

Поверхность Зейферта

В. В. Прасолов

При изучении свойств узлов и зацеплений часто оказывается полезной вспомогательная ориентированная поверхность, натянутая на узел (зацепление). Таких поверхностей много, но обычно результат конструкции, основанной на одной из этих поверхностей, не зависит от выбора поверхности. Точное определение таково. Пусть L — ориентированное зацепление в $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ (ориентированность означает, что на каждой компоненте зацепления задана ориентация). *Поверхностью Зейферта* зацепления L называют связную компактную двумерную поверхность в S^3 , краем которой служит L , причем ориентация L индуцирована ориентацией поверхности.

ТЕОРЕМА 1. *У любого зацепления в S^3 есть поверхность Зейферта.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму D ориентированного зацепления L и уничтожим перекрестки диаграммы, как это показано на рис. 1. А именно, мы заменяем сплошные линии на пунктирные, которые проводятся единствен-



Рис. 1. Уничтожение перекрестков диаграммы

ным способом согласованно с ориентацией зацепления L . После уничтожения перекрестков получается набор замкнутых несамопересекающихся и попарно не пересекающихся кривых на плоскости. Эти кривые называют *окружностями Зейферта*.

Плоские диски, натянутые на окружности Зейферта, могут пересекаться (одна окружность Зейферта может лежать внутри другой). Но внутренние точки этих дисков можно сдвинуть в направлении, перпендикулярном плоскости диаграммы, так, чтобы диски стали попарно не пересекающимися (окружности Зейферта остаются при этом на месте). На каждом перекрестке соединим диски перекрученной полоской, краями которой служат ветви зацепления над этим перекрестком (на рис. 2 такая полоска заштрихована).

Естественные ориентации дисков согласованы с естественными ориентациями полосок, поэтому в результате мы получаем ориентированную поверхность, краем которой служит ориентированное зацепление L . Но эта поверхность не обязательно связна. Чтобы получить связную поверхность, возьмем две связные

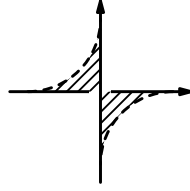


Рис. 2. Приклеивание полоски к дискам

компоненты, вырежем в каждой из них по маленькому диску и соединим возникшие края тонкой трубкой. В результате число компонент связности уменьшится, поэтому после нескольких таких операций получим связную поверхность. \square

Более подробное обсуждение этого доказательства и других взаимосвязей между узлами и двумерными поверхностями приведено в [1].

Род узла и ПРОСТЫЕ УЗЛЫ

Поверхность Зейферта узла K представляет собой компактную двумерную ориентированную поверхность, краем которой служит одна окружность. Приклеив к краю этой поверхности диск, получим двумерную поверхность рода g (сферу с g ручками). *Родом* узла K называют минимальный род поверхности, полученной таким образом (минимум здесь берется по всем поверхностям Зейферта узла K). Род узла K будем обозначать $g(K)$.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Доказать, что узел тривиален тогда и только тогда, когда его род равен 0.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Доказать, что род трилистника равен 1.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Доказать, что род торического узла типа (p, q) не превосходит $(p-1)(q-1)/2$. (Торический узел типа (p, q) , где p и q — взаимно простые числа, задается в $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ системой уравнений $|z| = |w|$, $z^p = w^q$. В действительности род торического узла типа (p, q) в точности равен $(p-1)(q-1)/2$.)

Для двух ориентированных узлов K_1 и K_2 можно определить их *композицию*, или *связную сумму*, $K_1 \# K_2$ посредством операции, изображенной на рис. 3.

