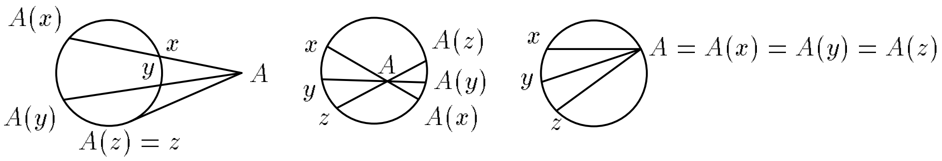
Отображения сферы и неевклидовы геометрии

Р. Р. Пименов

Хотелось бы надеяться на то, что эта статья будет интересна любителям геометрии. Во-первых, в ней единообразно строятся модели всех трех геометрий — Евклида, Римана и Лобачевского. Сама конструкция модели, конечно, связана с идеями Клейна и Пуанкаре, но, в отличие от них, геометрии строятся единообразно и несколько наглядней. Причем все приемы построения были известны не только Паскалю, но, вероятно, и Аполлонию Пергскому. Во-вторых, основную роль в этих моделях играют осевые и точечные симметрии, что продолжает линию Бахмана в основаниях геометрии, иллюстрируя материал его книги «Построение геометрии на основании понятия симметрии». В-третьих, по ходу дела нам удается проиллюстрировать некоторые важные понятия теории групп и строение бесконечно удаленных точек.

Модели трех геометрий базируются на одном специальном отображении сферы в себя. Естественно начать с соответствующего отображения окружности.

Пусть S^1 — окружность на плоскости и A — некоторая точка. Прямая, проходящая через A и точку $x \in S^1$ и не являющаяся касательной, пересекает S^1 в другой точке, которую мы обозначим $A(x)$. Если A лежит на S^1, то можно положить $A(x)$ тождественно равной A для всех x. Если же прямая — касательная и x — точка касания, то положим $A(x) = x$. Мы построили отображение $A : S^1 \to S^1$, которое назовем A-отображением.



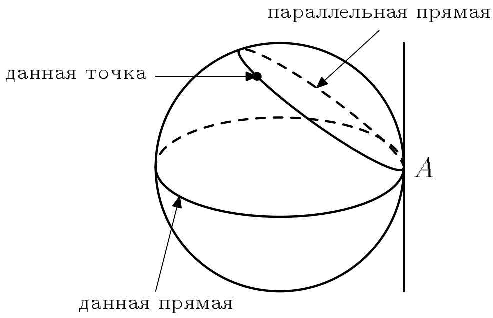
Теперь мы уже готовы к построению моделей разных геометрий. Это значит, что мы должны объяснить, что понимается под словами «точка», «прямая», «угол», «расстояние» и т. п.

Рассмотрим сферу S^2 в трехмерном пространстве и фиксированную точку A. Точка A аналогично плоскому случаю определяет A-отображение этой сферы в себя.

Назовем «точками» моделируемой геометрии пары $(x, A(x))$ где $x \neq A(x)$, т. е. пересечения сферы S^2 прямыми, проходящими через A, а «прямыми» моделируемой геометрии — окружности сферы, лежащие в одной плоскости с A, т. е. пересечения сферы S^2 плоскостями, проходящими через A. Если точка A лежит на S^2, получается модель евклидовой геометрии, если она лежит внутри S^2, то — римановой, а если вне — то геометрии Лобачевского.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 3, 1999(158–166)

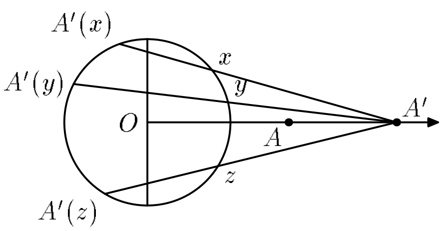
То, что с аксиомой о параллельности в наших моделях все в порядке, видно сразу: если A лежит на S^2, то через точку вне прямой можно провести единственную параллельную (соответствующую плоскость через данную точку надо провести через прямую, касательную к окружности, являющуюся «данной прямой»).



