Научная деятельность Н. Б. Васильева

А. М. Леонтович

Первые научные результаты были получены Н. Б. Васильевым, когда он еще был студентом. Тогда его интересы в основном относились к функциональному анализу. Уже на первом курсе он стал активным участником семинара А. Н. Колмогорова. Затем его учителями стали Г. Е. Шилов и И. М. Гельфанд. В это время была сделана его первая работа о C^*-алгебрах.

В 1966 году Н. Б. Васильев поступил на работу в межфакультетскую лабораторию математических методов в биологии. Он стал одним из первых ее сотрудников. Лаборатория была образована по инициативе И. М. Гельфанда (который и стал ее заведующим) при активной поддержке ректора университета И. Г. Петровского[1)].

Место работы оказалось очень удачным; недаром Н. Б. Васильев проработал в лаборатории (затем институте) до самой своей кончины. И. М. Гельфанд собрал здесь вместе ряд сильных математиков. Можно назвать имена С. Г. Гиндикина, Д. Б. Фукса; позже появились Д. А. Каждан, И. Н. Бернштейн. В лаборатории царила очень дружеская, доброжелательная и в то же время творческая атмосфера.

Н. Б. Васильев стал работать в группе, возглавляемой замечательным математиком И. И. Пятецким-Шапиро, несомненно, оказавшим большое влияние на его творческий почерк. Эта группа занималась теорией автоматов и математическими моделями биологических процессов. Одной из центральных тем для этой группы стало изучение марковских цепей определенного типа — случайных сред с локальными однородными взаимодействиями. Активным участником здесь, наряду с О. Н. Ставской, А. Л. Тоомом, стал Н. Б. Васильев. Он получил ряд ярких результатов, часть из которых составили содержание его кандидатской диссертации, защищенной в 1971 году.

Конструкция случайных сред с локальными однородными взаимодействиями вначале появилась как математическая модель работы нейронных сетей. Но затем эти задачи стали чисто математическими. По своему содержанию они близки к таким приложениям теории марковских цепей как математическое обоснование статистической физики и теория просачивания. Почти одновременно случайными средами с локальными однородными взаимодействиями занималась

[1)] Одновременно была создана и Межфакультетская лаборатория биоорганической химии и молекулярной биологии под руководством академика А. Н. Белозерского (к ее образованию также активное отношение имели И. Г. Петровский и И. М. Гельфанд). Впоследствии (в 1974 году) эти лабораториии объединились, малочисленная межфакультетская лаборатория стала отделом математических методов в биологии большой Межфакультетской лаборатории (сейчас она называется институтом физико-химической биологии им. А. Н. Белозерского МГУ). Идея создания этих лабораторий оказалась очень плодотворной, и в настоящее время институт им. А. Н. Белозерского имеет, быть может, сильнейший состав биологов в нашей стране.

школа Р. Л. Добрушина, но в ней рассматривались не дискретные сети, а непрерывные марковские поля.

Приведем простейший пример задачи о случайных средах с локальными однородными взаимодействиями — так называемую «задачу о лампочках».

В этой задаче автоматы («лампочки») расположены в целых точках прямой. Время дискретно. Автоматы могут находиться в двух состояниях: 0 и 1 («лампочка не горит» или «лампочка горит»). Если в предыдущий момент данная лампочка и соседняя слева горели, то в текущий момент она обязательно продолжает гореть. Если же в предыдущий момент хотя бы одна из них не горела, то в текущий момент она будет гореть с вероятностью p, $0 < p < 1$ («лампочка спонтанно загорается с вероятностью p»). Предполагается, что состояния всех автоматов в настоящий момент принимаются независимо друг от друга (а только в зависимости от состояний автоматов в предыдущий момент). Такие стохастические правила поведения автоматов определяют марковский оператор P (другими словами, марковскую цепь) с континуальным числом состояний; каждое из таких состояний цепи — это совокупность состояний всех автоматов прямой, т. е. бесконечная последовательностей из нулей и единиц. Очевидно, что состояние всей целочисленной прямой «все единицы» поглощающее (переводится марковским оператором P в себя). Этому поглощающему состоянию отвечает дискретная (атомарная) мера, сосредоточенная в этом состоянии «все единицы»; эта мера инвариантна относительно оператора P^*, двойственного P (этот оператор P^* действует на множестве мер, определенных на множестве всех состояний целочисленной прямой).