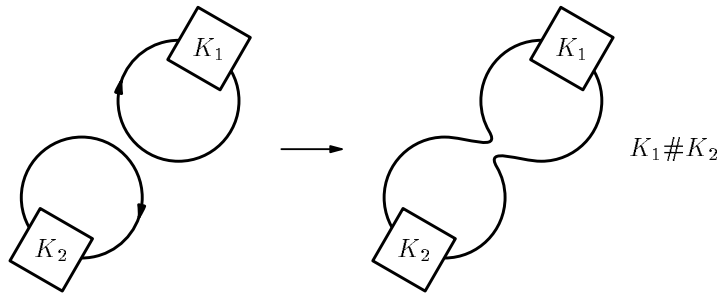


Рис. 3. Связная сумма узлов

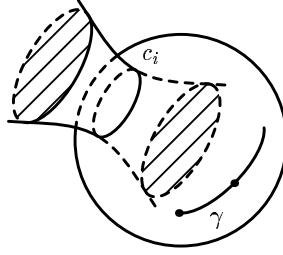


Рис. 4. Два параллельных диска

Неформально $K_1 \# K_2$ можно представлять так: мы берем веревку и завязываем на одном конце узел K_1 , а на другом конце узел K_2 ; затем концы веревки соединяем.

УПРАЖНЕНИЕ 4. Доказать, что узлы $K_1 \# K_2$ и $K_2 \# K_1$ эквивалентны.

ТЕОРЕМА 2. $g(K_1 \# K_2) = g(K_1) + g(K_2)$.

Доказательство. Пусть F_1 и F_2 — поверхности Зейферта минимального рода для узлов K_1 и K_2 . Разведем узлы K_1 и K_2 в разные стороны, так чтобы поверхности F_1 и F_2 не пересекались. Поверхности F_1 и F_2 не разбивают S^3 , поэтому их края K_1 и K_2 можно соединить длинной узкой полоской; чтобы ориентации поверхностей оказались согласованными, полоску можно перекрутить, в результате получим поверхность Зейферта рода $g(K_1) + g(K_2)$ для узла $K_1 \# K_2$. Это означает, что $g(K_1 \# K_2) \leq g(K_1) + g(K_2)$.

Пусть теперь F — поверхность Зейферта минимального рода для узла $K_1 \# K_2$. Из определения узла $K_1 \# K_2$ следует, что существует сфера $S^2 \subset S^3$, которая пересекает $K_1 \# K_2$ ровно в двух точках и разделяет узлы K_1 и K_2 . После малого шевеления поверхностей F и S^2 можно считать, что их пересечение $F \cap S^2$ состоит из нескольких гладких замкнутых кривых c_1, \dots, c_n и дуги γ , соединяющей точки пересечения S^2 и $K_1 \# K_2$. Каждая окружность c_i разбивает S^2 на два диска, один из которых не содержит γ . Этот диск заменяем на два параллельных ему диска, расположенных по разные стороны от S^2 ; на рис. 4 эти диски заштрихованы. Цилиндр, заключенный между новыми дисками, уничтожаем.

Сделаем такие перестройки поверхности F для всех окружностей c_1, \dots, c_n . В результате получим поверхность, одна из связных компонент которой является поверхностью Зейферта узла $K_1 \# K_2$. Общее число ручек всех связных компонент полученной поверхности не превосходит $g(F)$. Действительно, если перестройка по диску не нарушает связности поверхности, то число ручек уменьшается на 1, а если перестройка по диску разбивает поверхность на две связные компоненты, то общее число ручек не изменяется. Итак, мы построили для $K_1 \# K_2$ поверхность Зейферта F' , которая пересекает S^2 только по дуге γ и для которой выполняется неравенство $g(F') \leq g(F)$. Из минимальности рода поверхности F следует, что $g(F') = g(F) = g(K_1 \# K_2)$. Сфера S^2 разбивает F' на поверхности Зейферта для узлов K_1 и K_2 . Поэтому $g(K_1) + g(K_2) \leq g(F') = g(K_1 \# K_2)$. \square

СЛЕДСТВИЕ 1. Если узлы K_1 и K_2 нетривиальны, то узел $K_1 \# K_2$ нетривиален.

