса Уитни и инварианта J^+ (в смысле раздела 3), и новый аддитивный инвариант.

Инварианты третьего порядка типа J^- (изменяются только при противокасаниях) образуют двумерное пространство. Базис в нем составляют куб индекса Уитни и произведение индекса Уитни и J^- . Таким образом, новых инвариантов типа J^- в третьем порядке не появляется; также нет и аддитивных инвариантов.

Полученный результат показывает, что различие между катастрофами попутного касания и противокасания введено недаром. На самом деле теории кривых без попутных касаний и без противокасаний различаются коренным образом. Теория кривых без попутных касаний тесно связана с другим замечательным разделом геометрии малых размерностей — теорией лежандровых узлов. Аналогичные интерпретации J^- -теории неизвестны.

С ростом n размерности пространств и размеры систем уравнений для описания гауссовых инвариантов быстро растут; точный ответ неизвестен (по крайней мере, автору данной статьи) даже при $n = 4$. Тем более замечателен результат, полученный в 1997 г. А. Мерковым (см. [12]) и показывающий, что в теории кривых без тройных точек гауссовых инвариантов достаточно для полной классификации:

ТЕОРЕМА 3. Пусть γ_0 и γ_1 — две длинные кривые общего положения. Гомотопия γ_τ без тройных точек, соединяющая γ_0 и γ_1 , существует тогда и только тогда, когда для каждого гауссова инварианта X типа странности выполнено равенство $X(\gamma_0) = X(\gamma_1)$.

Неизвестно, верен ли аналогичный результат для теории кривых без самокасаний.

5. ОБОБЩЕНИЯ ГАУССОВЫХ ИНВАРИАНТОВ

Схема определения инвариантов кривых с помощью гауссовых диаграмм оказывается чрезвычайно плодотворной. Подобным образом можно определить инварианты не только для длинных кривых, но и для других объектов, так или иначе связанных с кривыми.

Чтобы определить гауссовы функции на каком-либо множестве объектов, нужно проделать следующие действия:

1. Доказать для этих объектов аналог предложения 1, т.е. описать совокупность объектов «общего положения».
2. Для объектов общего положения построить комбинаторное описание, аналогичное гауссовым диаграммам. Желательно при этом доказать аналог предложения 2 — это даст надежду, что построенный класс гауссовых функций будет достаточно богатым.
3. Описать гомотопии общего положения (т.е. доказать аналог предложения 3) и изучить, как при таких гомотопиях меняются гауссовы диаграммы.

После этого вычисление гауссовых инвариантов, т.е. отбор из числа гауссовых функций тех, что не изменяются при гомотопиях, сводится, как и для длинных кривых, к решению системы линейных уравнений на коэффициенты.

Приведем примеры объектов, для которых эту программу удастся в той или иной мере осуществить.

5.1. ЗАМКНУТЫЕ КРИВЫЕ

Замкнутой кривой на плоскости называется гладкое отображение окружности в плоскость $\gamma(t) = (x(t), y(t)), t \in S^1$, обладающее тем свойством, что $\forall t \quad (x'(t))^2 + (y'(t))^2 > 0$. Последнее условие, как и для длинных кривых, обеспечивает возможность однозначного проведения касательной в любой точке образа кривой, т.е. гладкость кривой в обычном смысле слова.

Теория замкнутых кривых весьма близка к теории длинных кривых. В частности, для замкнутых кривых остаются верными, вместе с доказательствами, предложения 1 и 3. Для замкнутых кривых можно также определить число вращения способом, описанным на странице 101 (без использования гауссовых диаграмм), и вторая часть теоремы Уитни для них также верна — число вращения является единственной характеристикой замкнутой кривой, сохраняющейся при всех гомотопиях.

Для построения гауссовой диаграммы замкнутой кривой общего положения нарисуем окружность (которую пробегает параметр t в отображении $\gamma(t)$) и отметим на ней пары значений (t_1, t_2) , для которых $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$. Отмеченные пары значений соединим хордами. Для полной аналогии с длинными кривыми нужно еще приписать хордам знаки. Тут, однако, мы сталкиваемся с трудностью: для определения знака точки самопересечения использовался линейный порядок на прямой, иными словами, учитывалось, какое из значений t_1, t_2 больше, а какое меньше. На окружности естественного линейного порядка точек не существует, а взамен имеется циклический порядок: для *трех* различных точек