Если же A лежит внутри сферы, то, как и должно быть, нет параллельных прямых, а если A — вне сферы, то их много. Теперь осталось определить углы и расстояния. Мы сделаем это, как и Бахман, определяя геометрию на основании симметрии. Описанные ранее A-отображения будут являться симметриями геометрий. Свойства же A-отображений тесно связаны с полярным соответствием и другими идеями, восходящими к Паскалю, например, с его знаменитой теоремой о вписанном шестиугольнике. Для осуществления это программы нам снова придется вернуться к окружности.

1.

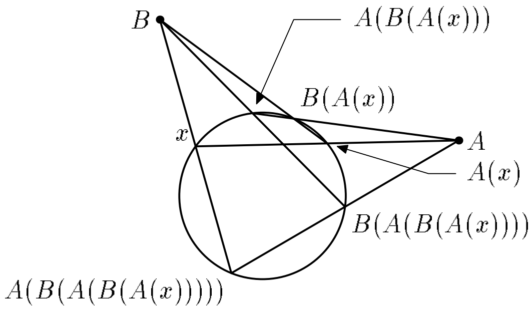
Отметим несколько простых свойств A-отображений. Из самого построения очевидно, что $A(A(x)) = x$. Такие отображения, которые дважды примененные оставляют объекты неподвижными, называют инволютивными. Это очень широкий класс отображений, например, к ним относятся точечные и осевые симметрии. Они удобны, например, тем, что обратное к композиции нескольких инволютивных отображений записывается просто. Например, если P, F, R инволютивны, то обратное к $PPFPR$ запишется просто справа налево — $RPFPP$. Изучим теперь некоторые свойства A-отображений.



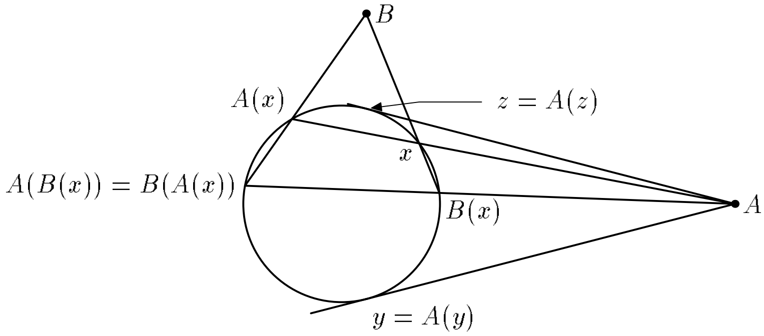
Пусть точка A' удаляется по лучу $[OA)$, где O — центр окружности S^1. A'-отображения (т. е. отображения, построенные не из точки A, а из точки A'), будут тогда все меньше отличаться от осевой симметрии относительно l, где l — диаметр S^1, перпендикулярный к (OA), поскольку пучок прямых из A' по мере удаления A' все меньше будет отличаться от пучка параллельных, каждая из которых перпендикулярна l. Заметим, что если точка A'' удаляется по лучу $[AO)$ (в другую сторону), то A''-отображения будут все меньше отличаться от A'-отображений и в пределе тоже совпадут с симметрией относительно l. Мы можем считать, что в плоскости есть бесконечно удаленная, невидимая точка, в которой пересекаются прямые, перпендикулярные l, она-то и задает отображение, совпадающее с симметрией относительно l. Пусть теперь A' удаляется не по лучу, проходящему через центр окружности, а по произвольной прямой w. Проведем тогда w', параллельную w и проходящую через центр S^1, и диаметр l', перпендикулярный w'. По мере удаления A' от окружности (неважно в какую сторону) A'-отображение все меньше будет отличаться от симметрии относительно l', а в пределе совпадет с ней.

