

О разбиении множеств на части меньшего диаметра: теоремы и контрпримеры

М. Л. Гервер

Диаметром ограниченного множества M называется *наименьшее* число D , обладающее тем свойством, что *для любых двух точек из M расстояние между ними не превосходит D* . В частности, для множеств M , состоящих из конечного числа точек, диаметр D равен *наибольшему из попарных расстояний между точками M* .

Нетрудно проверить, что любую фигуру (любое ограниченное множество) на плоскости *можно разбить на три части меньшего диаметра*^{<1>*} и что некоторые плоские фигуры *нельзя разбить на две части меньшего диаметра*.

Простейшая из таких фигур состоит из трех точек — трех вершин правильного треугольника. Четыре вершины правильного тетраэдра дают аналогичный пример множества в трехмерном пространстве (его нельзя разбить на три части меньшего диаметра), а $d+1$ вершин правильного d -мерного симплекса — пример множества, которое нельзя разбить на d частей меньшего диаметра.

ГИПОТЕЗА БОРСУКА

В 1933 г. польский математик Карол Борсук высказал гипотезу:

Любое ограниченное множество в трехмерном пространстве можно разбить на четыре части меньшего диаметра. И вообще: любое ограниченное множество в d -мерном пространстве можно разбить на $d+1$ частей меньшего диаметра.

В 1955 г. Х. Эгглстон и в 1957 г. Б. Грюнбаум и А. Хеппеш доказали гипотезу Борсука при $d=3$. А еще раньше она нашла подтверждение для всех центрально-симметричных множеств и всех *гладких выпуклых тел*^{<2>} (Г. Хадвигер, 1946 г.) [1].

Так как выпуклая оболочка любого ограниченного множества M имеет тот же диаметр, что и само множество M , то предположение о выпуклости *не является ограничением*: гипотезу Борсука достаточно проверить для выпуклых множеств. Казалось бы, оставалось сделать немного — избавиться от допущения о *гладкости* ...

КОНТРПРИМЕРЫ К ГИПОТЕЗЕ БОРСУКА

Однако в 1993 г. случилось неожиданное: Д. Кан и Г. Калаи построили контрпример к гипотезе Борсука при $d=1325$ и для всех $d > 2014$ [2].

*¹Здесь и далее ссылки типа <1> отсылают к Комментариям — заключительному разделу статьи, расположенному перед Приложениями 1–3.

В [3] и [4] были построены новые контрпримеры — при $d = 946$ и $d = 561$ ^{<3>}.

Ниже предлагается модификация этих контрпримеров. Будет показано, что гипотеза Борсука неверна при всех $d \geq 561$. Кроме того, будет приведено новое — более простое, чем прежние, — доказательство гипотезы Борсука при $d = 3$. Вопрос «Что верно — теорема или контрпример — при $4 \leq d \leq 560$?» остается открытым.

ИДЕЯ КОНТРПРИМЕРА

Положим $d = 561$ и построим конечное множество $Y \subset \mathbb{R}^d$ диаметра D , которое нельзя разбить на $d + 1$ частей диаметра меньше D .

Множество Y будет состоять из $|Y| = H$ точек. Превратим Y в граф Γ , соединяя вершины $y, y' \in Y$ ребром в том и только в том случае, когда $|yy'| < D$, и исследуем клики, или полные подграфы графа Γ , т. е. такие подграфы, в которых каждые две вершины соединены ребром. Нам удастся оценить число q вершин максимальной (содержащей наибольшее возможное число вершин) клики графа Γ , указав такое Q , что

$$q \leq Q, \quad H/Q > d + 1. \quad (1)$$

Из (1), очевидно, следует ^{<4>}: если множество Y разбито на части, диаметр каждой из которых меньше D , то число таких частей обязательно больше $d + 1$, так что Y — контрпример к гипотезе Борсука.

ПЛАН ПОСТРОЕНИЯ КОНТРПРИМЕРА

Возьмем $n = 33$, так что $d = 561 = C_{n+1}^2$. Наряду с множеством $Y \subset \mathbb{R}^d$ будет построено вспомогательное множество $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Введем в \mathbb{R}^{n+1} прямоугольную систему координат x_0, x_1, \dots, x_n , рассмотрим куб с вершинами $\{x_j\}_{j=0}^n$, $x_j = \pm 1$, и определим X как следующее подмножество вершин n -мерной грани $x_0 = 1$ этого $(n + 1)$ -мерного куба $[-1, 1]^{n+1}$:

Вершина $\{x_j\}_{j=0}^n$, $x_j = \pm 1$, принадлежит к X , если $x_0 = 1$ и число минус единиц среди $\{x_j\}_{j=1}^n$ четно: $\prod_{j=1}^n x_j = 1$. Тем самым X состоит из $2^{n-1} = 2^{32}$ точек ^{<5>}.

Столько же точек будет и в Y : $|X| = |Y| = H = 2^{n-1} = 2^{32}$. При этом Y будет подмножеством вершин d -мерного куба с вершинами $\{y_k\}_{k=1}^d$, $y_k = \pm 1$: $Y \subset [-1, 1]^d$.

Между X и Y будет установлено такое взаимно однозначное соответствие

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \longleftrightarrow y, \quad x' = (x'_0, x'_1, \dots, x'_n) \longleftrightarrow y', \quad (2)$$

что максимально удаленным друг от друга — находящимся на расстоянии D — точкам $y, y' \in Y$ будут соответствовать $x, x' \in X$ со скалярным произведением ± 2 :

$$(x, x') = x_0 x'_0 + x_1 x'_1 + \dots + x_n x'_n = \pm 2 \longleftrightarrow |yy'| = D. \quad (3)$$

Именно соответствие (2) со свойством (3) позволит проверить неравенства (1).

С этой проверки мы и начнем, а уже потом построим множество Y и установим между X и Y соответствие (2), удовлетворяющее условию (3).