A, B, C всегда можно сказать, расположены они по часовой стрелке или против. Это обстоятельство подсказывает следующий выход. Отметим на окружности специальную точку O , и определим знак хорды (t_1, t_2) способом, описанным на странице 96, где вместо условия $t_1 < t_2$ потребуем, чтобы точки O, t_1, t_2 были расположены против часовой стрелки. Этим завершается построение гауссовых диаграмм для замкнутых кривых. Для корректности следует, конечно, добавить в условие общности положения кривой требование, чтобы отмеченная точка O не была точкой самопересечения — аналог предложения 1 при этом остается верным. К списку «типичных катастроф» гомотопии общего положения (предложение 3) в этом случае добавится еще одна — прохождение отмеченной точки O через точку самопересечения.

Приведенная конструкция гауссовых диаграмм позволяет определить гауссовы функции для замкнутых кривых. Однако если мы попытаемся выразить через гауссову диаграмму кривой хотя бы ее индекс Уитни (число вращения), то мы натолкнемся на неожиданную трудность: предложение 2 для замкнутых кривых неверно! Действительно, рассмотрим на плоскости две кривых. Первая кривая задается формулой $\gamma_1(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ и представляет собой единичную окружность, пробегаемую точкой против часовой стрелки за единичное время. Вторая кривая является образом первой при осевой симметрии, $\gamma_2(t) = (\cos 2\pi t, -\sin 2\pi t)$, и представляет собой ту же окружность, но пробегаемую по часовой стрелке. Число вращения у кривой γ_1 равно 1, а у кривой γ_2 оно равно -1 и, следовательно, эти кривые не гомотопны. Обе кривые, однако, не имеют точек самопересечения, и поэтому их гауссовы диаграммы выглядят одинаково — не содержат ни одной хорды.

Чтобы преодолеть эту трудность, введем понятие индекса отмеченной точки. Для этого рассмотрим вектор $r(t)$, соединяющий отмеченную точку O с точкой $\gamma(t)$, где t пробегает всю окружность, начиная с точки O и заканчивая в ней же. Поскольку O не является точкой самопересечения, $r(t)$ обращается в нуль только в начале и в конце пути. Поэтому можно определить количество оборотов вектора $r(t)$ вокруг начала координат, которое в данном случае будет *полуцелым* числом. Это число и называется индексом отмеченной точки O . При гомотопиях кривой, не задевающих отмеченную точку, ее индекс не меняется, а при прохождении отмеченной точки через точку самопересечения индекс увеличивается на ± 1 . Правило выбора знака в зависимости от знака точки самопересечения и направления прохождения читатель без труда установит самостоятельно.

ТЕОРЕМА Уитни для замкнутой кривой. *Число вращения замкнутой кривой общего положения равно сумме знаков всех хорд на ее гауссовой диаграмме плюс удвоенный индекс отмеченной точки.*

Доказательство теоремы производится по схеме доказательства теоремы Уитни в разделе 2. Сперва следует проверить, что правая часть равенства в теореме Уитни не изменяется при типичных гомотопиях кривой — для этого нужно разобратся со знаками при прохождении отмеченной точки через точку самопересечения, как указано выше. После этого необходимо выбрать для каждого $k \in \mathbb{Z}$ стандартную кривую индекса k и проверить для нее утверждение теоремы.

Для замкнутых кривых существуют аналоги понятий странности и инвариантов J^\pm (фактически, первоначально эти инварианты были определены имен-

но для замкнутых кривых). Явные формулы для этих инвариантов включают, помимо суммирования по определенным парам хорд на гауссовой диаграмме, также и «негауссовы» члены, зависящие от индекса отмеченной точки. Явные формулы, а также обсуждение теории инвариантов высших порядков можно найти в статье [9]. Также существует развитая теория гауссовых инвариантов многокомпонентных кривых, см. статьи [9] и [11].

5.2. Лежандровы фронты

Понятие лежандрова фронта является одним из ключевых понятий контактной геометрии. Читатель, не знакомый с этим замечательным разделом современной математики, может пропустить первую фразу следующего абзаца, где дается определение, и считать определением то, что написано в дальнейшем. Лучшим выходом, однако, будет ознакомиться с основами симплектической и контактной теории — например, по книге [13]; см. также статью С. В. Дужина и С. В. Чмутова.

