По-новому о старом: фрагменты классической математики

Теорема Жордана

А. В. Чернавский

I. Свойство «разбивать» и другие топологические свойства

1. Целое не есть сумма своих частей. Это набившее оскомину высказывание известный кибернетик М. Минский освежил такой иллюстрацией: никакая часть ограды не есть ограда.

На языке, которым мы будем пользоваться, это значит: топологический образ окружности разбивает плоскость, но никакая его часть плоскости не разбивает.

2. Что значит «разбивать»? Термин «разбивать» связан с одним из двух основных топологических свойств пространств. Мы не будем прибегать к общему понятию топологического пространства, чтобы не отклоняться далеко от нашей темы, и ограничимся подмножествами евклидовых пространств $\mathbb{R}^n$. Собственно, нам нужна плоскость, но мы по мере возможности будем касаться и общего случая топологического образа сферы S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$. Плоскость будем обозначать Π.

Подмножество *разбивает* связное множество, если дополнение к нему не связно.

3. Связность. Напомним, что связность $X \subset \mathbb{R}^n$, по определению означает, что X нельзя представить объединением двух непустых и не пересекающихся подмножеств, которые *открыты в* X. Подмножество $A \subset X$ открыто в X, если оно есть пересечение X с открытым подмножеством $\mathbb{R}^n$, а открытость в $\mathbb{R}^n$ означает, что каждая точка подмножества $\mathbb{R}^n$ лежит в этом подмножестве вместе со своей окрестностью, например, с шаром с центром в этой точке.

Открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ связно тогда и только тогда, когда оно *линейно связно*, т.е. любые две его точки соединимы лежащей в нем *простой дугой*. В качестве такой дуги можно взять ломаную.

Свойство связности и понятие «разбивать» являются топологическими и потому позволяют доказывать в простых случаях топологическую неэквивалентность множеств. С помощью аксиомы Дедекинда легко проверяется, что связными подмножествами числовой оси $\mathbb{R}$ являются в точности интервалы (включая точки и неограниченные интервалы — полупрямые и саму $\mathbb{R}$).

Открытые интервалы топологически отличаются от замкнутых и полуоткрытых тем, что каждая их точка разбивает любую их связную окрестность. Окружность отличается от любого интервала тем, что ни одна ее точка ее не разбивает. Две точки окружность разбивают. Это можно назвать одномерным случаем теоремы Жордана. Прямая не гомеоморфна плоскости, так как каждая ее точка разбивает каждую свою связную окрестность, а точки плоскости, очевидно, не разбивают кругов, центрами которых они служат.

Напомним, что компонентой связности (или просто компонентой) множества называется любое его связное подмножество, не лежащее в большем связном подмножестве. Всякое множество распадается в сумму попарно непересекающихся своих компонент связности.

4. Компактность. Второе важное топологическое свойство — компактность, оно определяется с помощью открытых покрытий. Покрытие множества — это система его подмножеств, дающая в объединении все это множество. Открытое покрытие множества X состоит из открытых в X подмножеств. Множество компактно, если из каждого его открытого покрытия можно выделить конечную подсистему, являющуюся покрытием. Из интервалов компактны только замкнутые интервалы (и точки). Это — известная лемма Гейне–Бореля–Лебега. Но на прямой имеется много других компактных подмножеств, например, знаменитое канторово множество.

Вообще, компактные подмножества $\mathbb{R}^n$ это в точности подмножества, являющиеся одновременно замкнутыми и ограниченными. (Замкнутые подмножества — это дополнения к открытым. Они характеризуются тем, что содержат все свои предельные точки, т. е. такие, в любой окрестности которых имеются точки данного множества. Ограниченное множество — множество, содержащееся в шаре какого-нибудь радиуса.)

5. Континуумы. Оба свойства — связность и компактность — выражают непрерывность множества (в отличие от непрерывности отображения). Они являются топологическими, т. е. сохраняются при гомеоморфизмах (взаимно однозначных и в обе стороны непрерывных отображениях). На самом деле они сохраняются при любом непрерывном отображении. Обратное, вообще говоря, неверно, в чем читатель может убедиться на простых примерах: разрывное отображение может сохранять связность и компактность.

Множество и связное, и компактное одновременно называется *континуумом*. Непрерывный образ континуума есть снова континуум. (Например, если функция определена на замкнутом интервале, то и область ее значений есть замкнутый интервал. Из этого вытекают теоремы Больцано и Вейерштрасса о непрерывных функциях.)

В частности, топологический образ C окружности S^1 на плоскости является континуумом. Мы будем называть такой образ простой замкнутой кривой. То же верно и для топологического образа C^{n-1} сферы S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$ (такой образ будем называть топологической сферой).

6. Теоремы Жордана, Жордана-Брауэра и Шенфлиса. В своей основной части теорема Жордана утверждает, что простая замкнутая кривая C на плоскости Π разбивает Π.

Более того, $\Pi \setminus C$ состоит из двух компонент и C является общей границей этих компонент. Последнее означает, что каждая точка C служит предельной точкой для каждой из этих компонент.

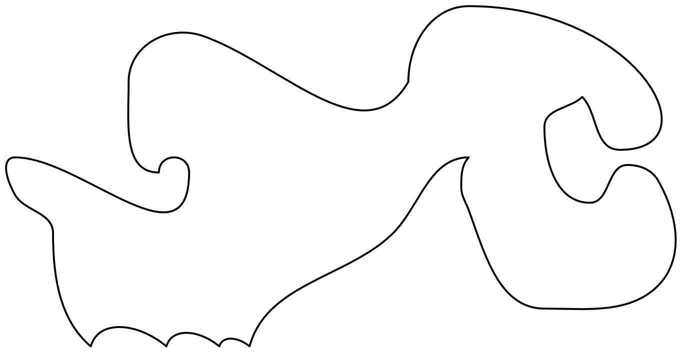

Рис. 1.