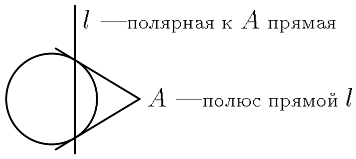
После этого простого аналитического наблюдения сделаем алгебраическое. Возьмем две точки A и B и будем отображать произвольную точку x на S сначала относительно A, затем относительно B, затем снова относительно A и т. д.

Напрашивается вопрос: при каких условиях эта ломаная замкнется, т. е. когда $A(B(\ldots A(B(x))\ldots)) = x$. На этот сложный вопрос я отвечать не буду, я выясню лишь, какими должны быть A и B, чтобы равенство $A(B(A(B(x))) = x$ выполнялось для всех x на S. Для удобства перепишем равенство в виде $A(B(x)) = B(A(x))$. Можно пояснить: сначала на точку x подействовали из точ-



ки A, затем из точки B. Когда результат будет такой же, как если бы действовали в другом порядке — сначала из B, потом из A? Такие отображения A и B, которые действуют на объект независимо от порядка их применения, называются коммутирующими и изучаются в теории групп.





Прежде чем ответить, когда

$$A(B(x)) = B(A(x)),$$

дадим определение. Если точка A лежит вне окружности, то *полярной* к A прямой (или *полярой* к A) называется прямая l, проходящая через две точки окружности, лежащие на касательных, проведенных из A к этой окружности. При этом точку A называют полюсом прямой l. Прежде всего отметим несколько простых свойств полярных прямых: если A лежит на поляре к B, то B лежит на поляре к A; если полярные трем точкам прямые пересекаются в одной точке, то эти три точки лежат на одной прямой. Хотя эти свойства хорошо известны, мы приводим в приложении их доказательства, поскольку на их примере можно еще раз увидеть роль инволютивных преобразований.

Две точки называются *взаимно полярными*, если одна из них лежит на поляре к другой. В дальнейшем нам понадобится определить в пространстве полярную к точке плоскость относительно сферы S^2. Это делается совершенно аналогично плоскому случаю: полярной к точке A называют плоскость, проходящую через основание касательного к S^2 конуса с вершиной в A. Полярные плоскости обладают такими же свойствами, что и полярные прямые.

Сформулируем теперь геометрический смысл тождества

$$A(B(x)) = B(A(x)).$$

Оно означает в точности то, что для любой точки x на S точки $A(x)$ и $A(B(x))$ лежат на одной прямой с B. В проективной геометрии доказывается (можно доказать это и используя декартовы координаты, а вот найти красивое наглядное доказательство мне не удалось), что точки пересечения продолжения сторон четырехугольника, вписанного в круг, взаимно полярны. Отсюда следует, что B необходимо лежит на поляре к A. С другой стороны, раз прямая $(x, B(x))$ пересекается с полярой к A в одной точке, то отсюда следует, что в этой же точке пересекается с полярой к A и прямая $(A(x), B(x))$. Отсюда следует достаточность принадлежности точки B поляре к A для выполнения изучаемого тождества. Итак, A-отображение коммутирует с B-отображением тогда и только тогда, когда B лежит на поляре к A. Иначе говоря, когда A и B взаимно полярны.

В заключение наших планиметрических рассмотрений заметим, что A-отображения можно свести к инверсии. Именно, инверсией с центром в O называют отображение F, которое отображает произвольную точку плоскости x в точку $F(x)$ так, что:

- ▷ Центр инверсии, точка и ее образ лежат на одной прямой.
- ▷ Произведение расстояний от центра инверсии до точки x и до ее образа не зависит от x. Корень квадратный из этого произведения называют радиусом инверсии.
- ▷ Центр инверсии не лежит между точкой и ее образом.

Инверсии обладают рядом интересных свойств. Они отображают окружности в окружности (или прямые). Каждая инверсия оставляет неподвижной все точки некоторой окружности S. Если мы рассмотрим все инверсии, отображающие данную окружность S в себя, то они как раз совпадут с A-отображениями (если A вне S, то центр инверсии совпадет с A, поскольку $|A(x), A| \cdot |x, A|$ постоянно; случай, когда A внутри S можно считать инверсией, сопряженной с точечной симметрией). Наконец, инверсии оставляют неизменными углы между пересекающимися кривыми (если углом между кривыми считать угол между их касательными в точке пересечения).

