Комбинаторика

Простые доказательства оценок чисел Рамсея и уклонения

А. Я. Бучаев, А. Б. Скопенков

Эта заметка возникла в ходе обсуждений на семинарах по курсу А. М. Райгородского на ФИВТ МФТИ. Благодарим за полезные обсуждения Д. А. Колупаева, Г. М. Кучерявого, А. А. Печенкина, А. М. Райгородского и анонимного рецензента[1)]

Мы приводим простые доказательства теоремы 1 Эрдёша о нижней оценке чисел Рамсея и теоремы 2 об оценке уклонения (см. формулировки ниже). Для понимания формулировок и доказательств не требуется знаний, выходящих за пределы школьной программы (кроме неравенства $(*)$ в конце доказательства леммы 1, для которого требуется разложение экспоненты в ряд). По сути наше изложение аналогично [AS, § 1.1], [R10, § 3.2, § 4.2]. Однако оно проще для восприятия, поскольку не использует ненужного здесь вероятностного языка (см. подробнее замечание 1). Для доказательства существования «хорошего» объекта подсчитывается, что «плохих» объектов меньше, чем всех. Кроме того, теоремы излагаются без технических усложнений, дающих незначительно более сильные оценки (таким образом, обычно теоремой Эрдёша и теоремой об оценке уклонения называются не теоремы 1 и 2, а немного более сильные утверждения). Также мы постарались хорошо структурировать доказательство теоремы 2 (т. е. разбить его на шаги, в частности, выделить красивую лемму 1).

Мы начинаем с олимпиадных задач, являющихся частными случаями указанных теорем.

[1)] Полную обновляемую версию см. на `https://arxiv.org/abs/2107.13831`.

Задача 1. (a) Среди любых 51 из 10 миллионов китежан имеется двое знакомых. Обязательно ли найдётся 51 китежанин, любые два из которых знакомы?

(b) Любые два из 1000 учёных переписываются по одной из четырёх тем: географии, геологии, топографии и топологии. Обязательно ли найдутся 12 учёных, любые два из которых переписываются по одной и той же теме?

(c) Среди 1000 членов хурала выбрано несколько комиссий, в каждой из которых 3 человека. Обязательно ли найдётся 10 членов хурала, из которых либо любые 3 образуют комиссию, либо любые 3 не образуют?

Ответы — нет. Они являются частным случаем следующих теорем.

Назовём *n-кликой* (*n-антикликой*) полный (пустой) подграф на n вершинах данного графа. Для фиксированного l назовём *n-гиперкликой* семейство всех l-элементных подмножеств данного подмножества из n элементов.

Теорема 1 (Эрдёш). (a) *Для любого n существует граф на $2^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor}$ вершинах, не имеющий ни n-клики, ни n-антиклики.*

(b) *Для любых n, k в полном графе на $k^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor}$ вершинах существует раскраска рёбер в k цветов, для которой нет одноцветной n-клики.*

(c) *Для любых n, k, l в множестве из $k^{\lfloor (n-l+1)^{l-1}/l! \rfloor}$ элементов существует раскраска всех l-элементных подмножеств в k цветов, в которой нет одноцветной n-гиперклики.*

Следующая задача является частным случаем теоремы 2 об оценке уклонения для $n = 1000$, $s = 300$ и $a = 150$ (поскольку $2^{150^2} > 2^{10 \cdot 2000} > 600^{2000}$).

Задача 2 [PT]. 1000 пионеров города Новые Васюки вышли на парад. Известно, что пионеры ходят в 300 кружков. Докажите, что Остап Бендер может раздать пионерам пилотки двух цветов (красные и синие) так, чтобы среди представителей одного кружка разность (по модулю) между количествами пионеров в красных пилотках и в синих пилотках не превосходила 150.

Теорема 2 (об оценке уклонения). *Пусть $M_1, \ldots, M_s$ — семейство подмножеств множества $[n] := \{1, \ldots, n\}$. Если $2^{a^2} \geqslant (2s)^{2n}$, то существует раскраска множества $[n]$ в красный и синий цвета, для которой при любом $k \in [s]$ количества красных и синих элементов в M_k отличаются менее чем на a.*