Прежде чем сформулировать еще два следствия теоремы 2, введем понятие простого узла. Нетривиальный узел P называют *простым*, если его нельзя представить в виде $P = K_1 \# K_2$, где K_1 и K_2 — нетривиальные узлы.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $g(K) = 1$, то K — простой узел.

СЛЕДСТВИЕ 3. Любой узел K можно представить в виде $K = P_1 \# \dots \# P_n$, где P_1, \dots, P_n — простые узлы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если узел K не простой, то его можно представить в виде $K = K_1 \# K_2$, где $1 \leq g(K_i) < g(K)$. Теперь можно воспользоваться индукцией по роду узла, основываясь на том, что если род узла равен 1, то узел простой. \square

Теоремы о существовании и единственности разложения на простые множители возникают в разных ситуациях. Наиболее известный пример теоремы такого рода — основная теорема арифметики. Как правило, существование разложения доказывается проще, чем единственность. Например, в основной теореме арифметики существование разложения очевидно (если $n = ab$ и $a > 1$, $b > 1$, то $a < n$ и $b < n$), а единственность требует нетривиального доказательства (наиболее распространенное доказательство основано на алгоритме Евклида). Более того, бывают ситуации, когда разложение на простые множители существует, но не единственно. Например, любая замкнутая двумерная поверхность представляется в виде связной суммы некоторого количества торов T^2 и проективных плоскостей P^2 (которые уже не разлагаются в связные суммы нетривиальным образом), но при этом $T^2 \# P^2 = P^2 \# P^2 \# P^2$.

Единственность разложения на простые множители нарушается также в кольцах целых алгебраических чисел. Первым это отметил Куммер, но его статья некоторое время не привлекала внимания. Вскоре после ее публикации французский математик Ламе предложил «доказательство» Последней теоремы Ферма, по поводу которого Лиувиль возразил, что оно опирается на единственность разложения на простые множители, которая для комплексных чисел не очевидна. Но Коши поддержал Ламе и некоторое время они пытались доказать единственность разложения. Это продолжалось до тех пор, пока Куммер не прислал Лиувиллю свою статью, в которой было показано, что разложение не единственно.

Вернемся, однако, к узлам. Представление узла K в виде $K = P_1 \# \dots \# P_n$, где P_1, \dots, P_n — простые узлы, единственно в том смысле, что если $P_1 \# \dots \# P_n = Q_1 \# \dots \# Q_m$ и все узлы P_i, Q_j простые, то $m = n$ и $P_i = Q_{\sigma(i)}$, где $\sigma \in S_n$ — некоторая подстановка. Единственность разложения узла K доказывается сложнее, чем существование. Для доказательства единственности нам потребуется следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $K = P \# Q = K_1 \# K_2$, причем узел P простой. Тогда либо $K_1 = P \# K'_1$ и $Q = K'_1 \# K_2$, либо $K_2 = P \# K'_2$ и $Q = K_1 \# K'_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S^2_{PQ} и S^2_{12} — сферы в S^3 , которые пересекают узел K ровно в двух точках и разделяют узлы P и Q , K_1 и K_2 . После малого шевеления этих сфер можно считать, что множество $S^2_{PQ} \cap S^2_{12}$ состоит из конечного

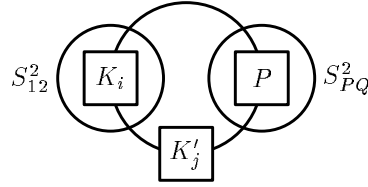


Рис. 5. Сферы S_{PQ}^2 и S_{12}^2

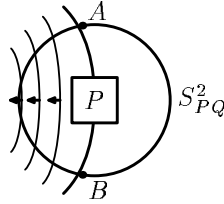


Рис. 6. Уничтожение кривых, не разделяющих точки A и B

числа гладких замкнутых несамопересекающихся (и попарно не пересекающихся) кривых c_1, \dots, c_n . Наша задача заключается в том, чтобы уничтожить все кривые c_1, \dots, c_n и сделать сферы S_{PQ}^2 и S_{12}^2 непересекающимися (рис. 5).