МАКСИМАЛЬНАЯ КЛИКА ГРАФА Γ

Ввиду (2), (3), граф Γ можно получить по-новому (не из Y , а из X), соединив ребрами все пары $x, x' \in X$, для которых скалярное произведение $(x, x') \neq \pm 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Все прочие значения (x, x') при $x \neq x'$ — это^{<6>} числа $\pm 6, \pm 10, \pm 14, \pm 18, \pm 22, \pm 26$ и ± 30 , а скалярный квадрат (x, x) равен 34. Итак, в графе Γ две различные вершины x и x' соединяются ребром тогда и только тогда, когда

$$(x, x') = \pm 6, \pm 10, \pm 14, \pm 18, \pm 22, \pm 26, \pm 30. \quad (4)$$

Положим $Q = \sum_{k=0}^7 C_{33}^k$ (вскоре станет ясно, откуда берется это число) и докажем, что число вершин q максимальной клики $\{a_1, \dots, a_q\}$ графа Γ не превосходит Q .

МНОГОЧЛЕНЫ g_1, \dots, g_q

Каждой вершине $a_j, 1 \leq j \leq q$, сопоставим многочлен $g_j(x)$ по следующему правилу. Фиксируем a_j . При $x = (x_0 = 1, x_1, \dots, x_n) \in X$ обозначим через $s = s_j(x)$ скалярное произведение (a_j, x) и положим

$$F(s) = (s+6)(s+10)(s+14)(s+18)(s+22)(s+26)(s+30), \\ G_j(x) = F(s_j(x)), \quad 1 \leq j \leq q. \quad (5)$$

Записав $G_j(x)$ в виде линейной комбинации одночленов и последовательно применяя соотношение $x_i^2 = 1, 1 \leq i \leq n$,^{<7>} получаем новый, равный $G_j(x)$ на X , многочлен $g_j(x)$, являющийся целочисленной линейной комбинацией функций

$$x_{j_1}^{h_1} x_{j_2}^{h_2} \dots x_{j_7}^{h_7}, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_7 \leq n = 33, \quad h_m = 0 \text{ или } 1, \quad 1 \leq m \leq 7. \quad (6)$$

Всего в (6), очевидно, имеется Q функций, образующих базис, $Q = \sum_{k=0}^7 C_{33}^k$, и неравенство $q \leq Q$ будет доказано, если установить, что многочлены g_1, \dots, g_q линейно независимы над кольцом целых чисел, т.е. если проверить, что тождество

$$c_1 g_1(x) + \dots + c_q g_q(x) \equiv 0, \quad \text{где } c_1, \dots, c_q \text{ — целые числа,} \quad (7)$$

возможно лишь тогда, когда все коэффициенты c_1, \dots, c_q в (7) равны нулю^{<8>}.

ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ g_1, \dots, g_q

Многочлен $F(s)$ в (5) выбран так, что среди чисел $s = (x, x')$ из (4) все $s < 0$ являются корнями $F(s)$, а все $s > 0$ таковы, что $F(s)$ делится на 27: $F(s) \equiv 0 \pmod{27}$ при $s = 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30$; последнее свойство легко проверяется с помощью таблицы 1, содержащей все кратные числу 3 сомножители $F(s)$ для указанных значений s . Из той же таблицы видно, что $F(34) \not\equiv 0 \pmod{27}$. В терминах $g_j(x)$ для x из клики $\{a_1, \dots, a_q\}$ перечисленные свойства $F(s)$ означают:

$$\text{Если } j \neq k, \text{ то } g_j(a_k) \equiv 0 \pmod{27}; \quad g_j(a_j) \not\equiv 0 \pmod{27}. \quad (8)$$

Линейная независимость $g_1(x), \dots, g_q(x)$ легко следует отсюда: допустим, что в (7) не все c_j равны нулю, и докажем, что это допущение противоречит (8).

s	$s + 6$	$s + 10$	$s + 14$	$s + 18$	$s + 22$	$s + 26$	$s + 30$
6	12			24			36
10			24			36	
14		24			36		
18	24			36			48
22			36			48	
26		36			48		
30	36			48			60
34			48			60	

Таблица 1.

Дополнительно предположим, что не все c_j кратны числу 3 (если это не так, можно разделить все c_j на общий множитель). Пусть, для определенности, c_1 не делится на 3. Подставляя в (7) $x = a_1$, получаем: $c_1g_1(a_1) + \dots + c_qg_q(a_1) \equiv 0$. Так как, ввиду (8),

$c_2g_2(a_1) + \dots + c_qg_q(a_1) \equiv 0 \pmod{27}$, то, тем самым, и $c_1g_1(a_1) \equiv 0 \pmod{27}$, а значит, снова ввиду (8), $c_1 \equiv 0 \pmod{3}$, — противоречие.

Итак, неравенство $q \leq Q$ (первое из неравенств (1)) доказано. Второе из неравенств (1) проверяется непосредственным подсчетом:

$$H = 2^{32} = 4\,294\,967\,296, \quad Q = \sum_{k=0}^7 C_{33}^k = 5\,663\,890, \quad H/Q > 758. \quad (9)$$

Таким образом, для обоснования контрпримера остается построить множество Y и установить между X и Y соответствие (2), удовлетворяющее условию (3).

СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ X И Y

Пусть, как и прежде, $n = 33$. Построим квадратную таблицу $(n+1) \times (n+1)$. Ее строки и столбцы занумеруем числами $i, j = 0, 1, \dots, n$. Рассмотрим клетки (i, j) в верхней половине таблицы (над диагональю (i, i) , $0 \leq i \leq n$, идущей из левого верхнего в правый нижний угол). Их число равно $d = (34 \cdot 34 - 34)/2 = C_{34}^2 = 561$.

Произвольно фиксируем $x = \{x_j\}_{j=0}^n \in X$ и в клетку на пересечении строки с номером $i - 1$ и столбца с номером j поместим произведение $x_{i-1}x_j$, $1 \leq i \leq j \leq n$. Эти произведения объявим координатами y_k , $1 \leq k = k(i, j) \leq d$, точки $y = y(x) \in Y$.

Поочередно перебрав так все $x \in X$, получаем некоторое множество Y , являющееся подмножеством вершин d -мерного куба $[-1, 1]^d$. Так как $x_0 = 1$ для любого $x \in X$, то $y_{k(1,j)} = x_j$ при всех $j = 1, \dots, n$, т.е. одновременно установлено взаимно однозначное соответствие (2) между X и Y . Докажем, что оно удовлетворяет условию (3).