Это же утверждение справедливо и для обобщения теоремы Жордана, доказанного Брауэром в 1912 году: $\mathbb{R}^n \setminus C^{n-1}$ состоит из двух компонент и C^{n-1} является их общей границей.

Но следующее уточнение теоремы Жордана, данное А. Шенфлисом в 1906 г., не справедливо в общем случае при $n \geqslant 3$:

Замыкания компонент $\mathbb{R}^2 \setminus C$ гомеоморфны замыканиям компонент дополнения к S^1. (Это эквивалентно утверждению, что гомеоморфизм S^1 на C может быть продолжен до гомеоморфизма плоскости на себя.)

Мы не будем доказывать здесь это уточнение и отошлем читателя к книге Л. В. Келдыш «Топологические вложения в евклидово пространство». Но в конце мы приведем несложный пример (Е. Артина и Р. Фокса, подробнее описанный в этой книге), из которого будет видно, почему этот результат не переносится на более высокие размерности.

7. Ретракции. Мы будем опираться на понятие ретракции. Оно имеет общематематическое употребление (теперь это значит «общекатегорное»). В нашем случае подмножество A множества X называется *ретрактом* X, если имеется непрерывное отображение $r : X \to A$, при котором все точки A неподвижны.

(В более общей форме: пусть даны отображения $f : B \to X$ и $g : X \to B$ с условием $gf = 1|_B$ — тождественное отображение B. Тогда отображение $r = fg : X \to X$ обладает свойством $r^2 = rr = fgfg = fg = r$. Более того, если $x = r(y)$, т.е. x лежит в образе A отображения r, то $fg(x) = r(x) = r(r(y)) = r(y) = x$. Значит, r есть ретракция X на A и также f есть отображение, обратное к g, ограниченному на A. Иными словами, f есть гомеоморфизм B на A.)

Например, ретракцией является проекция плоскости на прямую. Нам понадобится ретракция следующего типа. В шаре B^n выкинем произвольную точку O

(не обязательно центр). Каждый полуинтервал $(O, x]$, где $x \in S^{n-1}$, отобразим на свой конец x. Мы, очевидно, получим ретракцию $B \setminus O$ на границу шара S^{n-1}.

8. Окружность — абсолютный окрестностный ретракт. Для нас существенным будет свойство окружности, состоящее в ее принадлежности к классу *абсолютных окрестностных ретрактов*. Не давая общего определения, мы отметим только, что согласно этому свойству, любой гомеоморфный образ C в любом пространстве $\mathbb{R}^n$ является ретрактом некоторой своей окрестности. Это же верно для всех сфер. Мы покажем это для гомеоморфных образов S^1 в Π.

9. Отрезок — абсолютный ретракт. Замкнутый интервал является *абсолютным ретрактом*, что, в частности, означает, что любая простая дуга (гомеоморфный образ отрезка) в плоскости является ее ретрактом и, значит, любого подмножества плоскости, содержащего эту дугу.

Абсолютные ретракты обладают также двойственным свойством: непрерывное отображение подмножества множества X в такое пространство может быть распространено на все X. Для отрезка (и, значит, для любой простой дуги) это есть утверждение леммы Урысона, с которой начинается гомотопическая топология. Мы докажем ее только в очень частном, нужном нам дальше, случае.

Лемма. *Непрерывное отображение f границы квадрата Q в отрезок I может быть продолжено до непрерывного отображения $F : Q \to I$.*

Доказательство. Возьмем внутри Q точку O и отобразим ее в любую точку A отрезка. Затем каждый отрезок $[O, x]$, где x лежит на границе Q, линейно отобразим на отрезок $[A, f(x)]$. То, что получится непрерывное отображение, продолжающее f, проверяется непосредственно. □

10. Теорема о неретрагируемости круга на границу и теорема о неподвижной точке. Наше доказательство опирается на теорему о невозможности ретракции круга на его граничную окружность. Эта теорема справедлива для шара любой размерности. Мы приведем ниже простое доказательство для круга. Оно может быть «продолжено» по индукции на высшие размерности, но при этом обрастает техническими деталями и оказывается ненамного проще обычных доказательств с помощью симплициальной или гладкой аппроксимации.

Как известно, эта теорема эквивалентна теореме о существовании неподвижной точки у любого непрерывного отображения шара в себя. Нам этот факт не потребуется и мы оставим доказательство этой эквивалентности читателю в качестве упражнения.

11. Схема доказательства теоремы Жордана и сопутствующих утверждений. Если $\Pi \setminus C$ связно, то можно построить ретракцию плоскости на C, значит, и содержащего C круга, а тогда и ретракцию этого круга на его границу. Мы полностью проводим доказательство только в двумерном случае, но будет вполне очевидно, что оно прямо переносится и на многомерный случай.

Неретрагируемость круга на границу влечет за собой более общее утверждение: замыкание ограниченной компоненты дополнения к компактному множеству на плоскости не ретрагируется на свою границу. Отсюда, в частности, вытекает, что простая дуга не разбивает плоскости, а также, что гомеоморфный образ C окружности является общей границей всех компонент своего дополнения.

Наконец, мы приведем доказательство утверждения, что компонент дополнения к C ровно две. Оно оказывается более сложным и в отличие от предыдущих существенно использует свойства П, хотя, утверждение, конечно, верно и в n-мерной ситуации.

Для полноты мы выведем из теоремы Жордана-Брауера другие классические результаты Брауера: теорему об инвариантности области и размерности $\mathbb{R}^n$ — и сделаем краткий исторический экскурс.

II. Доказательство теоремы Жордана

Начнем с доказательства теоремы о неретрагируемости круга B на его границу S.

