

## Феликс Клейн и его эрлангенская программа

(к 150-летию со дня рождения ученого)

Н. Х. Розов

Эрлангенская программа открыла в понятии группы преобразований те узлы, которые скрепляют все разновидности геометрии и вместе с тем определяют отличительные особенности каждой из них; в этой программе вопрос «что такое геометрия?» ставится и получает основополагающий ответ.

*Герман Вейль*

В истории геометрии не много имен и событий, принципиально изменивших наши представления об этой ветви математики и радикально повлиявших на ее дальнейшее развитие. К числу таковых безо всяких сомнений следует отнести Феликса Клейна и его эрлангенскую программу.

XIX век с полным правом можно назвать веком расцвета геометрии. Именно к этому веку относятся выдающиеся геометрические работы К. Гаусса, Б. Римана, Э. Бельтрами, А. Пуанкаре . . . Но даже на фоне всех их блистательных достижений два события оказались поистине эпохальными: открытие неевклидовой геометрии Гауссом, Лобачевским, Бойаи и разработка Клейном теоретико-группового подхода к геометрии.

В октябре 1872 года молодой немецкий математик Феликс Клейн (1849 – 1925) вступал в должность профессора на философском факультете Эрлангенского университета. Согласно существовавшей в те времена (и сохраняющейся поныне в ряде университетов Германии) традиции, новый профессор должен был прочитать вступительную лекцию, в которой надлежало изложить программу его научных исследований. Этой лекции Клейна, озаглавленной «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований» (и сразу же выпущенной в виде небольшой брошюры), выпала завидная доля навсегда занять почетное место в истории математической науки. Она известна ныне под именем эрлангенской программы. Известный американский геометр Джулиан Кулидж сказал как-то, что эрлангенская программа Клейна повлияла на геометрическое мышление больше, чем любая другая работа со времен Евклида, за исключением работ Гаусса и Римана.

(Лекция Ф. Клейна на русском языке впервые опубликована в 1895 г. Ее полный текст был помещен также в малодоступной сейчас замечательной книге

из серии «Классики естествознания»<sup>1)</sup>. С тех пор, насколько нам известно, на русском языке эрлангенская программа больше не переиздавалась.)

До Ф. Клейна разнообразные геометрические факты и теории не объединялись единой концепцией. Сам Ф. Клейн так писал об этом:

«Геометрия, единая по существу своему, при быстром своем развитии в последнее время слишком уж раздробилась на ряд почти раздельных дисциплин, которые продолжают развиваться в значительной степени независимо друг от друга.»

Универсальную концепцию «единства геометрий», общий принцип, охватывающий все ее ветви, впервые увидел и четко сформулировал Феликс Клейн. В основе его концепции лежит идея, связанная с понятием группы преобразований и классификацией групповых свойств. Это фундаментальное открытие представляется более замечательным и удивительным, что сама по себе теория групп как отдельный раздел алгебры в то время фактически еще не сложилась.

Вот как формулирует Ф. Клейн в эрлангенской программе центральную проблему геометрии:

«Дано многообразие и в нем группа преобразований; нужно исследовать те свойства образов, принадлежащих многообразию, которые не изменяются от преобразований группы . . . Требуется развить теорию инвариантов этой группы.»

Итак, ветви геометрии различаются инвариантами соответствующей группы преобразований. Г. Вейль писал:

«Эрлангенская программа . . . достигает своего полного проявления именно в теории групп линейных преобразований и их инвариантов.»

При этом имеется своеобразная иерархия инвариантов: в группе движений евклидовой плоскости инвариантом связаны две точки, в группе подобия — три точки в общем положении, в группе аффинных преобразований — три коллинеарные точки, в группе проективных преобразований — четыре коллинеарные точки . . . Таким образом, на основе группового подхода оказываются объединенными такие, казалось бы, различные главы геометрии, как евклидова, аффинная и проективная геометрии, геометрии Лобачевского и Римана и т. д. Мы не будем здесь более подробно углубляться в принципиальные научные детали концепции Ф. Клейна, рекомендуя читателю (как опытному, так и начинающему) познакомиться с ними по недавно появившейся блестящей книге В. В. Прасолова и В. М. Тихомирова<sup>2)</sup>.

