По мотивам задачника

Постоянная Эйлера

Л. Радзивиловский

В «Математическом просвещении», сер. 3, вып. 18, с. 258, опубликована

Задача 18.11. Найдите $\int_0^1 \ln(-\ln x)\,dx$. (*Фольклор*)

Интеграл выглядит не очень устрашающе, но его тяжело решить, не зная одной темы, о которой мы и расскажем. Более подробную информацию можно найти в [1, 2].

Если загнать интеграл в Wolfram Alpha или какую-нибудь другую подходящую программу, получится довольно короткий ответ.

Попробуем поиграть с этим интегралом: например, подставим $t = -\ln x$ и получим

$$\int\limits_0^\infty e^{-t} \cdot \ln t\,dt. \tag{1}$$

Можно попробовать ещё другие подстановки или взять по частям, но это не приведёт нас к ответу. Но если мы изучим одну тему, то легко решим этот интеграл.

В некоторых работах Эйлера появляется такое интересное число:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\Bigl(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\Bigr).$$

Можно было бы вместо $\ln n$ написать в этой формуле $\ln(n+1)$, поскольку разница между $\ln(n+1)$ и $\ln n$ стремится к нулю при росте n. Тогда это число можно представлять себе, как тёмно-серую площадь на рис. 1: то, что находится над графиком $1/x$ и под «лестницей».

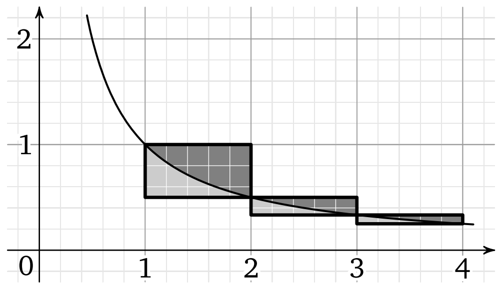

Рис. 1

Если бы мы добавили светло-серую площадь (то, что под графиком функции, но над нижней лестницей), получилась бы последовательность прямоугольников, из которых складывается квадрат единичной площади. Однако тёмно-серая часть чуть больше, чем светло-серая, поэтому γ чуть больше половины. Эйлер неоднократно пытался вычислить γ и связать её с другими известными константами. Он подсчитал γ с 15 знаками после запятой: $\gamma \approx 0{,}577215664901533$; но ему не удалось выразить γ через другие известные константы. До сих пор неизвестно, рационально γ или иррационально, алгебраично или трансцендентно.

Иногда γ называют *константой Маскерони*. В те дни было принято называть знаменитые константы именем человека, подсчитавшего константу с наибольшей точностью. Маскерони объявил 32 десятичных цифры для γ, из них первые 19 были правильные; с точки зрения математиков XVIII века это оправдывает переименование константы в честь Маскерони.

Эйлер доказал несколько красивых формул, связанных с γ.

Например:

$$\begin{aligned}\gamma &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k}-\ln\Big(\frac{k+1}{k}\Big)\Big) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k}+\frac{1}{2k^2}-\frac{1}{3k^3}+\frac{1}{4k^4}-\ldots\Big) = \\ &= \frac{\zeta(2)}{2}-\frac{\zeta(3)}{3}+\frac{\zeta(4)}{4}-\ldots\end{aligned}$$

(доказательство того, что здесь можно менять порядок суммирования, остаётся читателю в качестве упражнения).

Эйлеру неоднократно удавалось найти разумное продолжение функции, изначально заданной на натуральных числах, на все действительные (или даже все комплексные) числа.

Самым знаменитым примером, наверное, является понятие факториала. Для всякого натурального числа

$$n! = \int\limits_0^1 (-\ln x)^n \, dx = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^n \, dt.$$

Я не знаю, какая из этих двух формул красивее, но они связаны заменой переменных: $t = -\ln x$. В каждый из этих интегралов можно подставить любое действительное $n > -1$ и получить определение факториала для нецелого числа. Интегрированием по частям легко доказать, что

$$\int\limits_0^\infty e^{-t} t^n \, dt = n \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{n-1} \, dt,$$

а значит, можно пользоваться формулой $(n-1)! = n!/n$ и распространить понятие интеграла на все действительные числа, кроме целых отрицательных: $(-1)! = 0!/0 = \infty$. Аналогично можно распространить понятие факториала на все комплексные числа, кроме целых отрицательных.