Пусть A и B — точки пересечения сферы S_{PQ}^2 и узла K . Каждая кривая c_i лежит на S_{PQ}^2 , поэтому она либо разделяет, либо не разделяет точки A и B . Кривые, которые не разделяют точки A и B , легко уничтожаются; начинать нужно с тех кривых, которые не содержат внутри себя других кривых (рис. 6).

При уничтожении кривых c_i , разделяющих точки A и B , нужно воспользоваться простотой узла P . Сфера S_{PQ}^2 разбивает S^3 на два трехмерных диска. Пусть D_P^3 — тот из этих дисков, который содержит узел P . Рассмотрим компоненту связности множества $D_P^3 \cap S_{12}^2$, содержащую кривую c_i . Эта компонента связности может быть либо двумерным диском (рис. 7 (а)), либо цилиндром (рис. 7 (б)). Во втором случае кривая c_i уничтожается вместе с еще одной кривой (вторым краем цилиндра). В первом случае двумерный диск D^2 пересекает узел K ровно в одной точке (мы предполагаем, что оба узла K_1 и K_2 нетривиальны;

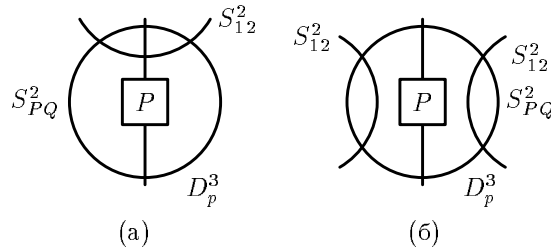


Рис. 7. Поверхность, натянутая на кривую c_i

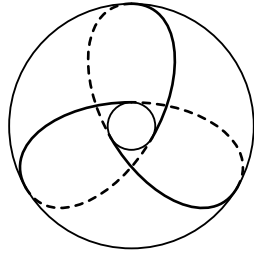


Рис. 8. Трилистник на торе

если один из этих узлов тривиален, то утверждение теоремы очевидно). Это следует из того, что сфера S^2_{12} пересекает узел K ровно в двух точках, а если бы диск D^2 пересекал узел K в двух точках, то один из узлов K_1 и K_2 был бы тривиальным, а другой совпадал бы с P . Из простоты узла P следует, что в D^3_P он целиком расположен по одну сторону от диска D^2 , поэтому диск D^2 можно уничтожить, уничтожив тем самым кривую c_i . \square

РАССЛОЕННЫЕ УЗЛЫ

Узел $K \subset S^3$ называют *расслоенным*, если существует семейство поверхностей Зейферта F_φ , $\varphi \in [0, 2\pi)$, которые целиком заполняют сферу S^3 , причем две разные поверхности пересекаются только по K .

ТЕОРЕМА 4. *Трилистник — расслоенный узел.*

Доказательство. Сферу $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ можно представить в виде объединения двух множеств, задаваемых неравенствами $|z| \leq |w|$ и $|z| \geq |w|$. Каждое из этих множеств является полноторием; их общая граница — тор. На этом торе расположен трилистник K , заданный уравнением $z^2 = w^3$ (рис. 8). Для одного из полноторий мы построим семейство заполняющих его поверхностей G_φ , каждая из которых гомеоморфна поверхности, изображенной на рис. 9. После этого требуемое семейство поверхностей F_φ легко будет построить, заклеив две круглые дырки в поверхности G_φ дисками.