Идеи Ф. Клейна были восприняты многими выдающимися математиками. Так, в 1886 г. Софус Ли (1842 – 1899) в своей статье «Замечания на работу Гельмгольца „О фактах, лежащих в основании геометрии“» писал:

«Знаменитая работа Гельмгольца . . . рассматривает задачу, стоящую в теснейшей связи с новой теорией групп преобразований. Побуждаемый Клейном, я поэтому решил применить к этой . . . задаче методы моей теории преобразований.»

<sup>1)</sup> Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. – Редакция и вступительная статья А. П. Нордена. – М.: Гостехиздат, 1956. 528 с.

<sup>2)</sup> Прасолов В. В., Тихомиров В. М. Геометрия. М.: МЦНМО, 1997. 352 с.

(Упомянутая работа Германа Гельмгольца (1821 – 1894) была опубликована в 1868 г. и представляла собой одну из первых попыток продвинуться по пути аксиоматического обоснования геометрии.) Через 15 лет после публикации эрлангенской программы мысль о равноправности геометрий Евклида и Лобачевского становится отчетливо ясной. Анри Пуанкаре (1854 – 1912) в своем сочинении «Об основных гипотезах геометрии» (1887) выразил ее «по Клейну» так:

«... Геометрия есть не что иное, как изучение некоторой группы движений, и в этом смысле можно сказать, что справедливость геометрии Евклида нисколько не противоречит справедливости геометрии Лобачевского, так как существование одной группы вполне совместимо с существованием другой.»

Следующий шаг в развитии геометрии сделал Эли Картан (1870 – 1953). В его трактате «Теория групп и геометрия» на основе синтеза идей Клейна и Римана развиваются новые направления в геометрии. Представляется уместным воспроизвести здесь высказывание Э. Картана, определяющее суть открытия Ф. Клейна:

«... Основная идея Ф. Клейна может быть связана с наиболее древними понятиями науки. Элементарная геометрия изучает свойства фигур, не зависящие от их положения в пространстве, ... остающиеся инвариантными относительно некоторой совокупности преобразований, образующей группу движений ... Проективная геометрия, ... с точки зрения Клейна, изучает свойств фигур, инвариантные относительно некоторой совокупности ... проективных преобразований, образующих группу. Вообще всякая группа непрерывных преобразований определяет самостоятельную геометрию. Эта геометрия ... изучает свойства фигур, инвариантные относительно преобразований группы ... »

Особую роль в эволюции геометрии XIX столетия сыграло развитие проективной геометрии. Эрлангенская программа открывается следующей фразой:

«Между приобретениями, сделанными в области геометрии за последние пятьдесят лет, развитие проективной геометрии занимает первое место.»

В ней не следует усматривать недооценку значения открытия геометрии Лобачевского (напомним, что труд «О началах геометрии» Н. И. Лобачевского вышел в свет в 1829 г., за 43 года — менее, чем за полвека — до речи Ф. Клейна). Тем более, что именно Ф. Клейн впервые научно обосновал независимость евклидова пятого постулата. В 1871 г. вышла его статья «О так называемой неевклидовой геометрии», в которой он так описывает историю рождения новой геометрии:

«Гаусс назвал эту геометрию неевклидовой; он много занимался ею, но, к сожалению, ничего не опубликовал о ней, кроме некоторых намеков. К этой же неевклидовой геометрии пришли Лобачевский, профессор математики Казанского университета, и, несколькими годами позже, венгерский математик Я. Бolyai.»

(Кстати, уже в этой статье Ф. Клейна можно усмотреть явные попытки связать геометрические свойства со свойствами линейных преобразований, именно их положить в основу геометрических рассуждений.) Как известно, Ф. Клейну

принадлежит проективная интерпретация неевклидовой геометрии (плоскости Лобачевского). В 1889 – 1890 гг. он читал в Геттингенском университете лекции по неевклидовой геометрии; возможно, сегодня не все помнят, что эти лекции издавались и на русском языке<sup>3</sup>).

Нисколько не умаляя значения поворотного в истории науки открытия неевклидовой геометрии, следует согласиться, что проективная геометрия является одной из наиболее принципиально важных и неожиданно причудливых математических теорий. Есть все основания предполагать, что к своей концепции Ф. Клейн пришел в результате обстоятельных и плодотворных исследований в этой области. Нетрудно заметить, что сама эрлангенская программа в определенном смысле является гимном проективной геометрии, бурно развивавшейся в XIX веке.