Квадрат расстояния между $y = \{y_k\}$ и $y' = \{y'_k\}$ равен сумме квадратов разностей $y_k - y'_k$, $1 \leq k \leq d$. Каждое слагаемое в этой сумме равно либо 0 (если $y_k = y'_k$), либо 4 (если $y_k \neq y'_k$), т.е. расстояние между y и y' тем больше,

чем больше несовпадающих y_k и y'_k . Без ограничения общности можно считать, что первые s координат x_j и x'_j совпадают (включая $x_0 = x'_0 = 1$), а остальные $n + 1 - s$ координат различны.

Эквивалентное допущение (сравним с $\langle 6 \rangle$):

- а) все x_j (а значит, и все y_k) равны 1,
 б) первые s координат x'_j равны 1, а остальные $n + 1 - s$ координат x'_j равны -1 . Тогда расстояние между y и y' тем больше, чем больше координат y'_k , равных -1 .

При условиях а) и б) координаты $y'_k = -1$ заполняют прямоугольник в верхней половине нашей таблицы. «Площадь» этого прямоугольника (число *минус единиц* в нем) тем больше, чем больше он похож на квадрат. В точности квадрат получится не может $\langle 9 \rangle$, а прямоугольник, наиболее похожий на квадрат, получается, если $s = 18$, $n + 1 - s = 16$, либо $s = 16$, $n + 1 - s = 18$ (т. е. если $(x, x') = \pm 2$).

Итак, расстояние $|yy'|$ между вершинами $y = y(x)$, $y' = y(x') \in Y$ тогда и только тогда равно диаметру D множества Y , когда скалярное произведение $(x, x') = \pm 2$.

Построение контрпримера Y закончено. Трактую Y как подмножество d -мерного пространства при $561 \leq d \leq 757$, вследствие (9) получаем, что гипотеза Борсука неверна при всех d , $561 \leq d \leq 757$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вскоре нам понадобится точное значение диаметра D множества Y :

$$D^2 = 4 \cdot 16 \cdot 18, \quad D = \text{diam } Y = 24\sqrt{2}. \quad (10)$$

КЛИКА, СОДЕРЖАЩАЯ Q ВЕРШИН

Неравенство $q \leq Q$ (связывающее число многочленов g_1, \dots, g_q с числом Q многочленов в базисе (6)), служит, оказывается, точной (*неулучшаемой*) оценкой числа вершин максимальной клики графа Γ : опираясь на (4), предъявим клику Π графа Γ , содержащую в точности Q вершин.

Для каждой точки $x = \{x_j\}_{j=0}^n \in X$ среди x_j имеется p координат, равных $+1$, и m координат, равных -1 , где $p > 0$ и $m \geq 0$ — четные числа, $p + m = n + 1$, так что

$$m = 0, 2, \dots, n - 1 = 32. \quad (11)$$

В соответствии с (11) рассмотрим подмножества X_m множества X , $m = 0, 2, \dots, \dots, 32$. К X_0 относится одна точка: все $x_j = 1$; к X_2 относятся C_{33}^2 точек: все x_j , кроме двух, равны 1; к X_4 относятся C_{33}^4 точек: все x_j , кроме четырех, равны 1 и т. д.

Нетрудно проверить, что подграф Π , содержащий все вершины

$$x \in X_0 \cup X_2 \cup X_4 \cup X_6 \cup X_{26} \cup X_{28} \cup X_{30} \cup X_{32}, \quad (12)$$

является кликой: $(x, x') \neq \pm 2$ для любых $x, x' \in \Pi$. При этом число вершин (12) равно $Q = \sum_{k=0}^7 C_{33}^k$ (поскольку $C_{33}^k = C_{33}^{33-k}$, $k = 32, 30, 28, 26$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Хотя сама оценка $q \leq Q$ неулучшаема, можно попытаться усовершенствовать способ ее применения: вряд ли при разбиении графа Γ на клики *все они* могут оказаться максимальными, содержащими — *каждая* — по

Q вершин, так что здесь, видимо, есть потенциальная возможность построить контрпример в \mathbb{R}^d для размерностей $d < 561$ ^{<10>}.

РАЗМЕРНОСТИ $d \geq 860$

Вместо пары $(n = 33, d = 561)$ рассмотрим пару $(n = 41, d = 861)$. Так же, как прежде ^{<11>}, построим множества $X \subset [-1, 1]^{41}$, $Y \subset [-1, 1]^{861}$, $|Y| = |X| = H = 2^{40}$, при этом — вместо (9) — получатся следующие соотношения:

$$Q = \sum_{k=0}^9 C_{41}^k = 473\,732\,328, \quad H = 2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776, \quad H/Q > 2\,320. \quad (13)$$

Поскольку Y можно трактовать как подмножество \mathbb{R}^d при $861 \leq d \leq 2\,319$, то из неравенства (13) следует, что гипотеза Борсука неверна при всех d , $861 \leq d \leq 2\,319$, а также при $d = 860$ ^{<12>}. Значит, с учетом [2], она неверна при всех $d \geq 860$.

Итак, контрпримеры к гипотезе Борсука построены при всех d , $561 \leq d \leq 757$ и $d \geq 860$. До августа 1998 г. вопрос «Что верно — теорема или контрпример — при $757 < d < 860$?» оставался открытым.

РЕЗУЛЬТАТЫ ШКОЛЬНИКОВ — ПОБЕДИТЕЛЕЙ XIX ТУРНИРА ГОРОДОВ

В августе 1998 г. в Гамбурге состоялась X летняя конференция Турнира Городов ^{*}). На конференции я предложил ее участникам, победителям XIX Турнира Городов, ряд задач о разбиении множеств на части меньшего диаметра, включая некоторые нерешенные вопросы (в том числе, о размерностях d , $757 < d < 860$).

В Гамбурге украинские школьники Руслан Батршин и Максим Давыдов (г. Львов) нашли новое — более простое, чем прежние, — доказательство гипотезы Борсука при $d = 3$ (доказательство приведено в конце этой статьи, см. Приложение 3).

