Антибиссектрисы: знакомые — незнакомые

В. М. Журавлёв, П. И. Самовол

§ 1. Введение: постановка задачи

В этой заметке мы хотим предложить читателям поразмыслить над следующей задачей про антибиссектрисы[1)].

Задача 1.

(а) *Однозначно ли определяется треугольник по длинам своих антибиссектрис*?

(б) *Для любых ли длин антибиссектрис существует треугольник с такими антибиссектрисами*?

(в) *Можно ли построить треугольник по трём антибиссектрисам циркулем и линейкой*?

Аналогичные задачи для медиан и высот входят в школьные учебники. Задаче для случая биссектрис около 150 лет, и она регулярно упоминается в математической литературе [2, 8]:

Для любых ли длин биссектрис существует треугольник с такими биссектрисами и однозначно ли определяется?

Можно ли построить треугольник по трём биссектрисам циркулем и линейкой?

Для задачи о биссектрисах найдено несколько различных решений, в том числе и доступных школьникам.

---

1) Две точки на стороне треугольника, равноотстоящие от середины этой стороны, называются *изотомическими* (*изотомически сопряжёнными*) точками. Аналогично, две прямые, соединяющие вершину треугольника с изотомическими точками противоположной стороны, называются *изотомическими прямыми* треугольника. Прямые, изотомические с внутренними или внешними биссектрисами треугольника, называются соответственно внутренними или внешними *антибиссектрисами* этого треугольника.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 30, 2022 (141–149)

Для случая симедиан задача также решена, хотя она не так известна, как задача про биссектрисы (см. [5]):

Однозначно ли определяется треугольник по длинам своих симедиан?

Для любых ли длин симедиан существует треугольник с такими симедианами?

Можно ли построить треугольник по трём симедианам циркулем и линейкой?

С решением задачи про симедианы можно ознакомиться в [4, 5].

§ 2. Антибиссектрисы — не такие, как все

Известно, что треугольник однозначно определяется по длинам трёх своих медиан. То же утверждение верно для высот, биссектрис и симедиан. Можно ожидать, что это утверждение верно для антибиссектрис. Но так ли это?

В «Математическом просвещении» мы уже рассказывали об антибиссектрисах [3]. Поэтому выберем факты об антибиссектрисах, которые нам понадобятся, и сформулируем их в виде упражнений. Доказательства читатель может найти самостоятельно или ознакомиться с ними в упомянутом источнике.

Используем общепринятые обозначения. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Через k_a, k_b, k_c обозначим длины антибиссектрис, проведённых к сторонам длины a, b, c соответственно.

Упражнение 1. Докажите, что треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда две его антибиссектрисы равны.

Упражнение 2. Если $a \geqslant b \geqslant c$, то $k_a \leqslant k_b \leqslant k_c$.

Другими словами, бóльшая антибиссектриса проведена к меньшей стороне.

Упражнение 3. Докажите, что квадрат длины антибиссектрисы можно найти по формуле

$$k_a^2 = b^2 + c^2 - bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}. \qquad (1)$$

Оказывается, ответ на пункт (а) задачи 1 — отрицательный. По длинам своих антибиссектрис треугольник не определяется однозначно.

Задача 2. Докажите, что существуют два неконгруэнтных треугольника, у которых совпадают длины трёх соответствующих антибиссектрис.

Более того, мы найдём два неравных равнобедренных треугольника, у которых совпадают длины антибиссектрис.

Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC (рис. 1). Пусть $BC = AC = a = b$, $AB = c$ и $a = b \geqslant c$, тогда $k_a = k_b \leqslant k_c$ согласно упражнению 2. Обозначим $\angle ACB = \gamma$ и $t = \sin(\gamma/2)$. Тогда $c = 2at$.

Зафиксируем длину большей антибиссектрисы, положив $k_c = 1$. Будем изменять угол γ от 0 до $\pi/3$, тогда переменная $t = \sin(\gamma/2)$ изменяется от 0 до 1/2. (При $\gamma = 0$ имеем $t = 0$ и получим вырожденный треугольник.) Длина другой антибиссектрисы будет являться функцией от t. Обозначим $k_a = k_b = y(t)$.