2.

Теперь мы готовы к построению трехмерных моделей различных геометрий. Рассмотрим, как было сказано вначале, A-отображения сферы S^2 в трехмерном евклидовом пространстве в себя.

Отметим, прежде всего, что образ окружности при A-отображении есть снова окружность. Чтобы не заблудиться в стереометрии, сошлемся на известные факты. Во-первых, хорды (или секущие) делятся точкой пересечения на отрезки (другие концы которых — точки пересечения с окружностью), произведение длин которых постоянно и равно квадрату длины касательной из A к S^2. Во-вторых, это позволяет нам продолжить данное A-отображение сферы до отображения в себя всего пространства, при котором сфера S^2, разумеется, переходит сама в себя. Это отображение, как и в плоском случае, называется инверсией, его свойства известны и среди них то, что инверсия переводит окружности в окружности. Заметим, что как и в плоском случае, при удалении точки Q, вдоль произвольной прямой l пучок прямых, проходящих через Q, все меньше отличается вблизи сферы S^2 от параллельных к прямой l и Q-отображение все меньше отличается от симметрии относительно плоскости, проходящей через центр S^2 и перпендикулярной l. В пределе его можно считать совпадающим с этой симметрией.

Множество всех точек P, таких что для всех x на сфере $A(P(x)) = P(A(x))$ (т.е. A и P определяют коммутирующие отображения), есть полярная к A плоскость. Это тривиально следует из плоского случая. В самом деле, проведем через P, A и B плоскость γ. γ пересекается с S^2 по некоей окружности T, а с полярной к A плоскостью (обозначим ее π) по некоей прямой l. Поскольку касательные в плоскости γ из A к T есть одновременно и касательные к сфере S^2, то точки касания лежат в π и, следовательно, полярная прямая к A в плоскости γ совпадает с l. Поскольку в плоскости γ коммутативность отображений, задаваемых A и P, выполняется (P лежит на поляре к A), и все построения с точкой x не выходят за пределы плоскости γ, то требуемое тождество установлено.

Как уже было сказано, «точки» моделируемой геометрии это пары $(x, A(x))$ где $x \neq A(x)$, т.е. пересечения сферы S^2 прямыми, проходящими через A, а «прямые» моделируемой геометрии — окружности сферы, лежащие в одной плоскости с A, т.е. пересечения сферы S^2 плоскостями, проходящими через A. Выясним, какое отображение «точек» и «прямых» моделируемой геометрии задает точка P, лежащая на полярной к A плоскости, но не принадлежащая S^2.

P-отображение переводит пару $(x, A(x))$ в пару $(P(x), P(A(x))) = (P(x), A(P(x)))$, т.е. «точку» модели в «точку». Поскольку P-отображение переводит окружности на сфере S^2 в окружности, а пару точек, лежащих на одной прямой с A, в пару точек, снова лежащую на одной прямой с A, то «прямые» модели перейдут в «прямые». Если P лежит вне сферы S^2, то P-отображение оставляет неподвижным основание касательного конуса к S^2. Эта окружность лежит на полярной к P плоскости, проходящей через A, и следовательно, является «прямой» модели. Обратно, всякая «прямая» l модели задает некую полярную к ней точку P, лежащую вне S^2 на полярной к A плоскости и такую, что P-отображение оставляет неподвижной l. Пусть теперь P лежит внутри S^2. Проведем через P и A прямую. Эта прямая пересекает сферу S^2 в двух точках x и $A(x)$, определяющих «точку» модели. Очевидна, эта «точка» перейдет в себя при P-отображении, так как P, x, $A(x)$ лежат в данном случае на одной прямой.