Одна из поверхностей G_φ изображена на рис. 10 (а); ее край состоит из узла K и двух окружностей C_1 и C_2 . Чтобы более детально описать поверхность G_φ ,

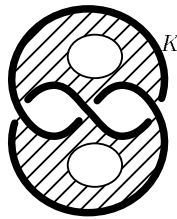


Рис. 9. Часть поверхности F_φ

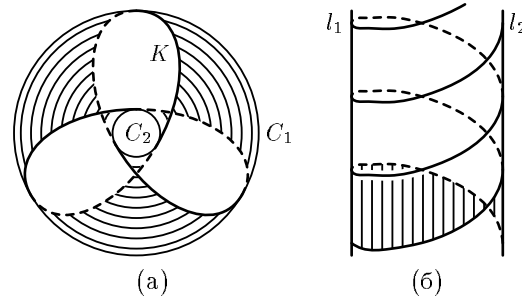
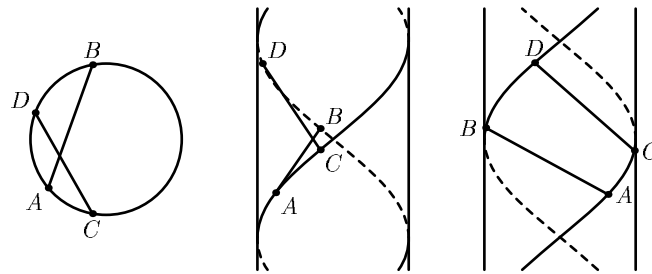
Рис. 10. Строение поверхности G_φ 

Рис. 11. Три проекции на координатные плоскости

мы воспользуемся тем, что полноторие можно получить из бесконечного прямого кругового цилиндра очевидной факторизацией. На поверхности этого цилиндра трилистнику K соответствуют две винтовые линии (рис. 10 (б)). Фиксируем для цилиндра две параллельные опорные плоскости Π_1 и Π_2 и рассмотрим поверхность G' , состоящую из отрезков, параллельных опорным плоскостям; концы отрезков лежат при этом на соседних витках винтовых линий. Часть поверхности G' изображена на рис. 10 (б). Граница поверхности G' состоит из двух винтовых линий и прямых l_1 и l_2 , по которым опорные плоскости касаются поверхности цилиндра.

Поворачивая опорные плоскости, мы получим семейство поверхностей G'_φ (угол φ соответствует удвоенному углу поворота опорных плоскостей). Две винтовые линии служат общим краем всех этих поверхностей. Рассмотрев проекции на три координатные плоскости, можно показать, что две разные поверхности G'_φ не имеют общих точек помимо их общего края. А именно, если проекции отрезков AB и CD , из которых состоят поверхности G'_φ , на две координатные плоскости пересекаются, то их проекции на третью координатную плоскость не пересекаются (рис. 11).

Очевидно, что каждая точка поверхности цилиндра принадлежит некоторой поверхности G'_φ . Покажем, что и каждая внутренняя точка x цилиндра тоже принадлежит некоторой поверхности G'_φ . Рассмотрим для этого часть поверхности G' , изображенную на рис. 10 (б). Прямая l_x , проведенная через точку x параллельно оси цилиндра, пересекает эту часть поверхности G' ровно в одной

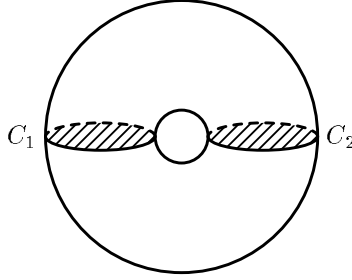


Рис. 12. Семейство поверхностей в другом полнотории

точке $x(0)$. Поворачивая поверхность G' так, чтобы ее края двигались по винтовым линиям, мы будем получать точки $x(\varphi) \in l_x \cap G'_{\varphi \pmod{2\pi}}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Точка $x(\varphi)$ непрерывно зависит от φ и любая точка прямой l_x расположена между точками $x(2\pi n)$ и $x(2\pi(n+1))$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому $x = x(\varphi)$ для некоторого $\varphi \in \mathbb{R}$.