Обычно, когда пишут $n!$, имеется в виду, что n — натуральное число, а для нецелых чисел используется Г-функция:

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^1 (-\ln x)^{z-1} \, dx = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \, dt,$$

что обобщает не $z!$, а $(z-1)!$. Интеграл сходится при $\operatorname{Re} z > 0$, а в левой полуплоскости можно доопределить Γ, многократно применяя функциональное уравнение: $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$. Получается мероморфная функция с полюсами в неположительных целых числах.

Другой пример, важный для нашего рассказа, — это гармонические числа. Положим

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Как определить эту величину для нецелых чисел?

Рассмотрим такую сумму:

$$H_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n} \right).$$

Если мы просуммируем много слагаемых, останется H_n минус n очень маленьких слагаемых. Значит, эта величина стремится к H_n. Но в новую формулу можно подставить и нецелое n, и получится формула, работающая почти для всех чисел. Действительно,

$$\frac{1}{k}-\frac{1}{k+z}=\frac{z}{k(k+z)},$$

и эта величина убывает квадратично, а значит, сумма таких слагаемых сходится. Заметим также, что

$$\frac{1}{k}=\int_0^1 x^{k-1}\,dx.$$

Положим

$$H_z=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+z}\Big),$$

и тогда

$$H_z=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+z}\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1(x^{k-1}-x^{k-1+z})\,dz=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1(x^{k-1}-x^{k-1+z})\,dz=\int_0^1(1-x^z)\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1}dz=\int_0^1\frac{1-x^z}{1-x}\,dz.$$

Итак, у нас есть обобщение H_n на нецелые числа, и у этого обобщения есть даже две красивых формулировки:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+z}\Big)\quad\text{и}\quad\int_0^1\frac{1-x^z}{1-x}\,dz.$$

Разумеется, можно было бы определить другие функции, которые совпадают с данной последовательностью на натуральных числах, например добавив к тем функциям, которые мы построили, $\sin\pi x$ или, скажем, $\sin\pi x\cdot e^{x^8}$, но наверное читатель согласится с тем, что конструкции Эйлера очень естественны и разумны. Есть несколько теорем на тему о том, что Г-функция — «лучшее» из всех возможных обобщений факториала. Наиболее известная из этих теорем, возможно, —

Теорема Бора — Моллерупа. *Функция f из положительных чисел в положительные числа, удовлетворяющая следующим трём условиям, существует и единственна*:

- $f(1)=1$;
- $f(z+1)=z\cdot f(z)$;
- f *логарифмически выпукла.*

Это и есть Г.

Мы приведём доказательство теоремы Бора — Моллерупа, потому что из доказательства легко получится важная для нас формула. Но перед этим хочется напомнить, что такое логарифмическая выпуклость, и пояснить, почему разумно требовать именно логарифмической выпуклости.

Последовательность действительных чисел называется выпуклой, если с каждым шагом мы добавляем всё больше и больше. Другими словами, $a_{n+1} - a_n \geqslant a_n - a_{n-1}$. Например, n^2 — выпуклая последовательность.

Последовательность называется логарифмически выпуклой, если она положительна и её логарифмы образуют выпуклую последовательность. Другими словами, с каждым шагом мы умножаем на всё большее и большее число, т. е. $a_{n+1}/a_n \geqslant a_n/a_{n-1}$. Хороший пример выпуклой последовательности — это $a_n = n!$.

Теперь о функциях. Есть много определений выпуклой функции, мы введём такое определение, которое легко будет проверить. Наверное, читатель знает другие определения выпуклой функции; хорошим упражнением будет доказать, что они эквивалентны нашему определению.

Будем говорить, что функция f (на всей действительной прямой, либо на открытом интервале, конечном или бесконечном) выпукла, если, во-первых, она непрерывна, а во-вторых,

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \text{для любых } x_1, x_2.$$

Будем говорить, что функция g логарифмически выпукла, если она положительна и её логарифм — выпуклая функция.