Итак, каждая точка P на полярной к А плоскости π определяет инволютивное P-отображение модели геометрии в себя, причем, если P лежит вне сферы S^2, то имеется неподвижная «прямая», а если внутри S^2, то имеется неподвижная «точка». Напрашивается мысль, что мы имеем дело с осевыми и точечными симметриями модели. Прежде чем выяснить, так ли это, надо проверить, как обстоит дело в этих моделях со свойствами взаимного расположения точек и прямых (пересечение и параллельность прямых). Для этого удобней мыслить «точки» и «прямые» геометрии не как пары точек и окружности на сфере, а как прямые и плоскости, проходящие через эти точки и окружности (и, разумеется, проходящие через A).

Про то, что в указанных моделях все в порядке со свойствами параллельности, было сказано в самом начале. Приступим к изучению метрических свойств модели, т. е. к тому, как можно определить расстояния и углы. При этом желательно, чтобы P-отображения задавали осевые и точечные симметрии. Заметим, что стоящая перед нами задача противоположна возникающей в школьном курсе или в книге Гильберта «Основания геометрии». Обычно предполагается, что мы умеем измерять длину отрезков и величину углов. Исходя из этого мы выясняем, какие отображения плоскости в себя сохраняют расстояния и углы, в частности, убеждаемся, что расстояние между парой точек не меняется при осевой симметрии. Сейчас же мы предполагаем, что некоторые отображения «точек» и «прямых» модели являются симметриями, и хотим узнать, как можно определить длины и углы. Понятно, что определяемое расстояние между «точками» и величина угла между «прямыми» не должны меняться при P-отображении.

Можно поступать различными способами. Можно определить, что отрезок $[AB]$ конгруэнтен отрезку $[A'B']$ тогда и только тогда, когда существует последовательность P-отображений, при которой A перейдет в A' и B в B', и затем проверить выполнение аксиом конгруэнтности, выделенных Гильбертом в особую группу. Можно, и это проще и красивей, следуя Бахману определять геометрию на основе симметрии и проверить, что свойства P-отображений в точности соответствуют аксиомам Бахмана (при этом, например, свойства P-отображений будут красиво соответствовать теоремам о вписанном в круг шестиугольнике). Но проще всего воспользоваться (и в этом есть методологическое преимущество единообразия, при котором мы не рассматриваем отдельно каждую геометрию, а по возможности оперируем общими свойствами сечений сферы) известными свойствами инверсий.

Именно, оказывается, что проще, чем расстояние между «точками» модели, определить величину угла между «прямыми» модели. Прежде всего, определим угол между двумя пересекающимися окружностями на сфере, как угол между касательными к ним в точке пересечения (точек пересечения две, но указанные углы одинаковы, из-за симметрии). P-отображения, как было сказано, — частный случай инверсии в трехмерном пространстве. Инверсии хорошо изучены и известно, что они сохраняют определенные таким образом углы между окружностями (и вообще всякими кривыми). Поэтому P-отображение оставляет неизменными углы между окружностями сферы S^2, в частности, между окружностями, лежащими на одной плоскости с A, т. е. с «прямыми». Мы можем тогда назвать углом между «прямыми» модели угол между задающими их окружностями, поскольку он не меняется при P-отображении. Нужно показать лишь, что через данную «точку» L данной «прямой» l можно отложить под заданным углом φ (и в заданном направлении) одну и только одну «прямую» l'.