Мы разобрались с одним полноторием. На другом полнотории окружности C_1 и C_2 выглядят так, как показано на рис. 12. Ясно, что диски, заклеивающие семейство таких окружностей, заполняют полноторие и попарно не пересекаются. \square

БЕСКОНЕЧНОЕ ЦИКЛИЧЕСКОЕ НАКРЫТИЕ

Оставшаяся часть статьи предназначена для тех, кто знаком с элементами теории накрытий.

Если X — достаточно хорошее линейно связное топологическое пространство, то для любой подгруппы $\pi \subset \pi_1(X, x_0)$ существует такое накрытие $p : \tilde{X} \rightarrow X$, что $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \pi$, $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Достаточно хорошим является, например, любое локально линейно связное локально односвязное пространство. Нас будет в основном интересовать случай $X = S^3 \setminus K$, где K — узел, но циклические накрытия удобно обсудить сразу в общей ситуации.

Накрытие $p : \tilde{X} \rightarrow X$ называют *циклическим*, если подгруппа $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \subset \pi_1(X, x_0)$ нормальная и факторгруппа $G = \pi_1(X, x_0)/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ циклическая. Если $G = \mathbb{Z}_n$, то накрытие p называют *циклическим порядка n* , а если $G = \mathbb{Z}$, то накрытие p называют *бесконечным циклическим*. Из стандартных теорем теории накрытий следует, что накрытие $p : \tilde{X} \rightarrow X$ циклическое тогда и только тогда, когда группа автоморфизмов этого накрытия циклическая, причем группа автоморфизмов действует на накрытии транзитивно, т. е. для любых точек $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x_0)$ существует автоморфизм накрытия, переводящий \tilde{x}_1 в \tilde{x}_2 .

Для циклических накрытий группа $\pi_1(X, x_0)/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ абелева, поэтому группа $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ содержит коммутант π' группы $\pi_1(X, x_0)$. Это означает, что если $\pi_1(X, x_0)/\pi' \cong \mathbb{Z}$, то бесконечное циклическое накрытие $p : \tilde{X} \rightarrow X$ существует и единственно (с точностью до эквивалентности накрытий). Действительно, если $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \supset \pi'$ и $\pi_1(X, x_0)/\pi' \cong \pi_1(X, x_0)/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, то $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \pi'$, а подгруппа $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \supset \pi_1(X, x_0)$ однозначно задает накрытие.

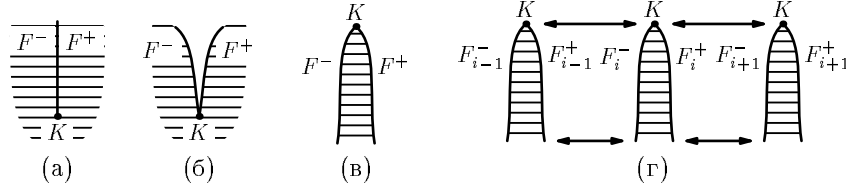


Рис. 13. Построение бесконечного циклического накрытия

Циклическое накрытие порядка n в таком случае тоже существует и единственно, потому что в \mathbb{Z} есть ровно одна группа H , для которой $\mathbb{Z}/H \cong \mathbb{Z}_n$, а именно, $H = n\mathbb{Z}$.

Если K — узел в S^3 , то фундаментальная группа пространства $X = S^3 \setminus K$ как раз и обладает тем свойством, что факторгруппа ее по коммутанту изоморфна \mathbb{Z} . Поэтому для $X = S^3 \setminus K$ однозначно определено бесконечное циклическое накрытие $p : \tilde{X} \rightarrow X$. Пространство \tilde{X} удобно строить с помощью поверхности Зейферта узла K . Независимость этой конструкции от выбора поверхности Зейферта следует из того, что пространство \tilde{X} единственно (с точностью до гомеоморфизма).