Вместо этого можно было бы сказать, что g непрерывна и

$$0 < g\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \leqslant \sqrt{g(x_1)g(x_2)} \quad \text{для произвольных } x_1, x_2.$$

Докажем простую, но полезную лемму:

Лемма. *Пусть f, g — логарифмически выпуклые функции. Тогда $f + g$ — тоже логарифмически выпуклая функция.*

Доказательство. Понятно, что $f + g$ тоже непрерывна и положительна; остаётся доказать неравенство.

Мы можем использовать два неравенства:

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \leqslant \sqrt{f(x_1)f(x_2)}, \quad g\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \leqslant \sqrt{g(x_1)g(x_2)}.$$

Обозначим для краткости:

$$a_1 = f(x_1), \quad a_2 = f(x_2), \quad b_1 = g(x_1), \quad b_2 = g(x_2).$$

Тогда по неравенству Коши — Буняковского — Шварца

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{b_1b_2}\leqslant\sqrt{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}.$$

Что и требовалось доказать. $\square$

Доказательство теоремы Бора — Моллерупа. Итак, сумма двух логарифмически выпуклых функций логарифмически выпукла. То же можно сказать про сумму трёх или большего количества функций. Переходя к пределу, легко вывести, что если есть семейство функций $f_t(x)$, логарифмически выпуклых для каждого t, и неотрицательная функция $\varphi(t)$, то интеграл $\int\varphi(t)f_t(x)\,dt$ (если он сходится) задаёт логарифмически выпуклую функцию.

Отсюда понятно, что функция

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

логарифмически выпукла, поскольку t^x логарифмически выпукла (её логарифм линеен). В теореме Бора — Моллерупа это уже доказывает существование, поскольку у нас есть пример нужной функции. Остаётся единственность.

Хочется надеяться, что после сказанного формулировка теоремы Бора — Моллерупа звучит довольно естественно: мы пытаемся расширить логарифмически выпуклую последовательность на нецелые числа, естественно потребовать логарифмическую выпуклость.

Итак, докажем единственность. Сначала сформулируем основные идеи. При помощи функционального уравнения $f(z+1)=z\cdot f(z)$ мы можем двигать числа на целое число единиц, поэтому достаточно доказать единственность для $z\in(0,1)$. Но чем дальше мы передвинем число вправо, тем более жёсткими будут ограничения. Например, если $2<z<3$, то при сдвиге вправо нужно умножить его на что-то между 2 и 3, т. е. диапазон — в полтора раза, а если $100<z<101$, то нужно умножить на что-то между 100 и 101, т. е. ошибка не превышает 1 %. А если мы сдвинем число ещё дальше вправо, то диапазон будет ещё уже.

Для всякой выпуклой функции g легко доказать (или увидеть геометрически) такое неравенство. Пусть $x_1<x_2<x_3$ отличны от x. Пусть k_i — наклон хорды, соединяющей точку $(x_i, g(x_i))$ с точкой $(x, g(x))$. Другими словами,

$$k_i=\frac{g(x_i)-g(x)}{x_i-x}.$$

Тогда $k_1<k_2<k_3$.

В теореме Бора — Моллерупа речь идёт о логарифмически выпуклой функции f, значит, $\ln f$ выпукла. Пусть n — натуральное число. Положим $x = n$, $x_1 = n-1$, $x_2 = n+z$, $x_3 = n+1$, где $0 < z < 1$. Тогда

$$\frac{\ln f(n) - \ln f(n-1)}{n-(n-1)} \leqslant \frac{\ln f(n+z) - \ln f(n)}{n+z-n} \leqslant \frac{\ln f(n+1) - \ln f(n)}{n+1-n},$$

в силу первых двух условий из формулировки теоремы

$$\ln(n-1) \leqslant \frac{1}{z} \ln \frac{f(n+z)}{(n-1)!} \leqslant \ln n,$$

$$(n-1)^z \leqslant \frac{f(n+z)}{(n-1)!} \leqslant n^z,$$

$$(n-1)^z \leqslant \frac{f(z) \cdot z(z+1) \cdot \ldots \cdot (z+n-1)}{(n-1)!} \leqslant n^z.$$