1. Теорема. *Не существует ретракции B на S.*

Доказательство. Пусть $r : B \to S$ — ретракция. Возьмем точку $x_0 \in S$. Пусть K полный прообраз точки x_0. Это компактное множество, причем $K \cap S = x_0$. Для каждой точки $x \in K$ возьмем малый треугольник Δ_x, содержащий x внутри себя. Треугольник Δ_{x_0} для точки x_0 возьмем так, чтобы его одна сторона лежала на S и содержала x_0 внутри себя. Треугольники для остальных точек не должны пересекать S. Выберем конечное число треугольников, объединение внутренностей которых содержит K. Немного пошевелив вершины, можно добиться, чтобы вершины каждого треугольника не лежали на прямых, содержащих стороны других треугольников. Тогда граница объединения оставленных треугольников состоит из конечного числа ломаных, из которых только одна, назовем ее l, может быть незамкнутой — она должна соединять два конца стороны треугольника Δ_{x_0}, лежащей на S. В самом деле, конец такой ломаной не может лежать внутри B. (Отрезок не разбивает связной окрестности своего конца.)

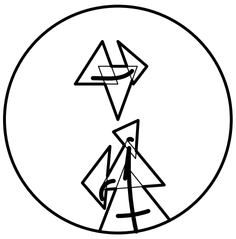

Рис. 2.

Если треугольники брались достаточно малыми, то расстояние точек l от K столь мало, что расстояние ее образа $r(l)$ от x_0 меньше заданного ε. Но этот образ есть связное множество, которое содержит оба конца указанной стороны Δ_{x_0}. Так как x_0 разбивает свою окрестность, этот образ должен содержать x_0, т. е. l пересекает K, что невозможно по построению. $\square$

Это доказательство довольно непосредственно продолжается по индукции на высшие размерности. Мы укажем только схему этого рассуждения, так как подробное его проведение, как сказано, имеет примерно тот же порядок сложности, что и обычные доказательства.

Рассуждая от обратного, допустим, что имеется ретракция $r_n : Q^n \to S^{n-1}$ n-мерного куба на его край. Возьмем внутри $(n-1)$-мерной грани $Q^{n-1} \subset S^{n-1}$ этого куба точку $\mathbf{x}_n$. Пусть K_n — полный прообраз этой точки. Он пересекает S^{n-1} только по точке $\mathbf{x}_n$. Покроем K_n конечным числом кубов, из которых только один пересекает S^{n-1} своей гранью, содержащей $\mathbf{x}_n$ внутри себя. Мы не будем доказывать элементарный факт комбинаторной топологии: некоторая симплициальная окрестность этого объединения кубов имеет границей

$(n-1)$-мерное многообразие. Такая окрестность называется регулярной, в следующем пункте мы рассмотрим элементарный случай регулярной окрестности дерева. Обозначим границу регулярной окрестности объединения построенных кубов через M^{n-1}. Ее край совпадает с краем S^{n-2} $(n-1)$-мерного куба, содержащего $\mathbf{x}_n$. Образ $r_n(M^{n-1})$ лежит в малой окрестности этого куба и не содержит $\mathbf{x}_n$. В силу этого имеется ретракция r'_n этого образа на S^{n-2}. Композиция $r'_n r_n$ определяет ретракцию $r_{n-1} : M^{n-1} \to S^{n-2}$.

Возьмем теперь точку $\mathbf{x}_{n-1}$ в какой-либо грани S^{n-2} и обозначим ее полный прообраз через $K_{n-1} \subset M^{n-1}$. Дальше повторяем проведенное только что построение с тем только отличием, что вместо кубов берем объединения симплексов, содержащих точки K_{n-1}. Мы можем построить регулярную окрестность этого прообраза так, что ее граница M^{n-2} (взятая относительно M^{n-1}) пересекает S^{n-2} по границе S^{n-3} куба, содержащего $\mathbf{x}_{n-1}$, и при этом ее образ не содержит этой точки. Поэтому, как и выше, строится ретракция $r_{n-2} : M^{n-2} \to S^{n-3}$ и рассуждение может быть продолжено дальше.

Так как размерность многообразий M^i уменьшается на единицу с каждым шагом, через n шагов мы придем к ретракции ломаной без пересечений на ее два конца, что невозможно в силу ее связности.

Докажем теперь два предварительных утверждения.

2. Регулярная окрестность дерева. *Деревом* называется связный граф (объединение отрезков, пересекающихся только в концах), у которого нет циклов, т.е. в нем нет замкнутых цепочек ребер, в которых каждое ребро встречается не более одного раза. Эквивалентным свойством является невозможность удаления одного (открытого) ребра так, чтобы граф остался связным. Еще иначе можно сказать, что дерево — это граф, каждая точка которого или его разбивает или является конечной только для одного ребра.

Дерево, очевидно, имеет ребро, один из концов которого принадлежит только этому ребру, причем после отбрасывания этого ребра снова останется дерево. Иначе, смещаясь по ребрам, мы обязательно получим цикл.

Последовательно отбрасывая ребра, мы в конце концов оставим только одну вершину. Возьмем многоугольник вокруг этой точки и, присоединяя ребра в обратном порядке, будем каждый раз добавлять содержащий очередное ребро прямоугольник, граничащий с построенной на предыдущем шаге фигурой по отрезку, вместе с многоугольником вокруг другой вершины этого ребра (см. рис. 3).

Достаточно очевидно, что каждый раз мы будем получать фигуру, гомеоморфную кругу. Таким образом, дерево на плоскости имеет сколь угодно тесную окрестность, гомеоморфную кругу.

Построенная окрестность называется регулярной. Индукцией по числу ребер легко строится ретракция такой окрестности на дерево, причем ясно, что если окрестность достаточно тесная, то и ретракцию можно сделать сдвигающей точки достаточно мало.

3. Окружность — окрестностный ретракт плоскости.