Спрашивается, есть ли другие инвариантные меры, кроме этой? Оказывается, ответ зависит от значения вероятности p. Именно, для больших p есть только эта инвариантная мера (сосредоточенная в состоянии «все единицы»), и если в нулевой момент состояния всех автоматов равны 0 («все лампочки не горят»), то с течением времени доля единиц будет стремиться к 1. Совсем не такая ситуация при малых p (это было доказано вначале М. Г. Шнирманом, затем А. Л. Тоомом). В этом случае, если мы начинаем из состояния «все нули», то доля единиц в любой момент времени остается малой. В пределе, когда время стремится к бесконечности, мы выходим на некий стационарный «мигающий» режим работы лампочек. Этому режиму отвечает некоторая инвариантная мера. Эта мера не совпадает с мерой, сосредоточенной в состоянии «все единицы», она будет не дискретна, а непрерывна. Таким образом, имеет место явление типа фазового перехода. Критическое значение p, при котором происходит этот фазовый переход (изменение числа инвариантных мер), приблизительно равно 0,3.

«Задача о лампочках» естественным образом обобщается в разных направлениях: (1) число автоматов, от которых зависит (вероятностным образом) состояние данного автомата i, может быть больше, чем 2 (но всегда конечно — условие локальности), и для каждого набора состояний этих соседних автоматов задается своя вероятность того, что данный автомат окажется в состоянии 1 (причем эти вероятности не зависят от номера i на прямой — условие однородности); (2) вместо целочисленной прямой можно рассматривать многомерные решетки; (3) число состояний автомата может быть больше двух. Для данной случайной среды из таких автоматов (т. е. при фиксированных вероятностях переходов) возникает ряд естественных вопросов: имеет ли место эргодичность (единственность инвариантной меры); если нет, то каково множество инвариантных мер; характер зависимости инвариантных мер от вероятностей перехода (имеет ли место аналитичность); обладают ли эти инвариантные меры «хорошими» свойствами типа марковости (или близкого к марковости, но более сложно определяемого свойства гиббсовости).

В задачах о случайных средах с локальными однородными взаимодействиями Н. Б. Васильевым были получены результаты в двух направлениях. Во-первых, им было доказано, что при достаточно широких предположениях инвариантная мера аналитически зависит от вероятностей перехода. В частности, это справедливо в случае «задачи о лампочках» — непрерывная инвариантная мера при малых p аналитически зависит от p. Метод, которым это было доказано, можно назвать «геометрическим», он близок к контурным методам в модели Изинга, которые использовали в своих работах Р. Л. Добрушин, Я. Г. Синай и другие (в частности, именно таким образом А. Л. Тоом доказал существование нетривиальной инвариантной меры при малых p в «задаче о лампочках», о чем упоминалось выше). Во-вторых, Н. Б. Васильевым было изучено, при каких вероятностях перехода инвариантная мера будет марковской или гиббсовской (заметим, что для «задачи о лампочках» это не так — непрерывная инвариантная мера в этом случае довольно-таки «плохая» и никаким условиям типа марковости или гиббсовости не удовлетворяет).

У Н. Б. Васильева есть еще ряд работ по марковским цепям, не связанных непосредственно со случайными средами с локальными однородными взаимодействиями, но близких к ним по духу.

Н. Б. Васильев работал в биологическом институте и потому многие его работы инициированы практическими задачами — относящимися к биологии, химии, физиологии. В математическом отношении некоторые из них носят вероятностный характер, другие относятся к динамическим системам. Иногда необходимо было применить численное моделирование.