Следует констатировать, что в настоящее время проективная геометрия отодвинулась на второй план. И вот результат: на многих математических факультетах университетов систематическое изложение проективной геометрии (как, впрочем, и высшей геометрии) давно уже не дается, а для беглого ознакомления с ее базовыми понятиями выделяются две – три лекции в курсе аналитической геометрии. Это очень жаль, поскольку проективная геометрия и ныне могла бы иметь исключительно важное образовательное значение для математиков (и даже общеобразовательное значение для гуманитариев). Например, в упомянутой выше книге В. В. Прасолова и В. М. Тихомирова рассказывается о том, какую роль сыграла проективная геометрия в научной жизни А. Н. Колмогорова.

Эрлангенская программа представляет собой блестящий образец того, как можно и нужно доступно излагать глубокие мысли. Это произведение, как и многие работы классиков науки второй половины XIX – первой половины XX веков, содержит какой-то непередаваемый аромат личной неторопливой беседы с читателем, красочных ассоциаций и попутных замечаний, неожиданных аналогий и тонких намеков, сравнительного анализа фактов, аргументов, соображений. При изложении органично описывается история научного поиска и специфика математического мышления, детально рассказывается о предшественниках и путях оформления идей, раскрывается процесс математического познания.

Ф. Клейн как бы ведет доверительную спокойную беседу со своими коллегами, сопоставляет результаты, обсуждает точки зрения. С. Ли и Р. Клебш, Л. Гессе и К. Жордан, А. Кэли и Э. Лагерр, М. Шаль и Ю. Плюккер, К. Штаудт и Б. Рейнхардт, Г. Грассман и А. Бриль — все они, сегодня известные каждому или почти забытые, — были современниками или почти современниками, друзьями и заинтересованными понимающими людьми. Вот один только пример — дополнение, которое Ф. Клейн посчитал обязательным сделать уже позже, при переиздании:

«Завершая эту перепечатку эрлангенской программы, я охотно укажу еще на работы Мебиуса (которые я сам осмыслил в их внутренней связи лишь после того, как в 1885 – 1887 годах принял участие в издании собрания его сочинений ...). Мебиус еще не знал общего определения группы, а также многих геометрических преобразований ...; однако он, руководствуясь верным чутьем, расположил свои

---

<sup>3</sup>) Клейн Ф. Неевклидова геометрия. М.-Л.: ГТТИ, 1936. 355 с.

следующие друг за другом геометрические работы именно так, как это соответствует основным идеям программы.»

В таком же удивительном стиле теплого рассказа о личностях математиков и обстоятельного изложения их идей написана и книга «Лекции о развитии математики в XIX столетии»<sup>4)</sup>, которую по праву можно было бы назвать «историей математики с человеческим лицом».

Эрлангенская программа, помимо своего чисто научного значения, оказала заметное влияние на развитие геометрического образования. Выработанная Ф. Клейном концепция геометрической науки во многом определяют построение и содержание программ курсов геометрии в высшей школе.

Ф. Клейн был не только выдающимся ученым, но и талантливым популяризатором математической науки, блестящим педагогом, глубоким и оригинальным исследователем проблем методики преподавания математики в средней школе, последовательным реформатором всего математического образования. Достаточно напомнить, что замечательная книга «Элементарная математика с точки зрения высшей»<sup>5)</sup>, представляющая собой курс его лекций для будущих учителей математики, и сегодня остается классическим руководством для каждого, кто пожелает всерьез разобраться в научных основах «школьной математики». Эта книга по своему содержанию, манере подачи материала, стилю изложения и сегодня могла бы оказать неоценимую помощь всем, кто занимается математическим образованием школьников, и очень жаль, что в учебном процессе наших педагогических вузов она не занимает достойного места.

Прекрасной иллюстрацией всемирного признания авторитета Ф. Клейна как педагога и высочайшей оценки его работ, касающихся преподавания математики, является следующий исторический факт. 90 лет тому назад, в апреле 1908 г., на IV Международном конгрессе математиков, проходившем в Риме, была образована Международная комиссия по преподаванию математики. И ее первым Президентом стал именно Феликс Клейн.

Впрочем, в эрлангенской программе педагогическим проблемам автор не уделяет особого внимания. Тем более интересны несколько имеющих там замечаний, которые в какой-то мере раскрывают точку зрения Ф. Клейна на отдельные вопросы преподавания. Он весьма определенно высказывается о важности при обучении опираться на историю науки, указывая, что следовать тому пути,

«по которому шла наука в своем развитии, ... при изложении является обычно самым выгодным».