В левом неравенстве заменим $n-1$ на n и получим

$$\frac{f(z) \cdot z(z+1) \cdot \ldots \cdot (z+n-1)}{(n-1)!} \leqslant n^z \leqslant \frac{f(z) \cdot z(z+1) \cdot \ldots \cdot (z+n)}{n!}.$$

При увеличении n отношение между правой и левой частью неравенства $(z+n)/n$ стремится к единице. Значит, отношение между правой и средней частями тоже стремится к единице. Поэтому при $0 < z < 1$

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^z \cdot n!}{z(z+1) \cdot \ldots \cdot (z+n)}.$$

Таким образом, при $0 < z < 1$ мы получили явную формулу для f, поэтому f определена однозначно. Этим теорема Бора — Моллерупа доказана. □

Но мы получили не только доказательство теоремы; мы получили явную (причём красивую) формулу для Г:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^z \cdot n!}{z(z+1) \cdot \ldots \cdot (z+n)}. \qquad (2)$$

Доказали мы её только при $0 < z < 1$, но она может быть легко обобщена на все остальные действительные числа. Достаточно заметить, что эта формула верна для z тогда и только тогда, когда она верна для $z+1$. Действительно,

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z) = z \lim_{n \to \infty} \frac{n^z \cdot n!}{z(z+1) \cdot \ldots \cdot (z+n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{z+1} \cdot (n-1)!}{(z+1) \cdot \ldots \cdot (z+n)}.$$

А это та же самая формула с $z+1$ вместо z и $n-1$ вместо n.

Итак, мы доказали формулу (2), теперь будем её «причёсывать». Имеем

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} n^{-z}\cdot z\cdot(1+z)\Big(1+\frac{z}{2}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1+\frac{z}{n}\Big). \tag{3}$$

Пару слов о бесконечных произведениях. Пусть у нас есть произведение вида $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_i)$, где $a_i \neq 1$ и $a_i \to 0$. Такое произведение называется сходящимся, если последовательность $\prod_{k=1}^{n}(1+a_i)$ сходится к числу, отличному от 0. Есть простой критерий: произведение является сходящимся, если $\sum_{k=1}^{\infty} a_i$ сходится. Чтобы его доказать, нужно взять логарифм и воспользоваться тем, что $a \approx \ln(1+a)$ при $a\approx 0$. Согласно этому критерию произведение $\prod_{k=1}^{n}(1+z/k)$ расходится при всяком $z \neq 0$. Вейерштрасс хорошо умел «подправлять» такие произведения, делать из них сходящиеся. Например, мы знаем, что $e^z \approx 1+z$. Значит,

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1+z/k}{e^{z/k}}$$

является сходящимся произведением, поскольку

$$\frac{1+z/k}{e^{z/k}} = 1 + O\Big(\frac{1}{k^2}\Big).$$

Перепишем формулу (3) по-другому, «причесав» её в стиле Вейерштрасса:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} n^{-z}\cdot e^{z+\frac{z}{2}+\frac{z}{3}+\ldots+\frac{z}{n}}\cdot z\cdot\frac{1+z}{e^z}\cdot\frac{1+z/2}{e^{z/2}}\cdot\frac{1+z/3}{e^{z/3}}\cdot\ldots\cdot\frac{1+z/n}{e^{z/n}}.$$

Последнюю серию в этом произведении можно выделить как отдельный — сходящийся — предел:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)}\cdot z\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1+z/k}{e^{z/k}},$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z}\cdot z\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1+z/k}{e^{z/k}}. \tag{5}$$

Это *формула Вейерштрасса*. Посмотрим на эту формулу и восхитимся ею. В чём суть? Мы уже упомянули, что у Г имеются полюса в неположительных целых числах. Значит, у $1/\Gamma$ в этих точках — серия нулей. Мы можем сказать, что это как бы многочлен, но с бесконечной серией корней. Многочлен мы попытались бы разложить на линейные множители; тут мы захотели тоже написать бесконечное произведение, но получили, что оно расходится. Затем пришёл Вейерштрасс и добавил поправки для сходимости, и получилось почти то, что надо, но затем абсолютно мистическим образом сбоку появилось $e^{\gamma z}$, где γ — то самое!