Лежандровы фронты на плоскости это, по определению, проекции лежандровых кривых в \mathbb{R}^3 со стандартной контактной структурой $dz - pdq$ на плоскость (q, z) . Эти проекции в общем положении представляют собой замкнутые плоские кривые с конечным числом точек негладкости (т.е. таких точек t , что $x'(t) = y'(t) = 0$). Все точки негладкости представляют собой простые точки возврата, устроенные, как точка $(0, 0)$ на кривой $x^2 = y^3$ (в подходящей системе координат, разумеется). Кроме того, фронт имеет в общем положении конечное число точек трансверсального самопересечения. Типичные гомотопии лежандровых фронтов описываются аналогично предложению 3. Помимо тройных точек и самокасаний, у фронтов бывают катастрофы еще двух типов — самопересечение в точке возврата и рождение (или, напротив, уничтожение) двух точек возврата (рис. 11).

Гауссовы диаграммы лежандровых фронтов определяются аналогично диаграммам плоских кривых и представляют собой окружности, на которые нанесены данные двух типов — во-первых, обозначены хордами точки самопересечения, и во-вторых, отмечены точки возврата. Знак хорды определяется так же, как для замкнутых кривых — с помощью вспомогательной отмеченной точки O .

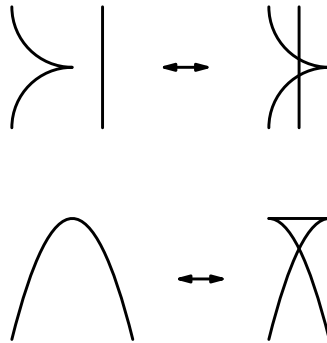


Рис. 11. Дополнительные катастрофы для лежандровых фронтов

Точкам возврата также можно приписать знаки. В точке возврата у фронта однозначно определена касательная прямая. Если рассмотреть касательный вектор к лежандровой кривой в \mathbb{R}^3 , и спроектировать его на плоскость, то проекция в точке возврата будет менять направление на противоположное. Рассмотрим теперь две точки t_1, t_2 , лежащие вблизи точки возврата t_* . Упорядочим номера точек так, чтобы t_1, t_*, t_2 были расположены против часовой стрелки. В общем положении касательные векторы к фронту $\gamma'(t_1)$ и $\gamma'(t_2)$ неколлинеарны, и, следовательно, образуют на плоскости базис. Припишем точке возврата t_* знак $+1$ или -1 в зависимости от того, является ли этот базис «правым» или «левым». Очевидно, от выбора точек t_1, t_2 (достаточно близких к t_* !) этот знак не зависит. Заметим также, что знак точки возврата не зависит и от выбора отмеченной точки O .

Построенные гауссовы диаграммы позволяют определять гауссовы функции по схеме, изложенной в предыдущих разделах. При этом перемножаются знаки как хорд, так и точек возврата, и учитывается взаимное расположение тех и других. Поэтому кольцо гауссовых функций в данном случае обладает биградуировкой — по числу хорд и по числу точек. В частности, существует единственная, с точностью до пропорциональности, гауссова функция бистепени $(0, 1)$ — сумма знаков всех точек возврата.

ТЕОРЕМА 4. *Сумма знаков всех точек возврата лежандрова фронта не изменяется при гомотопиях.*

Доказательство. При катастрофе рождения (уничтожения) двух точек возврата (см. рис. 11) две вновь появляющиеся (уничтожаемые) точки обязательно имеют разные знаки. При катастрофах прочих типов сохранение суммы знаков очевидно. \square

Построенный инвариант называется *индексом Маслова* лежандрова фронта. Можно доказать, что индекс Маслова и индекс Уитни составляют полную систему инвариантов гомотопий лежандровых фронтов на плоскости — см., например, книгу [13].

Дополнительные сведения о гауссовых инвариантах фронтов читатель может почерпнуть из статьи [9]. В частности, там доказано, что инвариант Беннекена (см. о нем в статье С. В. Дужина и С. В. Чмутова) также является гауссовым.

5.3. Узлы и зацепления

С основами теории узлов читатель может ознакомиться по статье С. В. Дужина и С. В. Чмутова в настоящем сборнике; мы будем пользоваться обозначениями этой статьи без подробных разъяснений.