Впоследствии он еще точнее сформулировал эту мысль:

«... Преподавание математики, как и вообще всякое преподавание, ... должно идти по тому же самому пути, по которому все человечество, начиная со своего наивного первобытного состояния, дошло до вершин современного знания! ... Научно обучать — значит учить человека научно думать, а не оглушать его с самого начала холодной, научно напряженной систематикой. Существенное препятствие к распространению такого естественного и поистине научного метода

<sup>4)</sup> Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.: Наука, 1989. 456 с.

<sup>5)</sup> Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. М.: Наука, 1987. Т. I. «Арифметика, алгебра, анализ». 431 с. Т. II. «Геометрия». 416 с.

обучения представляет собой, несомненно, недостаток в знакомстве с историей математики.»

Ф. Клейн совсем бегло затрагивает в эрлангенской программе и один из центральных вопросов методики преподавания математики — вопрос о гармоническом соотношении между наглядным, интуитивным и формальным, аналитическим. Следуя логике профессионального ученого-математика, он совершенно справедливо замечает, что

«математический предмет нельзя еще считать окончательно разработанным, пока он не стал логически очевидным».

И в то же самое время со всей убежденностью опытного преподавателя подчеркивает, что наглядность

«в педагогическом отношении нужно ценить очень высоко. Геометрическая модель, например, с этой точки зрения очень поучительна и интересна».

Позже Ф. Клейн не раз возвращался к этому вопросу, обстоятельно объясняя, что конкретно он понимает под принципом наглядности и как видит его реализацию в процессе преподавания.

В своих работах Ф. Клейн подробно и обстоятельно развивает оригинальные взгляды на математическое образование. В их основе лежат такие фундаментальные положения, как обязательность приспособления к «природным склонностям молодого человека» (выражение Ф. Клейна) и постоянной ориентации на психологические закономерности усвоения математических знаний, необходимость подлинного усвоения идеи функциональной зависимости и глубокого развития функционального мышления, целесообразность реализации фузионизма в преподавании школьной математики, прежде всего — школьного курса геометрии, полезность широкого ознакомления с приложениями математики и т. д. Например, он выступал за свободный выбор учеником гуманитарного или естественно-научного и математического образования и тем самым стоял фактически у истоков идеи гуманизации образования. Многие его основополагающие идеи и концепции перестройки среднего и высшего математического образования хорошо известны, общепризнаны, сохраняют злободневность и в наше время — но все еще очень далеки от воплощения в жизнь.

И в заключение — еще два интереснейших высказывания из эрлангенской программы. Весьма актуально звучит призыв ее автора расширять связи между различными разделами математики и тем самым обогащать возможности творчества и углублять понимание результатов:

«Специалист по математической физике постоянно уклоняется от тех преимуществ, которые может доставить ему во многих случаях сколько-нибудь выработанное проективное воззрение.»

Идея необходимости тесного взаимодействия и взаимопонимания различных ветвей математики, математиков и прикладников всегда была очень близка Ф. Клейну и всячески им пропагандировалась. Очень глубоким представляется и другое положение, касающееся взаимоотношения научного и психологического в геометрическом восприятии:

«Нельзя с математической точки зрения . . . помешать кому бы то ни было утверждать, что пространство имеет собственно четыре или

произвольно много измерений, но ... мы в состоянии воспринимать только три.»

23 октября 1897 года российское периодическое издание «Новости и биржевая газета» познакомила своих читателей со следующим сообщением из университетской жизни:

«КАЗАНЬ. В годовщину рождения Лобачевского в актовом зале университета состоялось торжественное заседание физико-математического общества для первого присуждения премии имени Лобачевского профессору Лейпцигского университета Садиусу, золотой медали — профессору Геттингенского университета Феликсу Клейну. Член общества Рейнгардт предложил войти с ходатайством в Министерство народного просвещения о введении неэвклидовой геометрии в курс общего образования.»

Сегодня, сто лет спустя, это сообщение вызывает особый интерес как живое историческое свидетельство примечательной встречи имен Н. Лобачевского и Ф. Клейна, причудливого переплетения судьбы их фундаментальных работ и того специального внимания, которое российская научно-педагогическая общественность всегда специально уделяла геометрическому школьному образованию.