Предложение. *Пусть дан гомеоморфизм $h : S \to C$ окружности S на подмножество C плоскости Π. Тогда для некоторой окрестности $U(C)$ в плоскости имеется ретракция $U(C)$ на C.*

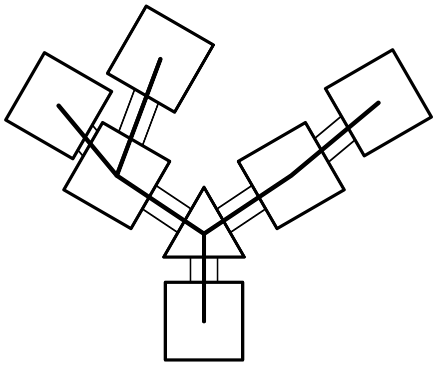

Рис. 3.

Доказательство. Рассмотрим последовательность Z_i разбиений плоскости на квадраты (как в тетрадке «в клетку») со стороной 2^{-i}. Они строятся с помощью пар семейств прямых: прямые в одном семействе отстоят друг от друга на расстояния кратные 2^{-i}, а прямые разных семейств ортогональны. Кроме того, разбиение Z_{i+1} получается добавлением новых прямых к прямым разбиения Z_i.

Каждой вершине v каждого квадрата каждого разбиения поставим в соответствие одну из ближайших точек C, которую обозначим x_v. Заметим, что если мы выберем последовательность v_i этих вершин, сходящуюся к некоторой точке x_0 на C, то и последовательность точек x_{v_i} будет сходиться к этой же точке.

Рассмотрим теперь ребра квадратов, не пересекающих C. Сначала каждое такое ребро $[v', v'']$ подразделения Z_1 гомеоморфно отобразим на ту из двух дуг, на которые C разбито точками $x_{v'}$ и $x_{v''}$, которая имеет меньший диаметр.

Затем для подразделения Z_2 возьмем те квадраты, которые не пересекают C и не лежат в отобранных на первом шаге квадратах и поступим с их ребрами (не лежащими на уже отображенных) точно так же.

Продолжим это построение на все Z_i, выбирая на очередном шаге те квадраты, которые не пересекают C и не лежат в выбранных ранее. Заметим снова, что если мы возьмем последовательность точек w_i на ребрах квадратов этих подразделений, которая сходится к точке на C, то и последовательность их образов на C будет сходиться к той же точке.

Мы фактически построили непрерывную ретракцию на C множества, полученного присоединением к C бесконечного графа, состоящего из ребер квадратов этих подразделений, номер которых растет по мере приближения к C. Каждая точка плоскости вне C принадлежит квадрату одного из подразделений Z_i, который не пересекает C и граница которого уже отображена в C.

Теперь мы постараемся распространить построенное отображение на такие квадраты. Вообще говоря, это невозможно. (Граница квадрата могла быть отображена в C с целым ненулевым числом обходов, но мы не хотим останавливаться на строгом определении этого понятия.)

Однако, если квадрат достаточно близок к C, продолжение может быть построено!

Подробнее. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется номер i такой, что границы квадратов подразделений Z_j для $j > i$, отобранных в нашем построении, отображены в подмножества C, диаметры которых меньше ε. Образы границ таких квадратов содержатся в C в гомеоморфных образах отрезка и, согласно п. 9 предыдущего раздела, мы можем продолжить отображение на эти квадраты.

Ясно также, что при этом диаметры образов квадратов стремятся к нулю при возрастании i.

Рассмотрим теперь все квадраты, для которых нами было определено отображение в C. Во-первых, ясно, что отображение их объединения непрерывно и непрерывно продолжается тождественным отображением C на себя, т. е. снова мы имеем ретракцию. Отображение определено, возможно, не для всех квадратов. Но объединение тех, для которых оно определено, содержит некоторую окрестность C в плоскости и поэтому мы в действительности построили ретракцию окрестности C на C, что и требовалось. $\square$

Замечание. Мы построили ретракцию на C множества, полученного из C добавлением ее окрестности и границ некоторых квадратов подразделений Z_i. Мы используем ее дальше. Обозначим ее $\bar{r}$.

4. Отрезок — абсолютный ретракт плоскости. Для отрезка I справедливо более сильное утверждение, чем мы воспользуемся при доказательстве дополнений к теореме Жордана.

Лемма. *Если $q : I \to J \subset \Pi$ гомеоморфизм, то J — ретракт* Π.

Доказательство леммы. Ретракция строится так же, как для C, но здесь не возникает того *препятствия*, которое возникало для гомеоморфного образа окружности в виде ненулевых степеней отображений границ квадратов на C. Иными словами, мы для каждого квадрата можем пользоваться леммой п. 9 предыдущего раздела. $\square$

5. Доказательство теоремы Жордана. Мы построили выше ретракцию $\bar{r}$ на C множества, полученного присоединением к C некоторой ее окрестности U и границ квадратов подразделений Z_i, причем каждая точка вне C лежит в одном из отобранных квадратов.

Возьмем большой квадрат Q, содержащий окрестность U целиком внутри себя. Можно считать, что это один из квадратов первого подразделения Z_1. Квадраты подразделений Z_i либо лежат в нем целиком, либо не пересекают его внутренность.

Возьмем точку v_0 на границе Q. Занумеруем отобранные выше квадраты подразделений Z_i, обозначив их q_k, и возьмем в каждом из них по точке v_k. Если предположить, что C не разбивает Π, т. е. что дополнение к C имеет одну компоненту связности, то можно для каждой точки v_k построить ломаную, соединяющую с ней точку v_0, которая проходит в Q и не пересекает C. Объединение этих ломаных образует граф и можно допустить, что этот граф — дерево (иначе выкинем из него несколько отрезков).

