Геометрия

О построении линейкой центров окружностей*

А. А. Заславский

Глава 26 замечательной книги [1] называется «О необходимости циркуля в построениях элементарной геометрии». Основное содержание этой главы составляет доказательство невозможности построения одной линейкой центра окружности. Невозможность такого построения следует из существования центральной проекции, переводящей окружность в окружность, а центр исходной окружности — в точку, не совпадающую с центром её образа. Действительно, поскольку при такой проекции все прямые переходят в прямые, а точки пересечения прямых друг с другом и исходной окружностью в точки пересечения образов прямых друг с другом и образом окружности, то, проецируя построение центра исходной окружности, мы получили бы построение центра её образа, что не имеет места.

Г. Радемахер и О. Тёплиц указывают также, что существует центральная проекция, переводящая две непересекающиеся, неконцентрические окружности в окружности, но не сохраняющая центры. Из этого они делают вывод, что центры двух таких окружностей тоже нельзя построить одной линейкой. (В брошюре [2] показано, как построить одной линейкой центры двух пересекающихся, касающихся или концентрических окружностей, а также трёх несоосных окружностей.) В примечании от редактора говорится, что этот вывод некорректен, поскольку центральная проекция не является взаимно однозначным отображением и прямые, пересекающиеся на исходной плоскости, могут про-

* См. задачу 17.5 (вып. 17, с. 196).

ецироваться в параллельные, а тогда мы не сможем спроецировать построение центров (для одной окружности это затруднение легко обойти, поскольку центр и плоскость проекции можно выбрать бесконечно многими способами). Более того, в работе [3] утверждается, что для некоторых (не для всех!) пар непересекающихся окружностей построить центры непересекающихся окружностей одной линейкой можно.

На самом деле, последнее утверждение нуждается в уточнении. В [3] предполагается, что при построении линейкой можно не только проводить прямые через две отмеченные точки и отмечать точки пересечения проведённых линий или случайные точки, но и определять, являются ли две построенные прямые параллельными. Это предположение можно считать оправданным, если построения проводятся в графическом редакторе (например, Geogebra), который по координатам двух точек строит уравнение проходящей через них прямой, а по уравнениям двух прямых находит координаты точки их пересечения или сообщает об отсутствии таковой (впрочем, и в этом случае необходима абсолютная точность вычислений, недостижимая в реальной жизни). Если же речь идёт о построении карандашом на бумаге, то установить, действительно ли две прямые параллельны или мы просто не смогли провести их до точки пересечения, можно не всегда.

Строго говоря, на вопрос о возможности построения одной линейкой центров двух непересекающихся, неконцентрических окружностей нельзя дать однозначного ответа, пока не формализовано понятие «построение одной линейкой». Можно предложить, как минимум, три формализации.

1. Построение проводится на евклидовой плоскости и представляет последовательность следующих операций:
— отметить случайную точку на плоскости, данной или построенной ранее линии;
— провести прямую через две отмеченные точки:
— отметить точку пересечения двух данных или построенных ранее линий, либо убедиться, что такой точки не существует.

В этом случае, как показано в [3], существуют пары окружностей, для которых центры построить можно, и пары окружностей, для которых центры построить нельзя.

2. Построение проводится в ограниченной области евклидовой плоскости и представляет последовательность следующих операций:
— отметить лежащую в данной области случайную точку плоскости, данной или построенной ранее линии;

— построить лежащий в данной области отрезок прямой, соединяющей две отмеченные точки;
— отметить точку пересечения данных или построенных линий, если она лежит в данной области.

Заметим, что «недоступность» точки пересечения двух построенных прямых не препятствует использованию этой точки в дальнейших построениях, поскольку можно построить прямую, соединяющую недоступную и отмеченную точки, а также найти точку пересечения прямой, проходящей через две недоступные точки, с другой прямой. Решения этих задач можно найти в [4].

Очевидно, что в этой формализации мы не можем отличить параллельные прямые от пересекающихся вне данной области. Поэтому приведённое в [1] рассуждение становится корректным и центры непересекающихся окружностей построить нельзя.

3. Построение проводится на проективной плоскости и представляет последовательность следующих операций:
— отметить случайную точку на плоскости, данной или построенной ранее линии;
— провести прямую через две отмеченные точки;
— отметить точку пересечения данных или ранее построенных линий.

При этом мы не можем отличить конечную точку пересечения от бесконечно удалённой.

В этой формализации мы также не можем отличить параллельные прямые от пересекающихся. Соответственно построить центры нельзя.

Заметим, что с практической точки зрения две последние формализации одинаковы: недоступные точки могут оказаться как конечными, так и бесконечно удалёнными.

Можно предположить, что авторы книги [1] имели в виду вторую формализацию, моделирующую процесс построения на бумаге. С другой стороны, в статье [3] используется первая формализация, соответствующая современным компьютерным построениям. Именно этим объясняется различие полученных ответов.

Список литературы

[1] *Радемахер Г., Тёплиц О.* Числа и фигуры. М.: МЦНМО, 2020.

[2] *Смогоржевский А. С.* Линейка в геометрических построениях. М.: Гостехиздат, 1957.

[3] *Akopyan A.*, *Fedorov R.* Two circles and only straightedge. arXiv:1709.02562[mayh.MG].

[4] *Яглом И. М.* Геометрические преобразования. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1956.

Алексей Александрович Заславский, ЦЭМИ РАН, МЭИ
alzasl@yandex.ru