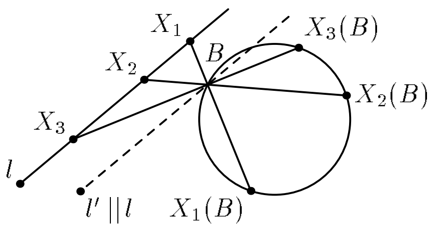
Одну такую «прямую» построить просто. Касательная к окружности, определяющей l (для краткости будем тоже называть ее l, как и далее будем пользоваться одним символом для обозначения окружности и определенной ею «прямой» модели), в точке L лежит на касательной к S^2 в точке L плоскости, там же лежит и касательная к l'. Поскольку угол между этими касательными может быть любым, то проведя через эти касательные и A плоскости, получим «прямые» модели, пересекающиеся под данным углом. Докажем теперь, что второй такой «прямой» нет. Пусть есть l'' такая, что $\angle l, l' = \angle l, l''$. Тогда $\angle l', l'' = 0$ (следует например, из того, что все касательные к трем рассматриваемым «прямым» лежат в одной плоскости и проходят через точку общую касания). Угол между двумя окружностями равен нулю лишь если они касаются друг друга, т. е. имеют всего одну общую точку. Такой случай невозможен для «точки» модели из-за условия $x \neq A(x)$. Поэтому между пересекающимися «прямыми» модели угол не может быть нулевым. Следовательно, $l'' = l'$, что и требовалось. Кстати, заметим, что если окружности l'' и l' пересекаются в полярной к A плоскости, то определяемые ими «прямые» приближаются друг к другу и пересекались бы, если неподвижные точки входили бы в модель.

Итак, откладывание углов заданной величины возможно и единственно. Теперь мы можем сказать, что P-отображение сохраняет углы между прямыми модели. Если геометрия неевклидова (т. е. A не лежит на поверхности сферы), то в ней не существует подобных и не конгруэнтных треугольников, каждый треугольник (и длины его сторон) вполне определяется величинами своих углов. Поэтому, раз P-отображение сохраняет углы в этих геометриях, то оно сохраняет и длины. Что и требовалось. В евклидовом случае возможно подобие треугольников, поэтому сохранение углов не влечет автоматически сохранение длин. Но P-отображение не только сохраняет углы, но и оставляет неподвижным «прямую», а это возможно лишь при осевой симметрии.

Посмотрим теперь, как выглядят окружности в этих моделях. Построение окружностей производится единообразно для всех геометрий и не зависит от расположения S^2 и A. На плоскости окружность можно определить так: будем проводить всевозможные прямые через данную точку O и будем смотреть куда отображается при осевых симметриях относительно этих прямых фиксированная точка A. Множество всех этих образов и составит окружность с центром в O и радиусом $|OA|$. Аналогично поступим для всех трех моделей.

P-отображения оставят неподвижными «точку» O и некоторую «прямую» модели, проходящую через нее, только если P лежит на касательной к O плоскости.

(Строго говоря, «точка» модели есть пара точек, но в следующих построениях можно взять какую-нибудь одну точку из этой пары). Эта плоскость пересекается с полярной к A плоскости по некоторой прямой l. Пусть B лежит на S^2 и вкупе с B' определяет «точку» модели (как уже упоминалось, наличие точки B' не существенно для этих построений), найдем все точки, куда может перейти B при P-отображениях, оставляющих неподвижными O. Пусть точка $x \in l$, тогда $x(B)$ лежит на плоскости β, определенной l и B, причем, если x пробегает всю l, то прямые, проходящие через x и B, заполняют всю β, кроме одной единственной прямой, проходящей через B и параллельной l. Отсюда следует, что множество $x(B)$ заполняет окружность, по которой β пересекается с S^2, кроме одной точки, лежащей на прямой, проходящей через B и параллельной l. В плоскости β это выглядит, как показано на рисунке.



Но, как мы уже говорили, добавляя бесконечно-удаленную точку (или рассмотрев симметрию относительно перпендикулярной к l плоскости, проходящей через центр S^2) мы получим недостающую точку окружности. Теперь можно рассмотреть $A(O)$ и $A(B)$ и выполнить точно такие же построения. Их итог совпадет с образом уже построенной окружности при P-отображении.

Итак, окружности в исследуемых моделях изображаются парой окружностей на сфере. Можно в нашей модели рассматривать не все точки сферы, а лишь сегмент сферы (как, рассматривая сферическую геометрию, мы ограничиваемся полусферой). Тогда каждая точка этого сегмента будет однозначно соответствовать «точке» модели и обратно, окружность же модели будет изображаться на этом сегменте одной окружностью, а не парой. Как легко видеть, центры этих окружностей модели не совпадают с их обычными центрами на сфере, что неудивительно, поскольку расстояния на сфере и в этих моделях не совпадают (в отличие от углов).