Возьмем регулярную окрестность R этого дерева, считая, что она не пересекает C, лежит в Q, притом пересекается с границей Q только по отрезку d, содержащему v_0. R гомеоморфна кругу. Ее граница состоит из d и дополнительной дуги d'. Легко построить ретракцию R на d'. Продолжим эту ретракцию тождественно на остальную часть квадрата Q и получим ретракцию r_1 квадрата на дополнение к R.

Это дополнение не содержит точек v_k. Для каждого из отобранных квадратов q_k построим ретракцию дополнения к точке v_k на его границу. Получим ретракцию объединения квадратов $q_k \setminus v_k$ на сумму их ребер. Дополним эту ретракцию тождеством на U и обозначим получившуюся ретракцию r_2. Наконец, мы имеем ретракцию $r_3 = \bar{r}$, построенную ранее.

Композиция трех ретракций $r_3 r_2 r_1$ дает ретракцию $\tilde{r} : Q \to C$. Возьмем теперь гомеоморфизм $q : S^1 \approx C$ и продолжим его до непрерывного отображения $\bar{q} : B \to Q$ круга, ограниченного S^1, в квадрат Q (радиус $[Ox]$ линейно отображается на отрезок $[A, q(x)]$, где A — какая-нибудь точка в Q). Композиция $q^{-1}\tilde{r}\bar{q}$ дает ретракцию круга B на его границу, что невозможно. Теорема доказана. □

III. Доказательство сопутствующих предложений

Мы докажем теперь три утверждения, дополняющих теорему Жордана: мы покажем, что простая замкнутая кривая на плоскости разбивает плоскость в точности на две компоненты и является общей границей обеих этих компонент своего дополнения, в то время как простая дуга плоскости не разбивает. Этого недостаточно, чтобы утверждать, что гомеоморфные образы окружности и отрезка на плоскости расположены с точки зрения топологии так же, как и стандартные окружность и отрезок. Эти утверждения справедливы, но требуют для доказательства дополнительной специальной техники, и мы отсылаем интересующегося читателя к книге Л. В. Келдыш.

1. Теорема 1. *Гомеоморфный образ J отрезка $I = [0, 1]$ в плоскости* Π (*т. е. простая дуга*) *не разбивает* Π.

Мы должны доказать связность дополнения к $J = q(I)$ в плоскости, где q — гомеоморфизм отрезка $I = [0, 1]$ с подмножеством плоскости J. Мы докажем сначала лемму, которая касается вообще компактных подмножеств плоскости.

2. Лемма. *Если компактное множество $K \subset \Pi$ разбивает* Π, *то оно не является ретрактом замыкания ни одной из ограниченных компонент своего дополнения в* Π.

Доказательство леммы.. Имеется только одна неограниченная компонента дополнения, содержащая дополнение к достаточно большому кругу, который содержит наше множество K (дополнение к кругу связно, а компоненты, лежащие в круге, ограничены). Возьмем большой квадрат Q, содержащий внутри себя K. Если U — одна из ограниченных компонент, то она также лежит внутри Q. Пусть r — ретракция замыкания U на свою границу (лежащую в K). Дополним ее тождеством вне U. Мы получим отображение Q в себя, тождественное на границе и такое, что точки U не лежат в образе. Существует ретракция Q с одной выкинутой точкой (любой точкой из U) на границу Q. Композиция этой ретракции и r дает ретракцию Q на границу, что невозможно. □

3. Доказательство теоремы 1. В п. 5 раздела I показано, что имеется ретракция Π на любое подмножество, гомеоморфное отрезку, значит, и ретракция на него любого большего подмножества Π. Теорема вытекает из предыдущей леммы. □

Итак, часть окружности утрачивает важное свойство, которое имеет целая окружность, — разбивать плоскость при любом ее (гомеоморфном) расположении на плоскости. Однако, чтобы целое имело новое свойство, которое не имеют ее части, все же нужно, чтобы эти части имели какие-то свои свойства, которые обеспечат новое свойство целого. Таким свойством отрезка является его способность *локально разбивать* плоскость вблизи его внутренних точек. Мы предлагаем читателю самому определить это свойство.

4. Границы компонент дополнения к C.

Теорема 2. *Граница каждой компоненты дополнения к гомеоморфному образу C окружности совпадает с C.*

Доказательство. Границы компонент дополнения во всяком случае лежат в C. Пусть Q — компонента дополнения, граница которой не совпадает с C. Тогда эта граница лежит в простой дуге, содержащейся в C, и Π, а тогда и Q, ретрагируется на эту дугу. Значит, $Q \cup C$ ретрагируется на C. По лемме Q может быть только неограниченной компонентой. В результате C является общей границей всех ограниченных компонент своего дополнения. (На самом деле такая компонента одна, но мы этого не доказали.)

Неограниченная компонента Q_∞ превращается в ограниченную с помощью следующего приема. Пополним Π одной точкой в бесконечности. Получится сфера (топологически). Выкинем одну точку O из другой компоненты — получится плоскость. При этих операциях граница Q_∞ не изменится, а компонента станет ограниченной. □

5. Лемма. *Пусть, как и раньше, C — гомеоморфный образ окружности. Пусть U — произвольная компонента дополнения к C, b — точка в U и a — точка на C. Для любой окрестности O точки a в плоскости существует простая дуга l, соединяющая b с точкой a', лежащей в $O \cap C$, причем $l \setminus a'$ лежит в U. Дугу L можно взять конечнозвенной ломаной.*

Доказательство. Как показано в предыдущем пункте, каждая точка C является предельной для каждой компоненты дополнения. Поэтому существует ломаная $\tilde{l}$, соединяющая в U точку b с точкой c, лежащей в O. Считая, что O выпукла (например, круг), соединим a и c отрезком. Пусть a' — первая точка из C на этом отрезке, считая от c. (Такая точка существует по принципу дедекиндова сечения.) Тогда объединение $\tilde{l}$ с отрезком $[c, a']$ дает требуемую ломаную. □

6. Теорема 3. Гомеоморфный образ окружности разбивает плоскость ровно на два связных открытых множества.