А вскоре после конференции школьники Дима Гуревич (г. Тель-Авив, Израиль) и Саша Гайфуллин (г. Жуковск, Россия) независимо друг от друга получили ответ на вопрос о размерностях d , $757 < d < 860$: для всех этих d они построили контрпримеры к гипотезе Борсука. Их построение базируется на следующей, совсем простой, лемме:

ЛЕММА. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB ($|AB| = D$) и катеты AC и BC ($|AC| = r$, $|BC| = R$) связаны соотношением $r \leq R$, или, что то же самое, $2r^2 \leq D^2$. Пусть точка T катета BC такова, что $|TA| = |TB| = \rho$. Тогда $2\rho^2 \leq D^2$.

Лемма сразу следует из подобия треугольников ABC и TBS , где S — середина AB (рис. 1), а применение ее основано на том, что Y (наш 561-мерный контрпример к гипотезе Борсука) лежит на 560-мерной сфере радиуса r ($r^2 = 561$) и, с учетом (10), r и $\text{diam } Y = D$ связаны соотношением $2r^2 \leq D^2$ ($r^2 = 561 = 17 \cdot 33 < 18 \cdot 32 = D^2/2$).

^{*}Подробный рассказ о Турнире Городов (международном математическом соревновании школьников старших классов, которое проводится, начиная с 1980 г.) можно найти в [5].



Рис. 1.

Точная формулировка утверждения Д. Гуревича–А. Гайфуллина такова:

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть множество M диаметра D лежит в k -мерном пространстве на $(k-1)$ -мерной сфере с радиуса r , причем

$$r^2 \leq D^2/2, \quad (14)$$

и пусть M является контрпримером к гипотезе Борсука: M нельзя разбить на $k+1$ частей, диаметр каждой из которых меньше D . Тогда контрпример к гипотезе Борсука в \mathbb{R}^d можно построить при любом $d > k$.

Доказательство утверждения. На рис. 1 $(k-1)$ -мерная сфера условно изображена в виде окружности радиуса r . Множество $M = M_1$ диаметра D (контрпример к гипотезе Борсука в \mathbb{R}^k) лежит на s , причем $2r^2 \leq D^2$. Добавляя одну размерность и добавляя к M_1 одну точку N , расположенную на расстоянии D от всех точек s , получаем множество $M_2 \in \mathbb{R}^{k+1}$, которое по-прежнему имеет диаметр D и которое, очевидно^{<13>}, нельзя разбить на $k+2$ части диаметра меньше D .

Тем самым, M_2 является контрпримером к гипотезе Борсука в \mathbb{R}^{k+1} .

Так как (по лемме) M_2 лежит на k -мерной сфере, для радиуса которой выполняется (14), то добавление — по одной — новых точек (с увеличением размерности на единицу) можно продолжить по индукции.

А. Гайфуллин доказал также^{<14>}, что доказанное утверждение остается верным, если заменить в нем (14) неравенством

$$r^2 \leq 3D^2/4. \quad (15)$$

НЕКОТОРЫЕ НЕРЕШЕННЫЕ ВОПРОСЫ

Несмотря на успехи последних лет, остается ряд нерешенных вопросов, связанных с задачей Борсука. Вот — основные два из них:

1. Что верно — теорема или контрпример — при $4 \leq d \leq 560$?

2. Обозначим через $f(d)$ минимальное из таких чисел m , что любое ограниченное множество в d -мерном пространстве можно разбить на m частей меньшего диаметра. В [2] получена оценка $f(d) \geq (1,2)^{\sqrt{d}}$, начиная с некоторого d . Недавно она уточнена в [7]: существует такая функция $r(d)$, $1 \leq r(d) = o(e^{\sqrt{d}})$, что

$$f(d) \geq r(d) \cdot (2/\sqrt{3})^{\sqrt{2d}} \geq (1,2255)^{\sqrt{d}}.$$

Как на самом деле растет $f(d)$ с ростом d ?

КОММЕНТАРИИ

1. Пусть M — произвольное множество диаметра D на плоскости. Проведем горизонтальную прямую L_1 , содержащую хотя одну граничную точку M и такую, что *над* L_1 нет точек M . *Под* L_1 параллельно L_1 проведем прямую L'_1 на расстоянии D от L_1 . Под L'_1 , очевидно, нет точек M , т.е. мы заключили M в полосу P_1 ширины D .

Построив так же еще 2 полосы P_2 и P_3 ширины D , расположенные под углом 60° к P_1 , заключим M в 6-угольник S (являющийся пересечением трех полос ширины D).

У такого 6-угольника S противоположные стороны попарно параллельны, а длины сторон a и b ($a \leq b$) чередуются: $a - b - a - b - a - b$. Опуская из центра S перпендикуляры на стороны длины b , мы разбиваем S (а значит, и M) на три части диаметра меньше D , рис. 2.

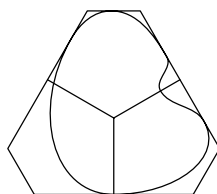


Рис. 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Стандартное решение этой задачи содержит дополнительный шаг: вращая 6-угольник S , добиваются, чтобы он стал правильным. Для разбиения S и M на 3 части диаметра меньше D этот шаг не нужен. Другие решения см. в Приложении 1.

2. Через каждую граничную точку выпуклого множества V в трехмерном пространстве можно провести *хотя бы одну опорную плоскость* (т.е. такую плоскость, что V лежит по одну сторону от нее). Через вершину выпуклого многогранника (например, через вершину куба) проходит бесконечно много опорных плоскостей. Выпуклое множество (или выпуклое тело) V называется *гладким*, если через каждую граничную точку V проходит *единственная* опорная плоскость.

В Приложении 2 доказано, что любое *гладкое* выпуклое тело в трехмерном пространстве можно разбить на 4 части меньшего диаметра.

Теорема Хадвигера в d -мерном случае доказывается аналогично.

3. В [3] контрпримеры построены для всех размерностей $d = C_{4p}^2$, где p — простое число, большее или равное 11; в частности, при $p = 11$ получается $d = 946 = C_{44}^2$.

4. Как бы ни разбить множество Y , состоящее из N точек, на $d + 1$ частей Y_1, \dots, Y_{d+1} , хотя бы в одной из них (скажем, в Y_j) окажется, ввиду (1), больше, чем q точек; значит, Y_j не является кликой графа Γ , и — по определению графа Γ — в Y_j найдутся точки y, y' , отстоящие друг от друга на расстояние $D = \text{diam } Y$. Тем самым диаметр Y_j равен диаметру Y , т.е. (1) дает контрпример к гипотезе Борсука.