Доказательство ответов «нет» в задачах 1(a), (c). (a) Рассмотрим граф знакомств китежан. Назовём граф с вершинами $1, 2, \ldots, 10^7$ *рамсеевским*, если в нём есть либо 51-клика, либо 51-антиклика. Для доказательства существования нерамсеевского графа достаточно показать, что рамсеевских графов меньше, чем всех графов с вершинами $1, 2, \ldots, 10^7$. Количество последних равно $N := 2^{10^7(10^7-1)/2}$. Клику на данной 51 вершине можно продолжить до $N/2^{51\cdot 50/2}$ графов с вершинами $1, 2, \ldots, 10^7$. Аналогичное справедливо для антиклики. Количество 51-элементных подмножеств 10^7-элементного множества равно

$$\binom{10^7}{51} < (10^7)^{51} = 10^{357}.$$

Поэтому количество рамсеевских графов меньше, чем

$$2 \cdot 10^{357} \frac{N}{2^{51\cdot 25}} < \frac{N \cdot 10^{357}}{2^{10\cdot 5\cdot 25}} < \frac{N \cdot 10^{357}}{10^{3\cdot 5\cdot 25}} = N \cdot 10^{357-375} < N.$$

(c) Назовём семейство трехчеловечных комиссий (среди 1000 членов хурала) *рамсеевским*, если в нём есть либо 10-гиперклика, либо 10-антигиперклика (10-антигиперкликой называются 10 человек, никакая тройка из которых не является комиссией). Для доказательства существования нерамсеевского семейства трехчеловечных комиссий достаточно показать, что рамсеевских семейств меньше, чем всех семейств. Количество последних равно $N := 2^{\binom{1000}{3}}$. Гиперклику размера 10 данного подмножества из 10 членов хурала можно продолжить до $N/2^{\binom{10}{3}}$ семейств трехчеловечных комиссий. Антигиперклику размера 10 данного подмножества из 10 членов хурала можно продолжить до $N/2^{\binom{10}{3}}$ семейств трехчеловечных комиссий. Количество 10-элементных подмножеств 1000-элементного множества равно

$$\binom{1000}{10} < (1000)^{10} < 2^{100}.$$

Поэтому количество рамсеевских семейств трехчеловечных комиссий меньше, чем

$$2 \cdot 2^{100} \frac{N}{2^{\binom{10}{3}}} = \frac{N \cdot 2^{101}}{2^{120}} < N. \qquad \square$$

Ответ «нет» в задаче 1(b) и теорема 1 Эрдёша доказываются аналогично. В частности, в начале доказательства теоремы 1(a) берём $r := 2^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor}$, тогда

$$\binom{r}{n} < r^n \leqslant 2^{(n^2-n-2)/2} \quad \text{при } n \geqslant 2.$$

Перейдём к доказательству теоремы 2 *об оценке уклонения* (и, тем самым, к решению задачи 2). Для подмножества M множества $[n]$

и раскраски x множества $[n]$ в два цвета обозначим через $\Delta_M(x)$ (*уклонение*) разность между количествами элементов первого и второго цвета в M.

Лемма 1. *Для любых $a > 0$ и подмножества M множества $[n]$ количество раскрасок x, для которых $\Delta_M(x) \geqslant a$, меньше $2^{n-a^2/(2n)}$.*

Доказательство теоремы 2. Применим лемму 1 к любому $k \in [s]$. Получим, что количество раскрасок x, для которых $\Delta_{M_k}(x) \geqslant a$, меньше $2^{n-a^2/(2n)} \leqslant 2^n/(2s)$. В силу симметрии количество раскрасок x, для которых $\Delta_{M_k}(x) \leqslant -a$, также меньше $2^n/(2s)$. Поэтому количество (k-«плохих») раскрасок x, для которых $|\Delta_{M_k}(x)| \geqslant a$, меньше $2^n/s$. Тогда количество («плохих») раскрасок x, для которых найдётся такое $k \in [s]$, что $|\Delta_{M_k}(x)| \geqslant a$, меньше $s2^n/s = 2^n$. Следовательно, найдётся «хорошая» раскраска. □

В доказательстве леммы 1 используется следующий очевидный, но крайне полезный факт.

Лемма 2 (неравенство Маркова). *Для любых $w_1, \ldots, w_s > 0$ количество тех i, для которых $w_i \geqslant 1$, не превосходит $w_1 + \ldots + w_s$.*

Более общо, для любых $a, w_1, \ldots, w_s > 0$ количество тех i, для которых $w_i \geqslant a$, не превосходит $(w_1 + \ldots + w_s)/a$. □

Доказательство леммы 1. Ввиду неравенства Маркова (лемма 2) для любого $\lambda > 0$ имеем

$$|\{x\colon \Delta_M(x) \geqslant a\}| = |\{x\colon \lambda\Delta_M(x) \geqslant \lambda a\}| = \\ = |\{x\colon e^{\lambda\Delta_M(x)} \geqslant e^{\lambda a}\}| \leqslant e^{-\lambda a}\sum_x e^{\lambda\Delta_M(x)}.$$