Пусть F — поверхность Зейферта узла K . Разрежем сферу S^3 по F . В результате получим 3-мерное многообразие M^3 с краем $F^+ \cup F^-$; каждой точке $a \in F \setminus K$ соответствуют две точки $a^+ \in F^+$ и $a^- \in F^-$ (возможность выбрать знаки $+$ и $-$ для всех точек согласованным образом следует из ориентируемости поверхности F). Возьмем счетное множество экземпляров M_i^3 , $i \in \mathbb{Z}$, таких многообразий и отождествим F_{i-1}^+ с F_i^- (отождествляются точки a_{i-1}^+ и a_i^- , соответствующие одной и той же точке). Схематично эта конструкция изображена на рис. 13. Полученное пространство \tilde{X} накрывает $X = S^3 \setminus K$. Отображения $M_i^3 \rightarrow M_{i+1}^3$, $i \in \mathbb{Z}$, индуцируют автоморфизм σ этого накрытия, причем группа автоморфизмов накрытия порождается элементом σ и изоморфна \mathbb{Z} . Кроме того, группа автоморфизмов действует на накрытии транзитивно. Поэтому $p : \tilde{X} \rightarrow X$ — бесконечное циклическое накрытие.

Бесконечное циклическое накрытие пространства $S^3 \setminus K$ используется для построения важного инварианта узла K — полинома Александера. Кроме того, одно из многих возможных определений коэффициента зацепления тоже использует бесконечное циклическое накрытие.

КОЭФФИЦИЕНТ ЗАЦЕПЛЕНИЯ

Пусть J и K — ориентированные замкнутые кривые в S^3 . Предполагается, что эти кривые не пересекаются и не имеют самопересечений. Рассмотрим диаграмму ориентированного зацепления, составленного из кривых J и K . Будем обращать внимание лишь на те перекрестки, где кривая K проходит над J . Такие перекрестки бывают двух типов (см. рис. 14).

Для каждого рассматриваемого перекрестка возьмем соответствующее значение $\varepsilon_i = \pm 1$ и сложим все числа ε_i . Полученное в результате число называют *коэффициентом зацепления* замкнутых ориентированных кривых J и K в S^3 и

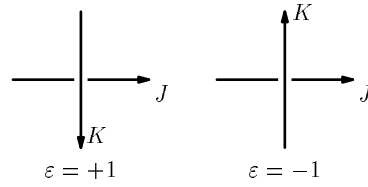


Рис. 14. Выбор знака

обозначают $lk(J, K)$. В [2] показано, что коэффициент зацепления не зависит от выбора диаграммы зацепления $\{J, K\}$; кроме того, $lk(J, K) = lk(K, J)$.

Известно много других (эквивалентных) определений коэффициента зацепления. Мы приведем два определения коэффициента зацепления, первое из которых использует поверхность Зейферта явно, а второе — неявно, через посредство бесконечного циклического накрытия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть F — поверхность Зейферта ориентированного узла J . Будем считать, что ориентированный узел K трансверсально пересекает поверхность F в конечном числе точек. Каждой точке пересечения сопоставим число $\varepsilon_i = \pm 1$ по следующему правилу. Зададим на поверхности Зейферта ориентацию, считая положительно ориентированным репер $\{e_1, e_2\}$, где e_1 — вектор скорости кривой J , e_2 — вектор внутренней нормали (он перпендикулярен e_1 , касается поверхности F и направлен внутрь F). Пусть e_3 — вектор скорости кривой K в точке $a \in K \cap F$, $\{e'_1, e'_2\}$ — положительно ориентированный репер на поверхности F в точке a . Тогда $\varepsilon_i = +1$, если ориентация репера $\{e'_1, e'_2, e_3\}$ совпадает с ориентацией сферы S^3 ; в противном случае $\varepsilon_i = -1$. Сумму всех чисел ε_i называют коэффициентом зацепления кривых J и K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $p : \tilde{X} \rightarrow X$ — бесконечное циклическое накрытие пространства $X = S^3 \setminus J$, σ — образующая группы автоморфизмов этого накрытия (таких образующих две; какую именно нужно выбрать, мы обсудим чуть позже). Кривую K можно рассматривать как петлю в X с началом и концом в точке $x_0 \in K$. Пусть $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$. Рассмотрим поднятие петли K с началом в точке \tilde{x}_1 . Пусть \tilde{x}_2 — конец этого поднятия. Тогда $\tilde{x}_2 = \sigma^m(\tilde{x}_1)$. Число m называют коэффициентом зацепления кривых J и K .