5. Знаки $\{x_j\}_{j=1}^{32}$ выбираются произвольно, а знак x_{33} определяется однозначно — так, чтобы $\prod_{j=1}^{33} x_j = 1$. Тем самым X состоит из 2^{32} точек.

6. Для любых $x = \{x_j\}$ и $x' = \{x'_j\}$ из X скалярное произведение

$$(x, x') = x_0 x'_0 + x_1 x'_1 + \dots + x_n x'_n,$$

очевидно, совпадает со скалярным произведением (e, e') , где $e = \{e_j\}$ и $e' = \{e'_j\}$ — точки в \mathbb{R}^{n+1} с координатами e_j , тождественно равными 1, и координатами e'_j , равными $x_j x'_j$ при всех j . Обе точки — и e , и e' — принадлежат X , поскольку

$$e_0 = e'_0 = 1 \quad \text{и} \quad \prod_{j=1}^n e'_j = \prod_{j=1}^n x_j \cdot \prod_{j=1}^n x'_j = 1.$$

Если $e'_j = 1$ при всех j , то $(e, e') = 34$; если $e'_j = 1$ при всех j , кроме двух, то $(e, e') = 30$; если $e'_j = 1$ при всех j , кроме четырех, то $(e, e') = 26$ и т. д.

7. Напомню: все $x_i = \pm 1$, поэтому $x_i^2 = 1$, $1 \leq i \leq n$.

8. Каждый из многочленов $g_j(x)$ является линейной комбинацией с целыми коэффициентами одночленов (6), т.е. одночленов

$$1, x_1, x_2, \dots, x_n, x_r x_s \ (1 \leq r < s \leq n), x_r x_s x_t \ (1 \leq r < s < t \leq n), \dots$$

Обозначим их e_1, e_2, \dots, e_Q , где $Q = \sum_{k=0}^7 C_n^k$, $n = 33$.

Смысл каждого слагаемого в этой сумме ясен: $C_{33}^0 = 1$ — имеется 1 одночлен, тождественно равный 1; $C_{33}^1 = 33$ одночлена являются линейными функциями; C_{33}^2 одночленов — попарные произведения $x_r x_s$, $1 \leq r < s \leq n$; C_{33}^3 одночленов — произведения $x_r x_s x_t$, $1 \leq r < s < t \leq n$; и т. д.

В этих обозначениях

$$g_j(x) = K_{1,j} e_1 + \dots + K_{Q,j} e_Q, \quad K_{1,j}, \dots, K_{Q,j} \text{ — целые числа, } 1 \leq j \leq q.$$

Если показать, что *тождество (7) возможно только при том условии, что все коэффициенты c_1, \dots, c_q равны нулю*, то для тех, кто знает линейную алгебру, неравенство $q \leq Q$ становится очевидным:

$$e_1, \dots, e_Q \text{ образуют базис из } Q \text{ элементов, и число элементов } q \text{ в системе линейно независимых } g_1, \dots, g_q \text{ не может быть больше } Q.$$

Докажем неравенство $q \leq Q$, не опираясь на этот факт. Переписывая (7) в виде

$$c_1(K_{1,1}e_1 + \dots + K_{Q,1}e_Q) + \dots + c_q(K_{1,q}e_1 + \dots + K_{Q,q}e_Q) = \\ (c_1K_{1,1} + \dots + c_qK_{1,q})e_1 + \dots + (c_1K_{Q,1} + \dots + c_qK_{Q,q})e_Q \equiv 0,$$

видим, что (7) выполняется тогда и только тогда, когда

$$c_1K_{i,1} + \dots + c_qK_{i,q} = 0 \quad \text{при всех } i, 1 \leq i \leq Q. \quad (16)$$

Будем трактовать (16) как систему Q линейных уравнений с целыми коэффициентами $K_{i,j}$ относительно q неизвестных c_1, \dots, c_q . Задача будет решена, если показать, что при условии $q > Q$ (т.е. при условии, что неизвестных больше, чем уравнений) система (16) имеет ненулевое целочисленное решение c_1, \dots, c_q .

А это, действительно, так, поскольку для любой совместной (имеющей хоть одно решение) системы уравнений верно следующее более общее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Совместная система Q линейных уравнений с рациональными коэффициентами и рациональными правыми частями имеет ненулевое решение в рациональных числах, если неизвестных больше, чем уравнений.

При $Q = 1$ утверждение очевидно, и остается доказать его по индукции при $Q > 1$.

Рассмотрим систему Q уравнений относительно неизвестных X_1, \dots, X_q , $q > Q$, с рациональными коэффициентами $R_{i,j}$ и рациональными правыми частями R_i , $1 \leq i \leq Q$, $1 \leq j \leq q$:

$$\begin{aligned} R_{1,1}X_1 + \dots + R_{1,q}X_q &= R_1, \\ R_{2,1}X_1 + \dots + R_{2,q}X_q &= R_2, \\ \dots & \\ R_{Q,1}X_1 + \dots + R_{Q,q}X_q &= R_Q. \end{aligned}$$

Пусть система совместна и не все $R_{i,j}$ равны 0 (случай $R_{i,j} \equiv 0$ и $R_i \equiv 0$ тривиален). Можно считать (если нужно, изменив нумерацию уравнений и неизвестных), что $R_{1,1} \neq 0$. Вычитая первое уравнение, умноженное на $R_{i,1}/R_{1,1}$ из уравнения с номером i , $2 \leq i \leq Q$, исключим X_1 из всех уравнений, кроме первого, и перейдем к системе

$$\begin{aligned} R_{1,1}X_1 + R_{1,2}X_2 + \dots + R_{1,q}X_q &= R_1, \\ r_{2,2}X_2 + \dots + r_{2,q}X_q &= r_2, \\ \dots & \\ r_{Q,2}X_2 + \dots + r_{Q,q}X_q &= r_Q. \end{aligned}$$

По предположению индукции существуют рациональные, не все равные нулю, числа X_2, \dots, X_q , $q > Q$, удовлетворяющие всем уравнениям, кроме первого; подставляя их в первое уравнение, находим также и X_1 .

Для однородных (с правыми частями $R_i = 0$) уравнений из доказанного утверждения следует существование ненулевого целочисленного решения.