Раскраску подмножества $A \subset [n]$ в два цвета будем считать отображением $A \to \{-1, 1\}$. Тогда

$$\sum_{x\in\{-1,1\}^{[n]}} e^{\lambda\Delta_M(x)} = \sum_{x\in\{-1,1\}^{[n]}} \prod_{j\in M} e^{\lambda x(j)} = \\ = 2^{n-|M|} \sum_{y\in\{-1,1\}^M} \prod_{j\in M} e^{\lambda y(j)} = 2^{n-|M|}(e^\lambda + e^{-\lambda})^{|M|}.$$

Здесь

- первое равенство верно, поскольку $\Delta_M(x) = \sum_{j\in M} x(j)$;
- второе равенство верно, поскольку каждую раскраску подмножества M в два цвета можно продолжить до $2^{n-|M|}$ раскрасок множества $[n]$.

- третье равенство верно, поскольку при раскрытии скобок в правой части получается левая часть.

  Поэтому
$$|\{x\colon \Delta_M(x) \geqslant a\}| \leqslant e^{-\lambda a} 2^n \left(\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}\right)^{|M|} \overset{(*)}{<} 2^n e^{|M|\lambda^2/2-\lambda a} \leqslant$$
$$\leqslant 2^n e^{n\lambda^2/2-\lambda a} \overset{(**)}{=} 2^n e^{-a^2/(2n)} < 2^{n-a^2/(2n)}.$$

Здесь

- неравенство $(*)$ верно, поскольку
$$e^{\lambda}+e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\lambda^k}{k!} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} < 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{2^k k!} = 2e^{\lambda^2/2}.$$
- равенство $(**)$ получается подстановкой $\lambda = a/n$. □

Замечание 1. Часто для доказательства существования «хорошего» объекта *подсчитывается*, что «плохих» объектов меньше, чем всех. Такие доказательства существования можно излагать на вероятностном языке (т. е. построив дискретное вероятностное пространство с равновероятными элементарными событиями). К сожалению, такое изложение недоступно для многих студентов. Ибо многие не в состоянии сформулировать необходимое для доказательства определение (дискретного) вероятностного пространства. А многим не хватает математической культуры даже для осознания того, что такого пространства нет в формулировке теоремы, поэтому его построение — часть доказательства («дополнительное построение»).

Тем не менее, развивать вероятностную интуицию крайне полезно. Применение дискретных вероятностных пространств с элементарными событиями, уже не являющимися равновероятными, — мощный метод комбинаторики, *вероятностный метод* [AS, R10]. В качестве пропедевтики вероятностного метода полезны доказательства существования, использующие подсчёт (подобно вышеприведённым). После их изучения разумно потренироваться излагать эти доказательства на вероятностном языке [GDI, решения к п. 1.6 «подсчёт двумя способами»]. (Точно так же, как в начале освоения теории Галуа разумно потренироваться излагать на её языке уже известные решения квадратного уравнения и уравнений 3-й и 4-й степени.) Другие примеры естественного выращивания вероятностного языка приведены, например, в [ZSS, § 22], [IRS], [GDI, § 6.2].

Хотя подсчёт «плохих» объектов позволяет обойтись без вероятностного языка, сущностные (т. е. не связанные с языком изложения) элементы доказательства при обоих изложениях одни и те же.

Список литературы

[AS] *Алон Н., Спенсер Дж.* Вероятностный метод. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011.

[GDI] *Глибичук А. А., Дайняк А. Б., Ильинский Д. Г., Купавский А. Б., Райгородский А. М., Скопенков А. Б., Чернов А. А.* Элементы дискретной математики в задачах. М.: МЦНМО, 2016. http://www.mccme.ru/circles/oim/discrbook.pdf.

[IRS] *Ильинский Д. Г., Райгородский А. М., Скопенков А. Б.* Независимость и доказательства существования в комбинаторике // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 19. М.: МЦНМО, 2015. С. 164–177. http://arxiv.org/abs/1411.3171.

[PT] *Полянский А. А., Тарасов П. Б.* Избранные задачи экзамена по дискретному анализу // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 21. М.: МЦНМО, 2017. С. 205–209.

[R10] *Райгородский А. М.* Вероятность и алгебра в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2010.

[ZSS] Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки к профессии Сборник под редакцией А. Заславского, А. Скопенкова и М. Скопенкова. М.: МЦНМО, 2018. http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf.

Абдулкадыр Яхьяевич Бучаев, МФТИ

buchaev.aia@phystech.edu

Аркадий Борисович Скопенков, МФТИ, НМУ

https://users.mccme.ru/skopenko