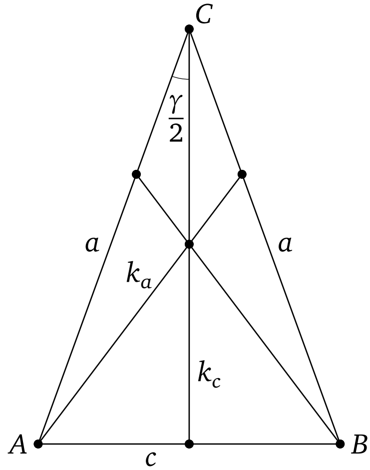

Рис. 1

Из упражнения 3 находим

$$1 = k_c^2 = a^2 - \frac{c^2}{4} = a^2(1 - t^2).$$

Отсюда получаем $a^2 = 1/(1-t^2)$. Далее,

$$y^2(t) = k_a^2 = k_b^2 = a^2 + c^2 - ac - \frac{a^3c}{(a+c)^2} =$$

$$= \frac{a^4 + ac^3 + c^4}{(a+c)^2} = a^2\frac{1 + 8t^3 + 16t^4}{(1+2t)^2} = \frac{1 + 8t^3 + 16t^4}{(1-t^2)(1+2t)^2}.$$

Тогда

$$y(t) = \sqrt{\frac{1 + 8t^3 + 16t^4}{(1-t^2)(1+2t)^2}}.$$

Нетрудно проверить, что $y(0) = 1$, $y(1/2) = 1$. На отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ функция $y(t)$ имеет локальный минимум. Чтобы его найти, можно использовать онлайн-калькулятор `https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/`. С его помощью легко нарисовать график функции (рис. 2), найти её производную, а также найти приближённое значение корня уравнения.

Получаем

$$y'(t) = -\frac{8t^5 - 28t^4 - 40t^3 - 16t^2 - t + 2}{(1-t^2)^2(1+2t)^3}\left(\frac{1 + 8t^3 + 16t^4}{(1-t^2)(1+2t)^2}\right)^{-1/2}.$$

Обозначим через $0 < t_0 < 1/2$ корень уравнения

$$8t^5 - 28t^4 - 40t^3 - 16t^2 - t + 2 = 0.$$

Используя онлайн-калькулятор, получим $t_0 \approx 0{,}25129$, $y(t_0) \approx 0{,}75030$.

Plot $\sqrt{\dfrac{1+8t^3+16t^4}{(1-t^2)(1+2t)^2}}$, $0 \le t \le 0{,}5$

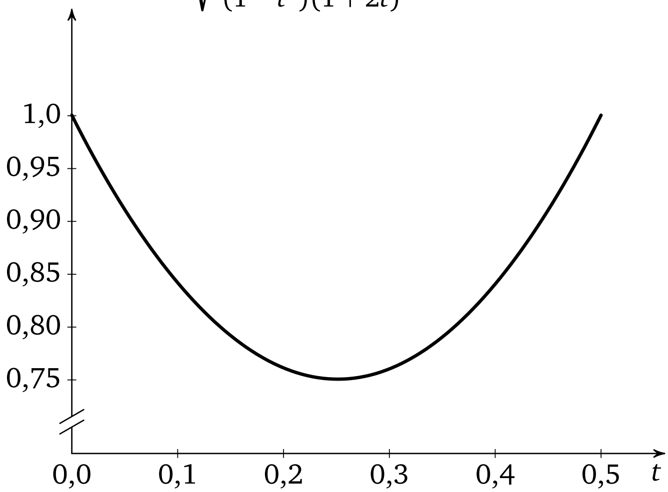

Рис. 2

Теперь ясно, что для любого значения антибиссектрис $y(t_0) < k_a = k_b < 1$ существуют два равнобедренных треугольника, у которых длины антибиссектрис совпадают, но углы разные.

§ 3. Существует ли треугольник с заданными антибиссектрисами?

Известно [2], что для любых положительных чисел l_a, l_b, l_c существует единственный треугольник с биссектрисами, длины которых равны l_a, l_b, l_c.