9. Квадрат получился бы при $s = n + 1 - s = 17$, но s должно быть четным, поскольку $x \in X$.

10. Если — вместо пары $(n = 33, d = 561)$ — попробовать рассмотреть пару $(n = 29, d = 435)$, то — вместо таблицы, использованной при исследовании свойств многочлена $F(s)$ из (5), — получается таблица 2, или, что то же, табли-

s	$s + 6$	$s + 10$	$s + 14$	$s + 18$	$s + 22$	$s + 26$
6	12	16	20	24	28	32
10	16	20	24	28	32	36
14	20	24	28	32	36	40
18	24	28	32	36	40	44
22	28	32	36	40	44	48
26	32	36	40	44	48	52
30	36	40	44	48	52	56

Таблица 2.

s	$s + 6$	$s + 10$	$s + 14$	$s + 18$	$s + 22$	$s + 26$
6	$3 \cdot 2^2$	2^4	$5 \cdot 2^2$	$3 \cdot 2^3$	$7 \cdot 2^2$	2^5
10	2^4	$5 \cdot 2^2$	$3 \cdot 2^3$	$7 \cdot 2^2$	2^5	$9 \cdot 2^2$
14	$5 \cdot 2^2$	$3 \cdot 2^3$	$7 \cdot 2^2$	2^5	$9 \cdot 2^2$	$5 \cdot 2^3$
18	$3 \cdot 2^3$	$7 \cdot 2^2$	2^5	$9 \cdot 2^2$	$5 \cdot 2^3$	$11 \cdot 2^2$
22	$7 \cdot 2^2$	2^5	$9 \cdot 2^2$	$5 \cdot 2^3$	$11 \cdot 2^2$	$3 \cdot 2^4$
26	2^5	$9 \cdot 2^2$	$5 \cdot 2^3$	$11 \cdot 2^2$	$3 \cdot 2^4$	$13 \cdot 2^2$
30	$9 \cdot 2^2$	$5 \cdot 2^3$	$11 \cdot 2^2$	$3 \cdot 2^4$	$13 \cdot 2^2$	$7 \cdot 2^3$

Таблица 3.

ца 3, позволяющая утверждать, что значения (нового — 6-й степени) многочлена

$$F(s) = (s + 6)(s + 10)(s + 14)(s + 18)(s + 22)(s + 26)$$

при $s = 6, 10, 14, 18, 22, 26$ делятся на 2^{17} , а $F(30)$ делится лишь на 2^{16} и не делится на 2^{17} ; однако — вместо (9) — можно получить лишь неравенства

$$q \leq Q = \sum_{k=0}^6 C_{29}^k = 621\,616, \quad H = 2^{28} = 268\,435\,456, \quad H/Q > 431.$$

Оценка $H/Q > 431$ чуть хуже, чем требуется для обоснования контрпримера в \mathbb{R}^d при $d = 435$. Тем не менее, пара ($n = 29, d = 435$) представляется «перспективной»: едва ли при разбиении соответствующего графа на клики *все они* могут оказаться максимальными, и если бы удалось сосчитать, сколько может быть непересекающихся клик, содержащих — *каждая* — по Q вершин, то число 431 в последней оценке, возможно, удалось бы заменить числом 436.

11. Подробнее эти слова означают следующее.

а) При $n = 41$ вложим n -мерный куб $[-1, 1]^n$ в $(n + 1)$ -мерное пространство с координатами $\{x_j\}_{j=0}^n$, и, трактуя $[-1, 1]^{41}$ как 41-мерную грань $x_0 = 1$ куба $[-1, 1]^{42}$, определим X подобно тому, как это было сделано прежде: вершина $\{x_j\}_{j=0}^n$, $x_j = \pm 1$, принадлежит к X , если $x_0 = 1$ и число минус единиц среди $\{x_j\}_{j=1}^n$ четно.

Ясно, что X содержит $H = 2^{n-1}$ точек: $|X| = H = 2^{40}$.

б) Так же, как прежде, отображим X на подмножество Y вершин d -мерного куба $[-1, 1]^d$, $d = C_{42}^2 = 861$.

Рассмотрим множество P всех пар (i, j) , $1 \leq i \leq j \leq n = 41$ (число таких пар равно d , так что их можно перенумеровать числами $k = k(i, j)$, $1 \leq k \leq d$) и вершине $x = \{x_j\}_{j=0}^n \in X$ сопоставим точку $y = y(x) \in Y$ с координатами

$$y_k = y_{k(i, j)} = x_{i-1}x_j, \quad (i, j) \in P, \quad 1 \leq k = k(i, j) \leq d.$$

Множество Y , как и X , содержит H точек: $|Y| = |X| = H = 2^{40}$.

в) Для $x, x' \in X$ скалярное произведение $(x, x') = \sum_{j=0}^n x_j x'_j$ принимает значения

$$42, \pm 38, \pm 34, \pm 30, \pm 26, \pm 22, \pm 18, \pm 14, \pm 10, \pm 6, \pm 2. \quad (17)$$

Связанный с ними многочлен 9-й степени

$$F(s) = (s + 6)(s + 10)(s + 14)(s + 18)(s + 22)(s + 26)(s + 30)(s + 34)(s + 38) \quad (18)$$

обладает следующими свойствами:

$F(s) \equiv 0 \pmod{11}$ при всех $s > 0$ из (17), кроме $s = 42$, и $F(42) \not\equiv 0 \pmod{11}$.

д) Расстояние $|yy'|$ между вершинами $y = y(x)$, $y' = y(x') \in Y$ тогда и только тогда равно диаметру D множества Y , когда скалярное произведение $(x, x') = \pm 2$.

е) Превратим X в граф Γ , соединив ребрами все пары вершин $x, x' \in X$, для которых $(x, x') \neq \pm 2$. Число вершин максимальной клики графа Γ равно $Q = \sum_{k=0}^9 C_{41}^k$.