Покажем, что определения 1 и 2 эквивалентны исходному определению коэффициента зацепления. Отметим, что в определении 1 есть зависимость от выбора поверхности Зейферта F , а в определении 2 такой зависимости нет. Поэтому достаточно доказать следующие утверждения:

- а) для некоторой поверхности Зейферта F определение 1 совпадает с исходным определением коэффициента зацепления;
- б) для любой поверхности Зейферта F определение 1 совпадает с определением 2.

Начнем с доказательства утверждения а). Можно считать, что поверхность Зейферта F узла J расположена над плоскостью его диаграммы (здесь мы не обращаем внимания на перекрестки диаграммы узла J , потому что проекция кривой K не пересекает их). Можно также считать, что кривая K расположена в плоскости диаграммы и лишь на перекрестках проходит под или над

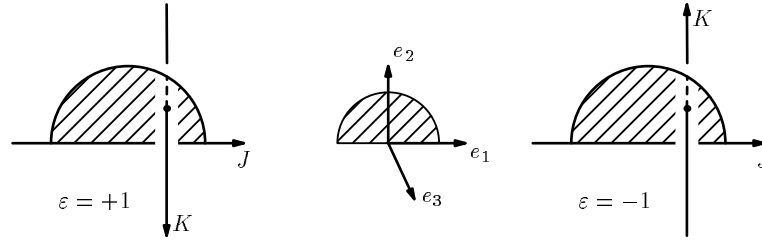


Рис. 15. Пересечение узла и поверхности Зейферта

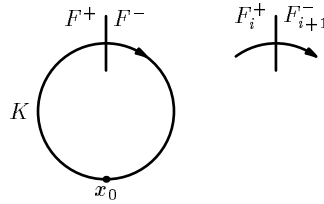


Рис. 16. Выбор знака

плоскостью. В такой ситуации кривая K пересекает поверхность F в точности на тех перекрестках, на которых кривая K проходит над J . При этом знаки \pm , соответствующие точкам пересечения K и F , совпадают со знаками, соответствующими перекресткам диаграммы зацепления $\{J, K\}$ (рис. 15).

Займемся теперь доказательством утверждения б). По ходу доказательства мы выясним, какую именно из двух образующих циклической группы автоморфизмов накрытия нужно выбирать. Построим пространство \tilde{X} с помощью произвольной поверхности Зейферта F узла J . Пусть сначала кривая K пересекает поверхность F ровно в одной точке, причем пересекает в направлении от F^+ к F^- (рис. 16). Тогда если \tilde{x}_1 и \tilde{x}_2 — начало и конец поднятия петли K , то $\tilde{x}_2 = \sigma(\tilde{x}_1)$, где автоморфизм σ индуцирован отображениями $M_i^3 \rightarrow M_{i+1}^3$. Поэтому знаки поверхностей F^+ и F^- нужно выбрать так, чтобы положительно ориентированный репер на поверхности F вместе с вектором, направленным от F^+ к F^- , образовывал положительно ориентированный репер в S^3 . (Выбор знаков поверхностей F^+ и F^- эквивалентен выбору образующей σ .) При таком выборе знаков в общей ситуации количество точек пересечения кривой K с поверхностью F (с учетом знаков) равно как индексу зацепления, вычисленному по определению 1, так и индексу зацепления, вычисленному по определению 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Прасолов В. В. Наглядная топология. М.: МЦНМО, 1995.
- [2] Прасолов В. В., Сосинский А. Б. Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. М.: МЦНМО, 1997.