Идея определения гауссовых инвариантов узлов состоит в том, чтобы рассмотреть гауссовы инварианты их диаграмм (проекций общего положения на плоскость), не изменяющиеся при преобразованиях Рейдемейстера. При этом необходимо учитывать, какая из ветвей кривой в точке самопересечения диаграммы проходит сверху. Чтобы отразить на гауссовой диаграмме соответствующую информацию, ориентируем каждую дугу — нарисуем на ней стрелку, направленную от верхней ветви к нижней.

Диаграмма узла представляет собою замкнутую кривую. Мы, однако, используем различие между «проходами» и «переходами» для определения знака

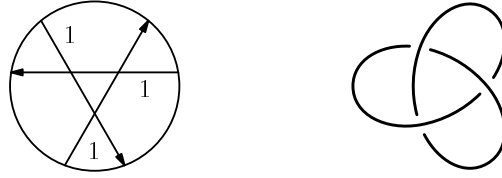


Рис. 12. Трилистник и его гауссова диаграмма

точки самопересечения (хорды на гауссовой диаграмме) без использования отмеченной точки. А именно, пусть (t_1, t_2) — точка самопересечения диаграммы: $x(t_1) = x(t_2), y(t_1) = y(t_2)$, причем $z(t_1) > z(t_2)$ (т. е. ветвь t_1 идет сверху). Тогда определим знак пересечения так же, как в разделе 1, считая точку t_1 «первой», а точку t_2 «второй». Такой знак часто называется английским словом “writhe” (to writhe — букв. «корчиться» (от боли); имеется в виду, что в районе точки самопересечения узел «извивается» в том или ином направлении). Таким образом, мы получаем гауссову диаграмму диаграммы узла — набор ориентированных дуг, снабженных знаками. На рис. 12 изображен узел «трилистник» и гауссова диаграмма его стандартной проекции.

Рассмотрим влияние преобразований Рейдемейстера на гауссовы диаграммы узлов. Первое преобразование Рейдемейстера сводится, очевидно, к тому, что на диаграмме появляется (или, наоборот, исчезает) дуга, между концами которой других дуг нет. Для длинных кривых такого преобразования не было, и быть не могло, поскольку сумма знаков всех дуг — индекс Уитни — сохраняется при любой гомотопии. Тем самым для узлов не существует аналога индекса Уитни — пространство гауссовых инвариантов порядка 1 пусто.

Два других преобразования Рейдемейстера представляют собой уже известные катастрофы кривых. Единственное отличие состоит в том, что они происходят только при определенных сочетаниях направлений и знаков участвующих в преобразовании дуг. Так, при самокасании (второе преобразование Рейдемейстера) возникающие (или исчезающие) дуги имеют одно и то же направление и разные знаки. Список возможных комбинаций знаков и направлений дуг, участвующих в третьем преобразовании Рейдемейстера (прохождение тройной точки), более длинен; читатель, желающий разобраться в доказательствах приводимых ниже результатов, может составить его самостоятельно.

Как и в случае длинных кривых, не всякая диаграмма со знаками и стрелками реализуется как гауссова диаграмма узла. А именно, имеет место такое утверждение.

ТЕОРЕМА 5. Пусть Γ — гауссова диаграмма некоторого узла и χ — хорда на ней. Тогда имеет место равенство:

$$\sum_{\text{left}} \varepsilon = \sum_{\text{right}} \varepsilon$$

Здесь суммирование ведется по всем хордам, расположенным так, как показано на рисунках под знаками суммирования; $\varepsilon = \pm 1$ означает знак хорды.

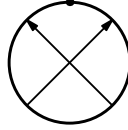


Рис. 13. Инвариант Васильева порядка 2

Теорема 5 является прямым аналогом (фактически следствием) теоремы 1 и доказывается аналогично.

Все известные на настоящий момент инварианты узлов являются инвариантами конечного типа (инвариантами Васильева) или выражаются через таковые — см. об этом в статье С. В. Дужина и С. В. Чмутова в настоящем сборнике. Не составляют исключения и гауссовы инварианты, ввиду следующей теоремы:

ТЕОРЕМА 6. *Всякий гауссов инвариант узлов порядка t является инвариантом конечного типа порядка не выше t .*

Доказательство этой теоремы несложно, но довольно длинно из-за необходимости перебора большого количества случаев. Мы не будем останавливаться на нем подробно.