Доказательство. Пусть снова дан гомеоморфизм $h : S \to C$ окружности на компактное подмножество плоскости C, которое, как мы уже знаем, разбивает плоскость Π. Допустим, что компонент дополнения к C больше двух.

Только одна из этих компонент неограниченная и тогда, согласно условию, имеются по крайней мере две ограниченные компоненты (их замыкания компактны). Обозначим две такие компоненты U_1 и U_2. В каждой из областей U_1 и U_2 возьмем по точке b_1 и b_2 соответственно. Кроме того, возьмем две различные точки a_1 и a_2 на C.

Используя лемму, соединим точку b_i с двумя различными точками a_{ij}, лежащими в малых окрестностях на C соответственно точек a_j, ломаными l_{ij}, причем так, что за исключением конца a_{ij} ломаная l_{ij} лежит в области U_i. Кроме того, можно считать, что l_{i1} и l_{i2} пересекаются только в b_i.

Обозначим малую дугу, содержащуюся в C с концами a_{1j} и a_{2j} через l_j. Замыкание дополнения к сумме двух дуг l_j на C также распадается на две дуги l^1 и l^2.

Четыре ломаных l_{ij} вместе с дугами l_j на C образуют простую замкнутую кривую Z. Пересечение Z с C состоит из дуг l_j. Эта кривая разбивает плоскость ровно на две компоненты.

В самом деле, каждая точка простой замкнутой кривой на плоскости, как мы показали, является предельной для каждой компоненты дополнения. Поэтому, если такая кривая имеет в качестве своей части хотя бы один отрезок, ее дополнение состоит из двух компонент (так как вблизи точек отрезка точки дополнения распадаются на два подмножества так, что точки каждого из подмножеств можно соединить отрезком, не пересекающим этой кривой).

Из двух компонент, на которые Z разбивает плоскость, одна неограниченная, обозначим ее W, другая ограниченная, обозначим ее V.

Мы утверждаем, что две дуги l^1 и l^2 лежат в разных компонентах дополнения.

В самом деле, если они лежат в одной компоненте, скажем, в W, то V не пересекается с C. Возьмем в V точку v и, пользуясь той же леммой, проведем две дуги, соединяющие ее в V с точками в кругах с центрами b_1 и b_2, не пересекающимися с C. Затем добавим два отрезка, соединяющие эти точки с b_1 и b_2. Мы получим дугу, которая лежит в V, за исключением отрезков около своих концов, и соединяет точки b_1 и b_2, минуя C, что невозможно, так как эти точки выбраны в разных компонентах дополнения к C. Значит, одна из дуг l^i, скажем, l^1, лежит в ограниченной компоненте V.

Возьмем на l^1 точку a и малый круг o с центром в a, целиком лежащий в V. Как угодно близко от a, в частности, в o, можно найти точку u из неограниченной компоненты дополнения к C.

Эту точку можно связать с как угодно далекой точкой дугой L, не пересекающейся с C. Эта дуга должна пересекать границу области V и, значит, одну из четырех дуг l_{ij}.

Но эти дуги лежат (за исключением своих концов на C) в ограниченных компонентах дополнения к C. Значит, существует дуга, которая, минуя C, соединяет точку неограниченной компоненты дополнения к C с точкой ограниченной компоненты. Это невозможно и предположение, что имеется две ограниченные компоненты, приведено к противоречию. □

7. Примеры Кнастера и фракталы. Возможно, читателю трудно допустить, что более двух областей на плоскости могут иметь совпадающую границу. Такие континуумы, которые разбивают плоскость на заданное число областей, границей каждой из которых они являются, были построены впервые польским топологом Кнастером в 1922 году. Их построение см. в книгах [8, 9]

Интересно, что такие примеры возникают в вычислительной математике. Достаточно применить алгоритм метода Ньютона для решения уравнения $z^n = 1$

на комплексной плоскости: $z_{i+1} = z_i - \dfrac{z_i^n - 1}{nz_i^{n-1}}$. Плоскость разобьется на n областей с общими границами, причем точки из одной области будут порождать последовательность, сходящуюся к одному и тому же корню из 1, а из разных областей к разным корням. Это один из простейших примеров возникновения так называемых *фракталов*.

8. Примеры Артина–Фокса. Приведем простейший пример гомеоморфного образа двумерной сферы в трехмерном пространстве, для которой не существует гомеоморфного преобразования пространства, переводящего этот образ в «круглую» сферу, т. е. для которого не выполнена теорема Шенфлиса. Впервые такой (более сложный) пример был построен в 20-х годах американским топологом Дж. Александером и называется «рогатой сферой Александера». Его построение приведено в книге Л. В. Келдыш. Большая серия разнообразных примеров была построена в 1949 году А. Артином и Р. Фоксом. Мы приведем самый простой из них. Другие примеры и подробности можно найти также в книге Л. В. Келдыш.

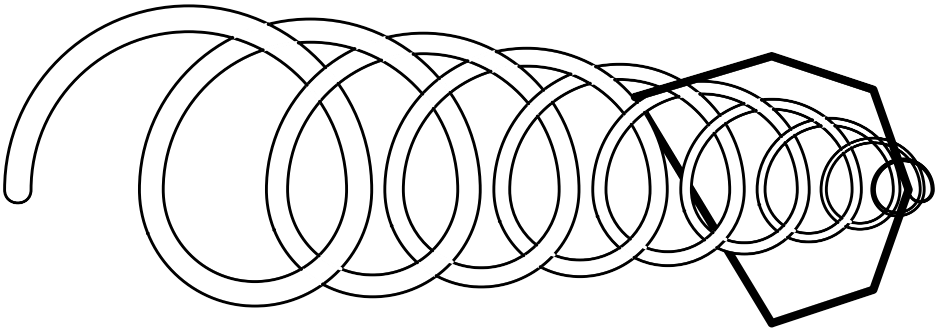

Рис. 4.