Ещё один инструмент, который нам понадобится, это логарифмическая производная. Её можно определить двумя способами: $(\ln f(z))'$ или $f'(z)/f(z)$, и это одно и тоже. Замечательно, что в комплексных числах логарифм определён не очень хорошо (с точностью до добавки в $2\pi in$, причём иногда эту добавку нельзя выбрать во всех точках), а вот логарифмическая производная всегда работает. Как и логарифм, логарифмическая производная переводит произведение в сумму:

$$\frac{(fg)'}{fg}=\frac{f'}{f}+\frac{g'}{g},\quad \frac{(f/g)'}{f/g}=\frac{f'}{f}-\frac{g'}{g}$$

(возможно, это самый удобный способ записать формулу Лейбница).

Например, если мы возьмём функциональное уравнение Γ и обозначим через $\psi(z)=\Gamma'(z)/\Gamma(z)$ его логарифмическую производную, то из $\Gamma(z+1)=z\cdot\Gamma(z)$ получается $\psi(z+1)=1/z+\psi(z)$. Читатель может догадаться, что $\psi(z+1)$ чем-то похоже на H_z, но это не та же самая функция, она отличается на… Впрочем, не будем забегать вперёд.

В чём логарифмическая производная нам действительно сильно поможет, это в том, чтобы продифференцировать Γ. У нас есть замечательная формула Вейерштрасса (5), но это огромное произведение, а дифференцировать длинное произведение не так просто. А вот логарифмическую производную очень легко:

$$-\psi(z)=\gamma+\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1/k}{1+z/k}-\frac{1}{k}\Big),$$

$$-\psi(z)=\gamma+\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k+z}-\frac{1}{k}\Big).$$

Стоп. Эту формулу

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k+z}-\frac{1}{k}\Big)$$

мы где-то видели. Это же $-H_z$.

Слишком много минусов (и у ψ, и у H_z), давайте поменяем знак:

$$\psi(z)=H_z-\frac{1}{z}-\gamma,\quad \psi(z)=H_{z-1}-\gamma.$$

Это уже очень красиво, но давайте получим отсюда ещё несколько выводов.

Например, чему равно $\Gamma'(1)$? Очень просто: $H_0=H_1-1=0$, а значит,

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}=H_0-\gamma=-\gamma.$$

Но $\Gamma(1)=1$, значит, $\Gamma'(1)=-\gamma$. Читатель может аналогично вычислить $\Gamma'(2)$, $\Gamma'(1/2)$ и т. д. и везде будет выплывать γ (при подсчёте последнего может понадобиться $\Gamma(1/2)$, это связано с красивым интегралом Гаусса $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$).

Мы почти готовы вычислить интеграл (1), с которого начали наш разговор; но перед этим давайте попробуем продифференцировать Γ «руками», без всех этих хитростей:

$$\Gamma'(z) = \frac{d}{dz}\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{z-1}\,dx = \int\limits_0^\infty e^{-x}\cdot \ln x \cdot x^{z-1}\,dx.$$

Давайте подставим для примера $z=1$:

$$\Gamma'(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\cdot \ln x\,dx.$$

Но мы же знаем, что это $-\gamma$. Это и есть ответ.

Читатель получит настоящее удовольствие, если подсчитает до конца, без всяких там «ну понятно, что можно доделать»,

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\cdot\sqrt{x}\cdot \ln x\,dx.$$

Там будет и π, и $\ln 2$, и конечно же γ.

Список литературы

[1] *Artin E.* Einführung in die Theorie der Gammafunktion. Leipzig: Teubner. 1931.

[2] *Lagarias J.* Euler’s constant: Euler’s work and modern developments // Bull. AMS. 2013. Vol. 50, № 4. P. 527–628.

Л. Радзивиловский, Тель-Авивский университет (Израиль)

levr78@hotmail.com