Для существования треугольника с длинами медиан, равными трём наперёд заданным положительным числам m_a, m_b, m_c, необходимо потребовать, чтобы числа m_a, m_b, m_c удовлетворяли неравенствам треугольника:

$$\begin{cases} m_a + m_b > m_c, \\ m_b + m_c > m_a, \\ m_c + m_a > m_b. \end{cases}$$

Ответ в случае высот и симедиан также известен [2], [5].

В этом разделе нас будет интересовать следующий вопрос: *для каких положительных чисел k_a, k_b, k_c существует треугольник с длинами антибиссектрис k_a, k_b, k_c?*

Не теряя общности, можно считать, что $k_a \leqslant k_b \leqslant k_c$, и положить $k_c = 1$.

Построим двумерную графическую модель. Отметим те точки (x, y) на координатной плоскости, для которых существует треугольник с антибиссектрисами, длины которых равны x, y, 1, причём $0 < x \leqslant y \leqslant 1$. Множеству всех допустимых точек (x, y) будет соответствовать некоторая область. Попытаемся найти уравнения прямых и кривых, ограничивающих эту область.

Мы не смогли получить явное уравнение одной из частей границы. Попробуем задать эту кривую параметрически.

В качестве параметров рассмотрим длины сторон треугольника a, b, c. Используем формулу (1) для квадрата длины антибиссектрисы:

$$\begin{cases} x^2 = k_a^2 = b^2 + c^2 - bc - \dfrac{a^2bc}{(b+c)^2}, \\ y^2 = k_b^2 = a^2 + c^2 - ac - \dfrac{b^2ac}{(a+c)^2}, \\ 1 = k_c^2 = a^2 + b^2 - ab - \dfrac{c^2ab}{(a+b)^2}. \end{cases} \tag{2}$$

Поскольку в нашей модели $0 < x \leqslant y \leqslant 1$, согласно упражнению 2 имеем $a \geqslant b \geqslant c$.

С параметрами a, b, c не очень удобно работать, поскольку трудно определить границы их изменения. Введём два новых параметра, положив $u = b/a$ и $v = c/a$. Поскольку a — наибольшая сторона, имеем $0 < v \leqslant u \leqslant 1$. Поскольку a, b, c удовлетворяют неравенству треугольника, имеем $a < b + c \leqslant 2b$, следовательно, $1/2 < b/a = u \leqslant 1$.

Разделим обе части каждого из уравнений системы (2) на a^2. Получаем

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = u^2 + v^2 - uv - \dfrac{uv}{(u+v)^2}, \\ \dfrac{y^2}{a^2} = 1 + v^2 - v - \dfrac{u^2v}{(1+v)^2}, \\ \dfrac{1}{a^2} = 1 + u^2 - u - \dfrac{v^2u}{(1+u)^2}. \end{cases}$$

Далее,

$$\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{u^2 + v^2 - uv - uv/(u+v)^2}{1 + u^2 - u - v^2u/(1+u)^2}}, \\ y = \sqrt{\dfrac{1 + v^2 - v - u^2v/(1+v)^2}{1 + u^2 - u - v^2u/(1+u)^2}}. \end{cases} \tag{3}$$

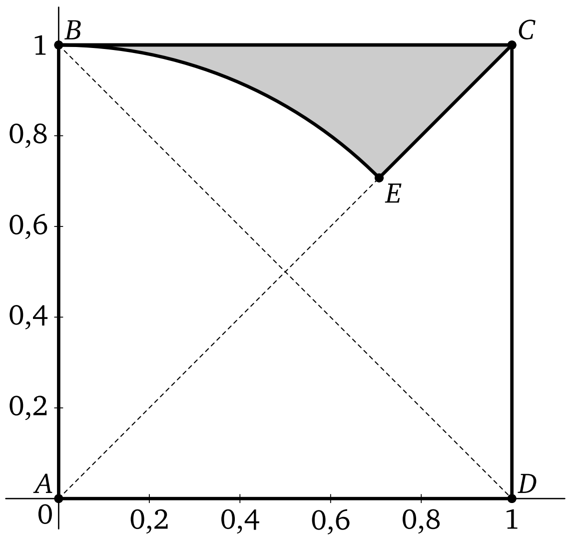

Рис. 3

Таким образом, при $1/2 < u \leqslant 1$ и $0 < v \leqslant u$ мы находим координаты точки (x, y). Тем самым определяется область в квадрате $ABCD$ (рис. 3).

