

Задачный раздел

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Некоторые из этих задач (не обязательно самые сложные!) требуют знания «неэлементарной» математики — анализа, линейной алгебры и т. п.

Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Помимо *решения* задач, в высшей степени полезно упражняться в *изложении решений*. Мы советуем всем, решившим какую-либо из задач, постараться записать её решение в максимально простом и понятном виде и прислать в редакцию. В последующих номерах мы опубликуем самые изящные из полученных решений.

К сожалению, нам известны авторы далеко не всех предлагаемых ниже задач. Многие из них известны десятилетиями и стали частью «математического фольклора». Одна из целей, преследуемых составителями данного раздела, — записать этот «фольклор», многие части которого стремительно исчезают в наше время.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи. Ждем ваших писем.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются). Если автор задачи неизвестен, мы указываем того, кто предложил эту задачу.

1. A, B, C — произвольные матрицы размера 2×2 . Докажите тождество Холла: $[[A, B]^2, C] = 0$. (Через $[A, B] \stackrel{\text{def}}{=} AB - BA$ обозначается *коммутатор*).
(*фольклор*)
2. Пусть $|\varepsilon_i| < 1$ и произведение $\prod(1 - \varepsilon_i)$ сходится. Верно ли, что сходится ряд $\sum \varepsilon_i$?
(*А. Белов*)
3. а) Существует ли непрерывная функция $f(x)$, удовлетворяющая функциональному уравнению: $f(f(f(x))) = e^{-x}$.
б) Тот же вопрос для разрывной функции.
в) И для функции, имеющей конечное число точек разрыва.
(*К. Мальков*)
4. а) Пусть $p > 3$ — простое число. Докажите, что на торической шахматной доске размера $p \times p$ можно расставить p ферзей так, чтобы они не били друг друга.
б) Назовем *магараджей* фигуру, которая из клетки $(0, 0)$ за один ход может попасть в клетки $(0, \pm k)$, $(\pm k, 0)$, $(\pm k, \pm k)$, $(\pm k, \pm 2k)$, $(\pm 2k, \pm k)$ (k — целое положительное число). Ответьте на вопрос пункта а) для магарадж и при $p > 7$.
(*А. Белов*)

5. Дан произвольный многочлен с комплексными коэффициентами. Докажите, что корни его производной лежат внутри выпуклой оболочки корней самого многочлена. (Фольклор)
6. (Задача на исследование). При каких n и k существует замкнутая n -звенная ломаная, пересекающая каждое свое звено ровно k раз (такую ломаную будем называть ломаной типа (n, k)).
- Если n и k оба нечетны, то это невозможно.
 - Если nk четно, и $n > 3k$, то это возможно.
 - Постройте ломаную типа $(8, 2)$.
 - Существует ли ломаная типа $(6, 2)$.

Приведите разные другие примеры. (А. К. Ковальджи)

7. Две кривые второго порядка проходят через точки A, B, C, D . Через точку O пересечения прямых AC и BD проведены хорды KM, LN одной кривой и $K'M', L'N'$ другой. Прямые KL и $K'L'$ пересекаются в точке P , MN и $M'N'$ — в точке Q . Доказать, что точки P, Q, O лежат на одной прямой. (А. Заславский)
8. Внутри выпуклого пятиугольника проведены диагонали. Докажите, что они образуют пятиугольник, проективно эквивалентный исходному. (Д. Любшин)
9. Докажите, что на поверхности выпуклого многогранника всегда есть 5 точек, являющихся вершинами правильного пятиугольника. (Из переписки С. Маркелова с исследователем Антарктиды)
10. $a_0 = 1, a_{n+1} = 9^{a_n}, x = \sum \frac{1}{a_i}$. Докажите, что в десятичном разложении числа x встречается любая комбинация цифр. (А. Ерошин и А. Белов)
11. ** а) Плоскость раскрашена в 3 цвета. Докажите, что можно указать такой цвет, что для любого неотрицательного r найдутся две точки плоскости на расстоянии ровно r , окрашенные в этот цвет.
б) Приведите пример раскраски в 6 цветов, когда это не так. (Фольклор)