Свяжем теперь эти модели с уже хорошо известными.

Пусть A в центре сферы. Тогда получается общеизвестная модель сферической геометрии. Заметим, что в роли осевых симметрий этой геометрии выступают симметрии относительно плоскостей, проходящих через центр сферы. Эти симметрии совпадают с P-отображениями, где все P — бесконечно удалены. Если A внутри сферы, но отлично от ее центра, то можно перейти через инверсию к случаю, когда А совпадает с центром.

Пусть A на поверхности сферы. Рассмотрим стереографическую проекцию, т. е. проекцию сферы S^2 на плоскость, касающуюся сферы в точке, диаметрально противоположной A. «Прямые» и «точки» определенной нами модели перейдут в прямые и точки плоскости с сохранением всех метрических свойств.

Наиболее интересен случай, когда A — вне сферы. Рассмотрим сечение S^2 полярной к A плоскостью. Обозначим окружность сечения T. Можно сопоставить каждой точке круга, ограниченного T, «точку» геометрии, проведя прямую через нее и A, а каждой хорде в круге — «прямую», проведя плоскость через хорду и A. Тем самым получим модель Клейна для геометрии Лобачевского. Как известно, в этой модели две хорды представляют перпендикулярные прямые, если прямые (на коих лежат хорды) взаимно полярны, что согласуется с проведенными выше построениями.

Указанная связь с уже существующими моделями делает предыдущие рассуждения о том, определяют ли P-отображения конгруэнтные длины и углы, избыточными. Тем не менее, мне хотелось показать, как рассмотрение пучков прямых и плоскостей, пересеченных со сферой, позволяет определить свойства неевклидовых геометрий, одновременно обрабатывая разные геометрические модели (ведь в большой части рассуждений взаиморасположение A и S^2 было несущественно).

Приложение

Докажем приведенные в основном тексте свойства полярных прямых. Доказательство интересно тем, что использует инволютивное преобразование в пространстве.

Пусть радиус исходной окружности R. Пусть тогда точка W расположена над центром окружности O на расстоянии R. Рассмотрим пучок прямых и плоскостей, проходящих через W (для краткости — W-пучок). Каждой прямой этого пучка можно однозначно сопоставить плоскость пучка, перпендикулярную ей. Обратно, каждой плоскости пучка можно однозначно сопоставить перпендикулярную ей прямую пучка. Если прямая W-пучка l лежит на некоей плоскости δ, то перпендикулярная к l плоскость включает в себя перпендикулярную к δ прямую. Если три прямых W-пучка лежат на одной плоскости, то перпендикулярные им плоскости пересекаются по одной прямой.

Теперь выясним, как пересекаются перпендикулярные прямые и плоскости пучка с исходной плоскостью, где лежит окружность. Пусть прямая пересекается в точке A, а плоскость по прямой m. Опустим перпендикуляр из A на m, пусть основание этого перпендикуляра A'. Треугольник $A'WA$ — прямоугольный, $|WO|$ — его высота, отсюда $|WO| \cdot |WO| = |OA'| \cdot |OA|$. Поэтому, если мы отобразим симметрично относительно O прямую m, то получим как раз поляру к точке A. Тем самым точке и полярной к ней прямой можно сопоставить прямую и перпендикулярную ей плоскость W-пучка. Отсюда сразу следуют указанные свойства поляр. Мы рассматривали лишь случай, когда A лежит вне окружности. Если же A лежит внутри окружности, то удобно назвать ее полярой такую прямую, что для всякой точки B на этой прямой, поляра к B проходит через A (из сказанного выше следует, что множество таких точек есть прямая).

Доказательство свойств полярных плоскостей можно получить, рассматривая нужные сечения плоскостями сферы S^2, или, рассматривая четырехмерное пространство, пучок прямых и трехмерных пространств, проходящих через данную точку, и определяя соответствие прямой и перпендикулярного ей трехмерного пространства.