Одну часть границы области найдём, если возьмём $u = v$. Тогда $b = c$ и для $1/2 < v = u \leqslant 1$ имеем параметризацию

$$\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{v^2 - 1/4}{1 + v^2 - v - v^3/(1+v)^2}}, \\ y = 1. \end{cases}$$

Получаем сторону BC квадрата.

Если взять $u = 1$, то $a = b$ и для $0 < v \leqslant 1$ получаем ещё одну часть границы с параметризацией

$$x = y = \sqrt{\frac{1 + v^2 - v - v/(1+v)^2}{1 - v^2/4}}.$$

Это отрезок EC, лежащий на диагонали квадрата.

Из второго уравнения системы (3) мы можем получить оценку снизу на длину средней антибиссектрисы. Поскольку $1/2 < u \leqslant 1$, выполнены неравенства

$$\sqrt{1 + u^2 - u - \frac{v^2 u}{(1+u)^2}} < \sqrt{1 + u^2 - u} \leqslant 1.$$

С другой стороны, для $1/2 < u \leqslant 1$ имеем

$$\sqrt{1+v^2-v-\frac{u^2v}{(1+v)^2}} > \sqrt{1+v^2-v-\frac{v}{(1+v)^2}}.$$

Функция

$$f(v) = \sqrt{1+v^2-v-\frac{v}{(1+v)^2}}$$

на промежутке $0 < v \leqslant 1$ является дифференцируемой и имеет минимум. Решив уравнение $f'(v) = 0$, найдём, что $\min f(v) > 0{,}72$. Тогда

$$y = \frac{\sqrt{1+v^2-v-u^2v/(1+v)^2}}{\sqrt{1+u^2-u-v^2u/(1+u)^2}} > 0{,}72.$$

Итак, для всех значений параметров $1/2 < u \leqslant 1$ и $0 < v \leqslant u$ имеем $y > 0,72$. Вспомним, что в нашей модели мы рассматривали треугольники с точностью до подобия, при этом длина наибольшей антибиссектрисы равнялась 1. Следовательно, верно

Предложение. *Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, где $a \geqslant b \geqslant c$. Тогда для длин большей антибиссектрисы k_c и средней антибиссектрисы k_b выполнено неравенство $0{,}72k_c \leqslant k_b$.*

Неизвестно, можно ли константу 0,72 из предложения улучшить до константы 0,75030, найденной в § 2 для равнобедренных треугольников.

§ 4. Антибиссектрисы: построение циркулем и линейкой

Первоначально авторам заметки было неизвестно, можно ли построить треугольник циркулем и линейкой по длинам трёх его антибиссектрис. Следующая теорема даёт ответ на этот вопрос.

Теорема. *Задача построения треугольника по заданным длинам его антибиссектрис неразрешима с помощью циркуля и линейки.*

Прежде чем излагать доказательство теоремы, напомним, что если кубический многочлен с рациональными коэффициентами неприводим над полем рациональных чисел (т. е. у него нет рационального корня), то его корни непостроимы с помощью циркуля и линейки. В задаче, вероятно сформулированной Брокаром, о невозможности построения треугольника с помощью циркуля и линейки по длинам трёх его биссектрис возникает кубический многочлен. Доказательство невозможности построения треугольника с помощью циркуля и линейки по длинам трёх его симедиан также сводится к неприводимости кубического многочлена.

Что же не так с антибиссектрисами? Дело в том, что мы приходим к уравнению четвёртой степени. В брошюре [6] находим фразу: «Можно привести пример многочлена четвёртой степени, корни которого нельзя построить циркулем и линейкой». Это наш случай.

Напомним, что если имеется приведённое уравнение четвёртой степени: $x^4+ax^2+bx+c=0$, то кубическое уравнение относительно переменной y: $y^3-2ay^2+(a^2-4c)y+b^2=0$ будет его резольвентой.