Недавно (в 1998 г.) М. Гусаров доказал чрезвычайно трудную обратную теорему:

ТЕОРЕМА 7. *Всякий инвариант узлов конечного типа является гауссовым.*

Явное описание кольца гауссовых инвариантов узлов представляет собой задачу, аналогичную соответствующей задаче для кривых. Размерности пространств (и, соответственно, сложность вычислений) в случае узлов выше, так как дуги гауссовых диаграмм имеют направление, и тем самым число диаграмм с заданным количеством дуг больше. В настоящее время известны явные формулы для инвариантов Васильева порядков 2 и 3 (см. [10]); мы приведем здесь результат для инварианта порядка 2. Любопытно, что формулу можно существенно упростить, если ввести в гауссову диаграмму узла дополнительный элемент — отмеченную точку. Выбор этой точки не влияет на знаки хорд (в отличие от отмеченной точки на гауссовых диаграммах замкнутых кривых), но при вычислении гауссовой функции появляется возможность учитывать расположение этой точки относительно хорд. Разумеется, гауссовы инварианты узлов не должны, в частности, зависеть от выбора отмеченной точки.

ТЕОРЕМА 8. *Гауссова функция Φ , соответствующая диаграмме на рис. 13, является инвариантом порядка 2, принимающим значение 0 для тривиального узла и значение 1 для трилистника.*

Отметим, что существует ровно один инвариант порядка 2 с такими свойствами (доказательство см. в статье С. В. Дужина и С. В. Чмутова).

Доказательство. Докажем сначала, что гауссова функция Φ действительно является инвариантом. Независимость Φ от выбора отмеченной точки непосредственно следует из теоремы 5. При первом преобразовании Рейдемейстера появляется или исчезает хорда, не пересекающаяся с прочими хордами на диаграмме, — ясно, что такая операция не влияет на значение функции Φ .

Рассмотрим теперь второе преобразование Рейдемейстера с возникновением пары новых хорд. Возникающие хорды обязательно сонаправлены и имеют разные знаки; поэтому вклад в величину $\Phi(\gamma_{\text{после}}) - \Phi(\gamma_{\text{до}})$ может внести только слагаемое, в котором обе хорды — вновь возникшие. Однако такого слагаемого быть не может, так как при гомотопии общего положения самокасание не происходит в отмеченной точке.

Инвариантность Φ при третьем преобразовании Рейдемейстера проверяется аналогично (хотя и требует разбора большего количества случаев).

Таким образом, гауссова функция Φ — инвариант узла. Утверждение про порядок следует из теоремы 6. Очевидно, $\Phi(\text{тривиальный узел}) = 0$; равенство $\Phi(\text{трилистник}) = 1$ проверяется непосредственным вычислением. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде. Особенности дифференцируемых отображений. В 2-х томах. М.: Наука, 1984.
- [2] H. Whitney. On regular closed curves in the plane, *Comp. Math.* Vol. 4, 1937. P. 276–284.
- [3] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.
- [4] В. Г. Болтянский, В. А. Ефремович. Наглядная топология. М.: Наука, 1983.
- [5] V. I. Arnold. Plane curves, their invariants, perestroikas and classification / In *Singularities and Bifurcations. Ser. Advances in Soviet Mathematics. Vol 21, 1994. Amer. Math. Soc., Providence, RI. P. 33–91.*
- [6] O. Viro. First degree invariants of generic curves on surfaces. Preprint Uppsala University, 1994.
- [7] A. Shumakovich. Formulas for strangeness of plane curves. Preprint Uppsala University, 1994.
- [8] F. Aicardi. Classification and invariants of tree-like curves / In *Singularities and Bifurcations. Ser. Advances in Soviet Mathematics. Vol. 21, 1994. Amer. Math. Soc., Providence, RI. P. 1–31.*
- [9] M. Polyak. Invariants of curves and fronts via Gauss diagrams // *Topology. Vol. 37, No 5, 1998. P. 989–1009.*
- [10] M. Polyak, O. Viro. Gauss diagram formulas for Vassiliev invariants.
- [11] V. A. Vassiliev. Invariants of ornaments / In *Singularities and Bifurcations. Ser. Advances in Soviet Mathematics. Vol. 21, 1994. Amer. Math. Soc., Providence, RI. P. 225–262.*
- [12] A. B. Merkov. Vassiliev invariants classify plane curves and doodles. Preprint 1996–98; submitted to *J. of Knot Theory and Ramifications*;
<http://www.botik.ru/~duzhin/as-papers/ficd-dvi.zip>.
- [13] В. И. Арнольд. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: Фазис, 1996.