Построение примера, надеемся, ясно из рис. 4. Строится дуга, «заузленная в одном конце». Строго это означает отрицание свойства, которое называется локальной односвязностью и которое для стандартного отрезка в трехмерном пространстве удовлетворено для его конечных точек: для «заузленного конца» неверно, что для всякого положительного ε найдется такое положительное δ, что любое отображение окружности в δ-окрестность конца дуги, при котором образ не пересекает дугу, может быть продеформировано в точку в дополнении к дуге в ε-окрестности этого ее конца.

Внимательно рассмотрев рисунок, читатель сообразит, что это так и есть в данном случае. Маленькую петлю, «надетую» на дугу вблизи заузленного конца нельзя снять с дуги, не протащив ее к другому концу. Строгое доказательство требует знакомства с техникой фундаментальной группы, изложенной, в применении к такого рода примерам, в книге Л. В. Келдыш.

9. Локальная плоскостность. Правильная формулировка обобщения теоремы Шенфлиса, как видно из приведенного примера, требует определенных локальных ограничений. Можно доказать, например, что если данный гомеоморфизм сферы на подмножество K пространства можно продолжить до

гомеоморфизма окрестности каждой точки, то он может быть продолжен и до гомеоморфизма пространства на себя. Это условие называется локальной плоскостностью образа сферы.

Достаточно, как показал американский тополог Р. Бинг в 50-х годах, потребовать, чтобы ни в одной точке образа не был возможен феномен примера Артина и Фокса.

IV. Применения и история

1. Ретракции на C. В нашем доказательстве теоремы Жордана мы фактически построили ретракцию квадрата Q, содержащего C, на замыкание ограниченной компоненты $\Pi \setminus C$. Ее композиция с ретракцией Π на Q, дает ретракцию всей плоскости на это замыкание. Выкидывая из Π точки ограниченной компоненты дополнения к C, мы получаем ретракцию замыкания неограниченной компоненты на C. Добавляя точку в бесконечности и выкидывая точку из ограниченой компоненты, мы превратим ее в неограниченную компоненту. В результате получаем следующее утверждение, которое мы используем в доказательстве теоремы об инвариантности области:

Лемма. *Пусть C — гомеоморфный образ окружности S^1 на плоскости* Π*, U — ограниченная и U' — неограниченая компоненты дополнения к C. Тогда замыкание $U' \bigcup C$ неограниченной компоненты ретрагируется на C и также ретрагируется на C множество $U \bigcup C \setminus x_0$, где x_0 — произвольная точка в U.*

В n-мерном случае мы не доказали, что топологический образ $(n-1)$-мерной сферы разбивает $\mathbb{R}^n$ ровно на две компоненты. Однако, проведенное при доказательстве теоремы Жордана рассуждение (после соответствующей модификации для n-мерного случая) прямо доказывает утверждение этой леммы. Суть в том, что для остовов до размерности $(n-1)$ соответствующего разбиения на кубы не возникает препятствия при построении ретракции, а для n-мерных построения не требуется после проведения операции выметания, как в этом доказательстве.

2. Теоремы об инвариантности области и размерности $\mathbb{R}^n$. Докажем теперь, опираясь на теорему Жордана-Брауэра и теорему о неретрагируемости шара на границу, еще одну фундаментальную теорему Брауэра — *теорему об инвариантности области.* Теорема о негомеоморфности пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^k$ при $k \neq n$ является ее прямым следствием.

Теорема. *Если $h : U \to V$ — гомеоморфное отображение открытого подмножества $U \subset \mathbb{R}^n$ на подмножество $V \subset \mathbb{R}^n$, то V также является открытым подмножеством R^n.*

Доказательство. Компоненты открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$ открыты. Поэтому можно считать, что U связно. Тогда связно и V.

Пусть $x_0 \in U$ и $y_0 = h(x_0) \in V$. Возьмем малый шар $B \subset U$ с центром в x_0 и границей S. Рассмотрим $C = h(S)$ и покажем, что y_0 лежит в ограниченной компоненте дополнения к C, которая целиком лежит в V. Отсюда будет вытекать, что y_0 — внутренняя точка V и, значит, V — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$.

Во-первых, образ $\operatorname{Int} B$ целиком лежит в одной компоненте, скажем W, дополнения к C, в силу связности.

Если W не лежит в V, то имеется точка $z \in W$, которая не принадлежит V и, значит, образу B. Поэтому, если мы построим ретракцию $(W \setminus z) \bigcup C$ на C, то с помощью h она перейдет в ретракцию B на S, которой не существует.

Теорема доказана. □

3. Теорема Жордана и топологическая характеризация двумерных поверхностей.

Теорема Уайлдера. *Локально связный континуум, содержащий простую замкнутую кривую, разбивающийся каждой своей простой замкнутой кривой и не разбивающийся никакой своей парой точек, гомеоморфен сфере.*(См. книгу Уайлдера «Топология многообразий» [11]).

Континуум *локально связен*, если каждая его точка имеет в каждой своей окрестности связную окрестность. В классе таких континуумов двумерные многообразия выделяются тем, что они не разбиваются парами точек и теорема Жордана справедлива для них локально, т. е. каждая *достаточно малая* простая замкнутая кривая их разбивает.

Между собой компактные двумерные многообразия различаются, грубо говоря, тем, сколько можно провести непересекающихся замкнутых кривых, объединение которых не разбивает многообразия (род многообразия). Мы не приводим деталей определений, так как этот материал хорошо доступен в различной учебной литературе. (См., например, книгу Дж. Масси, Дж. Столлингс «Алгебраическая топология» [17].)