Изложим вкратце результаты последней работы Н. Б. Васильева (оттиски которой появились за месяц до его смерти, когда он уже лежал в больнице). Ее возникновение связано с практической задачей о клеточных культурах, именно, выяснении того, имеют ли клетки в однослойных клеточных культурах тенденцию к налеганию друг на друга или, наоборот, к отталкиванию. Математическая постановка состоит в следующем. Пусть имеется некоторое число фигур, случайно расположенных в поле зрения (чтобы сделать математическую постановку более точной, предполагается, что поле зрения является тором — квадратом площади 1 с отождествленными противоположными сторонами). Спрашивается, каково распределение суммы площадей попарных пересечений фигур. Легко видеть, что среднее значение площади пересечения двух случайно расположенных фигур равно произведению площадей этих фигур (напомним: предполагается, что площадь поля зрения равна 1). Поэтому среднее значение суммы площадей попарных пересечений n фигур равно сумме произведений площадей этих фигур. Доверительные интервалы для суммы площадей попарных пересечений случайно расположенных фигур находятся через дисперсии площадей пересечений двух фигур. В отличие от средних значений, эти дисперсии зависят не только от площадей фигур, но и от их формы. Встает вопрос об оценках этих дисперсий. Здесь возникает естественная гипотеза о том, что для двух фигур фиксированной площади дисперсия максимальна в том случае, когда фигуры являются кругами. Это утверждение («изопериметрического типа») было доказано, правда, немного в ослабленном варианте, Н. Б. Васильевым. В частности, из его результата вытекает, что это утверждение справедливо, если одна из фигур выпукла (хотя на самом деле это доказано для более широкого класса фигур). Доказательство теоремы носит в основном геометрический характер, но при этом используются красивые точные формулы, иногда очень неожиданные.

Скажем несколько слов о стиле Н. Б. Васильева как математика.

Его отличала исключительно сильная геометрическая интуиция и в то же время склонность и к комбинаторным соображениям. Очень важна для него была эстетическая сторона. В его доказательствах все время проявлялось стремление к красоте, своего рода музыкальность. (Надо сказать, что его отличала и музыкальность в обычном смысле слова; вообще, музыкальность у него проявлялась во всем — и в литературных вкусах, и в жизни, и в математике. Пожалуй, он был самый музыкальный человек из моих знакомых — хотя формальные музыкальные знания у некоторых из них могли быть и большие.)

Незадолго до смерти, когда Коля ложился в больницу (из которой он так и не вышел), врач при осмотре спросил его, хорошо ли он слышит. Коля ответил, что со слухом у него все в порядке, потом помолчал и сказал: «Слух у меня абсолютный» (и это действительно было так). Так вот, в математике у него был абсолютный и слух, и вкус.

Н. Б. Васильева отличала замечательная способность выделить главное в рассуждениях, увидеть в нем геометрическую основу, даже если формально геометрии в доказательстве и не фигурировало. Поэтому очень часто после обсуждений с ним доказательства сильно упрощались.

Вот типичная картина. Происходит семинар. Докладчик рассказывает плохо и непонятно. Коля вроде бы не слушает, чуть ли не спит. Слушатели не понимают, недовольны этим, требуют, чтобы докладчик говорил понятнее, объяснил суть дела. Но у докладчика это не получается (часто потому, что докладчик и сам не понимает, в чем эта суть — увы, это часто бывает). И вдруг раздается голос Коли, он поясняет сказанное докладчиком, и все всем становится понятным.

По-видимому, такая способность увидеть суть дела приводила к тому, что часто в его работах возникали красивые точные формулы.

А вот громоздкие оценки и рассуждения — этого он не любил (хотя часто они бывают необходимыми).

Н. Б. Васильев был очень контактным человеком, очень доброжелательным к другим, с ним было очень приятно вместе работать. Наверное, поэтому большое количество из его работ совместные. А еще имеется значительно большее число работ, в создании которых он принимал участие при их обсуждениях, но формально автором не числился.

Автор этой статьи хорошо это знает по своему опыту, поскольку, наверно, был самым близким к Коле (в отношении математики) человеком, самым частым его соавтором. Но главное при этом даже не эти совместные работы. Фактически все работы автора — совместные, несовместные — обсуждались с Колей, происходила их своеобразная «обкатка». И это приводило, несомненно, к улучшению качества работ (опять же из-за способности Коли увидеть суть дела, из-за его эстетического чувства).