Доказательство теоремы. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC (рис. 1). Пусть $BC=AC=a=b$, $AB=c\leqslant a$, тогда $k_a=k_b\leqslant k_c$. Обозначим $\angle ACB=\gamma$ и $t=\sin(\gamma/2)$. Тогда $c=2at$.

Пусть длины двух антибиссектрис равны $k_a=k_b=\sqrt{3}/2$, а длина третьей равна $k_c=1$ (рис. 1). Тогда

$$1=k_c^2=a^2-\frac{c^2}{4}=a^2(1-t^2),$$

$$\frac{3}{4}=k_a^2=k_b^2=a^2+c^2-ac-\frac{a^3c}{(a+c)^2}=\frac{a^4+ac^3+c^4}{(a+c)^2}=a^2\frac{1+8t^3+16t^4}{(1+2t)^2},$$

$$\frac{3}{4}=\frac{1+8t^3+16t^4}{(1+2t)^2(1-t^2)}.$$

Получаем уравнение 4-й степени: $76t^4+44t^3-9t^2-12t+1=0$.

Если бы мы построили наш равнобедренный треугольник, то мы также смогли бы построить отрезок длины $t=\sin(\gamma/2)$, т. е. мы могли бы построить корень уравнения четвёртой степени.

Будем решать уравнение четвёртой степени методом Феррари.

Домножив обе части уравнения на $27\,436=2^2\cdot 19^3$ и сделав замену переменных $u=38t$, получим уравнение

$$u^4+22u^3-171u^2-8664u+27\,436=0.$$

Сделаем замену переменных $u=x-11/2$, наше уравнение четвёртой степени приведётся к каноническому виду

$$x^4-\frac{705x^2}{2}-5452x+\frac{1\,074\,721}{16}=0.$$

Теперь найдём резольвенту этого уравнения: получаем

$$y^3+705y^2-144\,424y+29\,724\,304=0.$$

Докажем, что у резольвенты нет рациональных решений. Пусть корнем уравнения будет рациональное число $y=p/q$, где p,q — целые взаимно простые числа, $q > 0$. Тогда

$$p^3 = q(-705p^2 + 144\,424pq - 29\,724\,304q^2). \tag{4}$$

Поскольку p, q — взаимно простые числа, получаем $q = 1$. Но уравнение (4) не имеет решений в целых числах. Следовательно, левая часть резольвенты — кубический многочлен, неприводимый над $\mathbb{Q}$. Это означает, что корни исходного многочлена четвёртой степени непостроимы с помощью циркуля и линейки.

Следовательно, с помощью циркуля и линейки мы не сможем построить треугольник, длины двух антибиссектрис которого равны $\sqrt{3}/2$, а длина третьей равна 1. Теорема доказана. □

Список литературы

[1] *Ефремов Д.* Новая геометрия треугольника. Одесса: Матезис, 1902.

[2] *Жуков А., Акулич И.* Однозначно ли определяется треугольник? // Квант. 2003. № 1. С. 29–31.

[3] *Журавлёв В. М., Самовол П. И.* Об одной задаче о биссектрисах и точках Брокара // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 18. М.: МЦНМО, 2014. С. 217–229.

[4] *Журавлёв В. М., Самовол П. И.* Печать Соломона. Опыты математического творчества. М.: Лори, 2021.

[5] *Журавлёв В., Самовол П.* Этюд о симедианах // Квант. 2013. № 5–6. С. 33–40.

[6] *Кириченко В.* Построения циркулем и линейкой и теория Галуа // Летняя школа «Современная математика». Дубна, 2005.

[7] *Манин Ю. И.* О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки // Энциклопедия элементарной математики. Кн. 4. М.: Физматлит, 1963. С. 205–227.

[8] Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 27. М.: МЦНМО, 2021. С. 234. Задача 5.

Валерий Михайлович Журавлёв, ПАО «Туполев», Москва

zhuravlevvm@mail.ru

Пётр Исаакович Самовол, Беер-Шева, Израиль

pet12@012.net.il