То, что их не больше Q , проверяется с использованием свойств многочлена $F(s)$ из (18); то, что их не меньше Q , показывает (сравним с (12)) пример клики

$$X_0 \cup X_2 \cup X_4 \cup X_6 \cup X_8 \cup X_{32} \cup X_{34} \cup X_{36} \cup X_{38} \cup X_{40}.$$

12. Фиксируя любую из координат y_k , получаем разбиение Y на два подмножества Y^+ и Y^- размерности 860 (на которых $y_k = +1$ и $y_k = -1$). Хотя одно из них нельзя разбить на 861 часть диаметра меньше D — иначе (вопреки (13)) Y разбилось бы на 1722 таких части.

Это дает контрпример (Y^+ или Y^-) к гипотезе Борсука для $d = 860$.

13. При разбиении M_2 на части диаметра меньше D точка N не может попасть в одну часть ни с одной из точек M_1 , так как удалена от каждой из них на расстояние D .

14. В d -мерном пространстве введем декартовы координаты $\{u_j\}_{j=1}^d$. Сферу s в k -мерном подпространстве $u_j = 0, k + 1 \leq j \leq d$, зададим уравнением

$$\sum_{j=1}^k u_j^2 = r^2.$$

Пусть $d > k + 1$ (случай $d = k + 1$ будет рассмотрен отдельно). Положим $n = d - k - 1$ (так что $n \geq 1$ и $k + n = d - 1$), определим $h \geq 0$ из условия

$$r^2 + D^2/4 + h^2 = D^2 \quad (19)$$

(ввиду (15) такое h существует) и в $(n + 1)$ -мерном подпространстве $u_1 = \dots = u_k = 0$ возьмем $(n - 1)$ -мерную сферу s' диаметра D

$$\sum_{j=k+1}^{k+n} u_j^2 = D^2/4, \quad u_d = h.$$

Условие (19) означает, что расстояние от любой точки $P \in s$,

$$P = (u_1, \dots, u_k, 0, \dots, 0, 0), \quad \sum_{j=1}^k u_j^2 = r^2,$$

до любой точки $Q \in s'$,

$$Q = (0, \dots, 0, u_{k+1}, \dots, u_{k+n}, u_d = h), \quad \sum_{j=k+1}^{k+n} u_j^2 = D^2/4,$$

равно D :

$$|PQ|^2 = \left(\sum_{j=1}^k u_j^2 \right) + \left(\sum_{j=k+1}^{k+n} u_j^2 \right) + h^2 = r^2 + D^2/4 + h^2 = D^2. \quad (20)$$

Объединение множества $M \subset s$ со сферой s' обозначим через M' ; по построению диаметр M' равен D . По условию M нельзя разбить на $k+1$ частей диаметра меньше D . Сферу s' нельзя разбить на n частей диаметра меньше D . Иными словами, при разбиении M и s' на части меньшего диаметра минимальное число частей равно соответственно $p(M) \geq k+2$ и $n+1$. Поэтому (вследствие (20)) для M' минимальное число частей меньшего диаметра равно $p(M) + n + 1 \geq k + n + 3 = d + 2$, то есть M' — контрпример к гипотезе Борсука в d -мерном пространстве:

$$M' \text{ нельзя разбить на } d+1 \text{ частей диаметра меньше } D, \quad (21)$$

и это доказано — при условии (15) — для любого $d > k + 1$.

Чтобы получить (21) для $d = k + 1$, достаточно, чтобы выполнялось условие $r \leq D$. В этом случае M' получается из M добавлением одной точки

$$Q = \left(0, \dots, 0, u_d = u_{k+1} = \sqrt{D^2 - r^2} \right),$$

лежащей на расстоянии D от всех точек сферы s .

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ТЕОРЕМА БОРСУКА В \mathbb{R}^2 И В \mathbb{R}^3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

В Приложении 3 приведено новое доказательство гипотезы Борсука в \mathbb{R}^3 .

Чтобы разобраться в нем, полезно самостоятельно перенести (переформулировать и доказать) леммы из Приложения 3 на случай \mathbb{R}^2 .

Поскольку *контрпримеры* к гипотезе Борсука были построены для *конечных* множеств, особый интерес вызывают и *доказательства* для таких множеств.

На конференции в Гамбурге уже упоминавшийся в этой статье Дима Гуревич предложил следующий план решения задачи Борсука для конечных множеств.

Пусть M — конечное множество в d -мерном пространстве, $\text{diam } M = D$. Превратим M в граф $G = G(M)$, соединяя точки P, Q из M тогда и только тогда, когда $|PQ| = D$ (иначе говоря, проведем все «отрезки — диаметры» в M). Назовем ситуацию *особой*, если степень каждой вершины графа G не меньше $d + 1$.

ЛЕММА. *Если в \mathbb{R}^d особая ситуация невозможна, то гипотеза Борсука верна для любого конечного множества $M \subset \mathbb{R}^d$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по числу точек M .

ТЕОРЕМА. *Особая ситуация невозможна в \mathbb{R}^2 и в \mathbb{R}^3 .*

Сформулированная теорема

- а) верна и без труда проверяется в \mathbb{R}^2 ;
- б) верна и довольно сложно доказывается в \mathbb{R}^3 (на конференции в Гамбурге доказать ее в \mathbb{R}^3 никому не удалось);

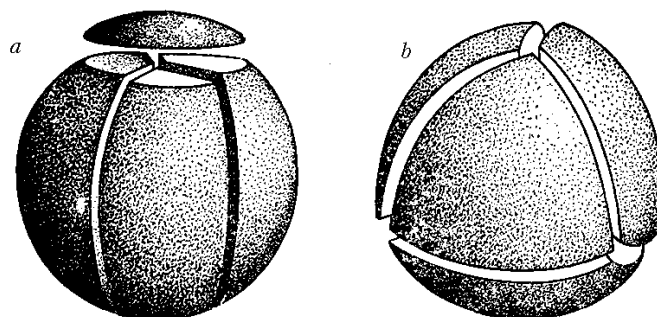


Рис. 3.

с) заведомо не обобщается на \mathbb{R}^d при $d \geq 4$; для этих d легко построить контр-примеры к теореме, но они не дают никакого продвижения в задаче Борсука.

Из теоремы и из леммы следует решение задачи Борсука в \mathbb{R}^2 и в \mathbb{R}^3 для *конечных* множеств.

Сама теорема является следствием утверждений А и В:

А. Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$ состоит из n точек; тогда в $G(M)$ максимум n ребер.

В. Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ состоит из n точек; тогда в $G(M)$ максимум $2n - 2$ ребра.*)

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ТЕОРЕМА ХАДВИГЕРА

Сначала разобьем трехмерный шар на 4 части меньшего диаметра.

Одно нужное разбиение шара показано на рис. 3а. Другое (более симметричное) можно получить так: впишем в шар с центром O правильный тетраэдр $ABCD$; четыре трехгранных угла $OB CD$, $OACD$, $OABD$ и $OABC$, под которыми видны из центра грани тетраэдра, рассекают шар на 4 части меньшего диаметра (рис. 3б).

Теперь, следуя [1], докажем, что верна

ТЕОРЕМА ХАДВИГЕРА в \mathbb{R}^3 . Любое гладкое выпуклое тело V диаметра D в трехмерном пространстве можно разбить на 4 части меньшего диаметра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем шар U диаметра D на четыре части U_1, U_2, U_3, U_4 меньшего диаметра. Каждой граничной точке $v \in V$ сопоставим такую граничную точку $u = u(v) \in U$, что опорная плоскость к V в точке v параллельна касательной плоскости к U в точке u (при этом u выбирается так, чтобы U и V лежали по одну сторону от этих плоскостей). Точку v на границе V отнесем к V_j , если $u(v) \in U_j$, $1 \leq j \leq 4$. Докажем, что

$$\text{diam } V_j < D, \quad 1 \leq j \leq 4. \quad (22)$$

Допустим, что при каком-нибудь j это не так и $\text{diam } V_j = D$. Пусть A и B — две граничные точки V_j , для которых $|AB| = D$. Проведем через A и B две плоскости, перпендикулярные отрезку AB . Ясно, что V лежит в полосе между ними (иначе $\text{diam } V > D$). Поэтому проведенные плоскости являются *опорными*

*) Утверждения А и В доказаны в [6, задачи 87 а, б]; см. также [6, задачи 101, 102].

к V . Значит, касательные плоскости к шару в точках $u(A)$ и $u(B)$ (параллельные проведенным опорным плоскостям) параллельны друг другу, т.е. $u(A)$ и $u(B)$ — диаметрально противоположные точки шара U . Поэтому расстояние между ними равно D . С другой стороны, по построению $u(A)$ и $u(B)$ принадлежат U_j , так что расстояние между ними меньше D . Полученное противоречие доказывает (22).

Пусть теперь O — любая точка внутри V . Соединим O отрезками со всеми точками $v \in V_j$ и объединение этих отрезков обозначим через W_j , $1 \leq j \leq 4$. Ясно, что, ввиду (22), $\text{diam } W_j < D$. Построенные «конусы» W_j заполняют все выпуклое тело V , т.е. образуют разбиение V на 4 части диаметра меньше D .

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ТЕОРЕМА БОРСУКА В \mathbb{R}^3

В августе 1998 года на X летней конференции Турнира Городов в Гамбурге львовские школьники Руслан Батршин и Максим Давыдов получили

новое доказательство гипотезы Борсука в \mathbb{R}^3 .

ТЕОРЕМА. Пусть M — замкнутое выпуклое множество в \mathbb{R}^3 , D — диаметр M . Тогда M можно разбить на 4 части — каждая диаметра меньше D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем следующие обозначения:

B_0 — наименьший шар, содержащий M ,

S_0 — его сфера,

R_0 — его радиус,

V — замкнутая выпуклая оболочка $M \cap S_0$ (т.е. минимальное замкнутое выпуклое множество, содержащее все точки множества M , попавшие на сферу S_0).

ЛЕММА 1. V содержит центр 0 шара B_0 .

ЛЕММА 2. Возможны три случая:

(a) V — отрезок длины $2R_0$,

(b) V — треугольник в экваториальной плоскости B_0 ,

(c) V содержит вписанный в шар B_0 тетраэдр $T \ni 0$.

ЛЕММА 3 (о МИНИМАКСЕ). Пусть T_0 — правильный тетраэдр, вписанный в шар B_0 , ρ_0 — длина его ребра; T — неправильный тетраэдр, вписанный в шар B_0 и содержащий центр 0 шара B_0 , ρ — длина наибольшего ребра T . Тогда $\rho > \rho_0$.

Используя конструкцию, изображенную на рис. 3b (см. Приложение 2), разделим шар B_0 на четыре части C_1, C_2, C_3, C_4 .

ЛЕММА 4. $\text{diam } C_j = \rho_0$, $1 \leq j \leq 4$.

В случаях (a) и (b) (см. лемму 2) теорема Борсука легко следует из леммы 4.

В случае (c), если тетраэдр T в лемме 2 — неправильный, теорема Борсука следует из лемм 3 и 4.

Наконец, пусть T в случае (c) — правильный тетраэдр $ABCD$ (с ребром ρ_0), так что $\text{diam } M \geq \rho_0$. Тогда построим тетраэдр $T' = A'B'C'D'$, симметричный T относительно центра 0 шара B_0 . Исходя из T' , проведем такое построение, как на рис. 3b, и применим лемму 4.

Если $\text{diam}(M \cap C_j) < \rho_0$, $1 \leq j \leq 4$, то теорема доказана.

Если $\text{diam}(M \cap C_j) = \rho_0$ при некотором j , то M содержит ребро T' . Пусть для определенности это — ребро, выходящее из вершины A' . Тогда $M \supset AA'$, так что $\text{diam} M = 2R_0 > \rho_0$, и теорема в этом случае тоже доказана.

ВАЖНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ. Леммы 1-3 обобщаются на все размерности $d > 3$, и лишь при обобщении леммы 4 доказательство не проходит уже для $d = 4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц.* Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. М.: Наука, 1965.
- [2] *Kahn J., Kalai G.* // Bull. AMS (N. S.) Vol. 29. No 1. 1993. P. 60-62.
- [3] *Nilli A.* // Contemp. Math. Vol. 178. 1994. P. 209-210.
- [4] *Райгородский А.* // УМН. Т. 52. Вып. 6. 1997. С. 181-182.
- [5] *Константинов Н. Н.* // Математическое просвещение. Сер 3, вып. 1, 1997. С. 164-174.
- [6] *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. М.: Наука, 1974.
- [7] *Райгородский А.* // УМН, 1999. В печати.