Одномерные многообразия (т. е. интервалы, окружность и их дизъюнктные объединения) характеризуются также с помощью понятия «разбивать». Например, окружность характеризуется как локально связный континуум, который не разбивается одной, но разбивается двумя своими точками.

4. Приведем теперь краткий обзор различных доказательств теоремы Жордана и сопутствующих утверждений за ее столетнюю историю.

Первое упоминание о свойстве замкнутой кривой без самопересечений можно отметить в работе Неймана 1865 года. Первое доказательство было дано Жорданом в 1887 году. Оно основывалось на аппроксимации кривой с двух сторон полигональными кривыми, для которых утверждение Жордан считал очевидным и не доказывал. Однако, его дальнейшие рассуждения также были не полны. Фактически он показал, что полигоны можно построить так, что каждая точка данной кривой будет ε-близка к одному из них, а требовалось доказать, что близость будет к обоим полигонам. Тем не менее его доказательство может быть доведено до конца. По существу это было сделано Шенфлисом в 1906 году на основе анализа понятия достижимой точки (т. е. точки кривой, для которой имеется полигональная кривая, пересекающаяся с данной кривой только в этой точке). При этом Шенфлис дал существенное усиление результата Жордана, о котором сказано выше.

Первое строгое доказательство было дано годом раньше Вебленом, который также анализировал понятие достижимости.

Доказательство, данное Брауэром в 1910 году, привело Дж. Александера к идее доказательства, основанного на гомологических свойствах множеств. Суть состоит в том, что если два множества связны и пересекаются по двум связным множествам, то их объединение разбивает плоскость на две компоненты.

В дальнейшем теорема Жордана доказывалась много раз. Обзор имеется в статье Достала и Тиндела [7]. Мы даем неполный список, стараясь привести более или менее оригинальные работы. В основном доказательства следовали либо пути Жордана – Шенфлиса, т. е. аппроксимации полигонами, либо пути Александера, т. е. гомологическому. Автору представляется, что доказательство, данное здесь, является новым.

Оригинальный метод доказательства теоремы Жордана был найден Э. Мойсом [15]. В [16] он был усовершенствован японским математиком Р. Маехара. Метод опирается на следующую лемму, которую Маехара сводит к теореме о неподвижной точке, но которую нетрудно доказать непосредственно: если в прямоугольнике две дуги соединяют пары точек на противоположных сторонах, то они пересекаются.

Простой замкнутый контур C может быть представлен в виде суммы двух дуг u и d (верхняя и нижняя), соединяющих две точки в прямоугольнике на паре противоположных сторон. На отрезке I, соединяющем другую пару сторон, возьмем отрезок с одним концом на u так, что ниже этого конца точек u нет. Тогда точки этого отрезка лежат в ограниченной компоненте дополнения к C, так как иначе легко строится дуга, соединяющая концы I и не пересекающая одну из дуг u или d в противоречие с леммой.

Это изящное рассуждение, однако, не переносится на многомерный случай.

По-видимому, доказательство, данное Александером, привело его к идее обобщения теоремы Жордана – Брауэра на подмножества сферы произвольной размерности — к теореме *двойственности Александера.* Теперь этот результат является элементарным следствием точной последовательности пары и двойственности Пуанкаре. В 1927 году Понтрягин сделал существенное добавление к этому результату, показав, что двойственность Александера реализуется как двойственность зацепления. Грубо говоря, каждому k-мерному циклу в подмножестве сферы отвечает в дополнении к этому подмножеству (однозначно с точностью до гомологии) цикл дополнительной размерности $n-k-1$, зацепленный с данным. В случае теоремы Жордана - Брауэра основному циклу $(n-1)$-мерной сферы отвечает в дополнении цикл из двух точек (по одной в каждой компоненте).

Список литературы

[1] *Camille Jordan.* Cours d'Analyse, 1887, 1893.

[2] *Schoenflies A.* Beiträge zur Theorie der Punktenmenge // Math. Ann. Bd. 62, 1906. P. 86-328.

[3] *Veblen O.* Theory of plane curves in nonlinear analysis situs // Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 6, 1905. P. 83-98.

[4] *Alexander J. W.* A proof and extension of the Jordan–Brouwer separation theorem // Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 23, 1922. P. 333-349.

[5] *Brouwer L. E. J.* Beweis des Jordanschen Kurvensatzes // Proc. d. Akad. Wet. Amsterdam. Bd. 12, 1910.

[6] *Brouwer L. E. J.* Über den natürlichen Dimensionsbegriff // Journ. f. Math. Bd. 142, 1913, 146-152.

[7] *Dostal M., Tindell R.* The Jordan Curve Theorem Revisited // Jahresber. Deutsche Math. Ver. Bd. 80, 1978, 111-128.

[8] *Пархоменко А. С.* Что такое линия? М., 1954. С. 140.

[9] *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М., 1977. С. 127.

[10] *Келдыш Л. В.* Топологические вложения в евклидово пространство // Труды МИАН, №81, 1966.

[11] *Wilder R. L.* Topology of manifolds. 1949.

[12] *Вольперт А. И.* Элементарное доказательство теоремы Жордана // УМН. Т. 5, вып. 5, 1950. С. 168–172.

[13] *Филиппов А. Ф.* Элементарное доказательство теоремы Жордана // УМН. Т. 5, вып. 5, 1950. С. 173-176.

[14] *van Kampen E. R.* On some characterizations of 2-manifolds // Duke Math. J. Vol 1, 1935. P. 74-93.

[15] *E. Moise.* Geometric Topology in Dimensions 2 and 3. 1977.

[16] *R. Maehara.* The Jordan curve theorem via the Brouwer fixed point theorem // Amer. Monthly. Vol 91, 1984. P. 641–643.

[17] *Масси У., Столлингс Дж.* Алгебраическая топология. Введение. М.: Мир, 1977.