Задача о треугольнике с заданными длинами биссектрис

Н. Н. Осипов

Излагается история задачи о нахождении треугольника по трём его биссектрисам. Доказывается (разными способами) теорема о том, что для любых трёх положительных чисел существует единственный с точностью до изометрии треугольник, длинами биссектрис которого являются эти числа. Обсуждается вопрос о построении циркулем и линейкой треугольника по заданным его биссектрисам.

Вместо введения

В «Математическом просвещении» (2021, вып. 27, раздел «Задачник») была опубликована следующая задача.

Задача 27.5. а) Для любых ли длин биссектрис существует треугольник с такими биссектрисами и однозначно ли определяется?

б) Можно ли построить треугольник по трём биссектрисам циркулем и линейкой?

Второй пункт этой задачи составители «Задачника» совершенно справедливо отнесли к фольклору, а вот с авторством первого пункта (здесь автор не указан), по-видимому, возникли вопросы. Что, впрочем, неудивительно, так как этот пункт задачи имеет собственную историю. Настоящая заметка, в частности, имеет целью познакомить читателя с некоторыми фактами, связанными с п. (а) задачи 27.5, которые, насколько известно автору, ранее не публиковались на русском языке[1)].

Прежде чем обсуждать саму задачу 27.5, скажем несколько слов о двух аналогичных, но более простых задачах, в которых вместо биссектрис речь идёт о медианах и высотах треугольника соответственно.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).

[1)] Здесь автору очень помогла короткая статья [25], случайно обнаруженная в Интернете. Более подробно история вопроса освещена в статье [19].

Треугольник с заданными длинами медиан m_a, m_b, m_c существует тогда и только тогда, когда тройка чисел (m_a, m_b, m_c) удовлетворяет *неравенствам треугольника*:

$$m_a + m_b > m_c, \quad m_b + m_c > m_a, \quad m_c + m_a > m_b.$$

Что касается треугольника с предписанными длинами высот h_a, h_b, h_c, то он существует, если и только если неравенства треугольника выполнены для тройки чисел $(h_a^{-1}, h_b^{-1}, h_c^{-1})$. В обоих случаях, если искомый треугольник существует, то он единствен с точностью до изометрии. Более того, этот треугольник возможно построить циркулем и линейкой. Автор надеется, что читатель знаком с этими довольно известными фактами, которые вполне можно предлагать как отдельные задачи на занятии математического кружка или даже рассказывать на обычных уроках по элементарной геометрии в школе[2)].

Вопрос о существовании и единственности треугольника с заданными длинами биссектрис является более тонким и, скорее, алгеброаналитическим, чем геометрическим. Наиболее полное (из доступных автору) описание истории этого вопроса приведено в диссертации Ричарда Бейкера начала XX века [14]. В частности, в разделе «The History of the Problem» Бейкер пишет:

> *The problem of constructing a triangle when the lengths of the bisectors of the angles are given has been an outstanding problem among geometers probably from the time of Pascal and certainly from the time of Euler.*
>
> *Brocard has summed up the literature, dealing almost entirely with special cases, of which the most extensive treatment appears to be the solution of the problem when one angle is a right angle due to Marcus Baker*[3)].

Особенно примечателен последний абзац раздела:

> *The problem must have an extensive domestic history in the schools*: *P. Barbarin charges that E. Catalan was among those who have proposed*

[2)] Тема построения треугольника по каким-нибудь трём его элементам является, пожалуй, одной из самых популярных тем в школьной геометрии. Внушительная коллекция таких задач на построение есть, например, в книге [9] (см. раздел «Упражнения и дополнительные замечания к главе 1»).

[3)] Задача построения треугольника с заданными длинами биссектрис его углов была широко известна среди геометров, вероятно, со времени Паскаля и, несомненно, со времени Эйлера.

Брокар просуммировал соответствующую литературу, в которой почти всегда рассматривались частные случаи. Среди них наиболее значительным продвижением оказалось решение задачи при наличии прямого угла, принадлежащее Маркусу Бейкеру.

it as an elementary exercise, and from a Russian scholar the writer learns that it has been there extensively used in the schools as a standard setback for ambitious young geometers[4].

С данным утверждением трудно не согласиться: сам по себе вопрос (особенно после того, как случай с медианами и высотами уже рассмотрен) представляется настолько естественным, что проигнорировать его практически невозможно[5]. И это только подтверждается публикациями [4, 5, 20] на рубеже XXI века, в которых данный вопрос вновь был поставлен и заново решён, причём разными способами.

Следует отметить, что Бейкер в своей диссертации [14] исследует более серьёзные вопросы (на которых здесь мы не будем останавливаться), связанные с задачей о нахождении треугольника по его биссектрисам, но мимоходом сообщает и ответ на наш вопрос.

А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема (Бейкер, 1911). *Для любых трёх положительных чисел l_a, l_b, l_c существует треугольник ABC, длины биссектрис AA_1, BB_1, CC_1 которого суть эти числа: $|AA_1| = l_a$, $|BB_1| = l_b$, $|CC_1| = l_c$. Более того, треугольник ABC определён однозначно с точностью до изометрии.*

Доказательство этого утверждения, которое Бейкер даже не формулирует в виде отдельной теоремы, приводится в разделе «Reality of the Roots for Real Angle-Bisectors» части I диссертации (см. [14, с. 13]). Возможно, данное Бейкером доказательство не столь подробно и понятно по сравнению с более поздними элементарными доказательствами из статей [4, 5], но оно содержит главный ингредиент — явно выписанную функцию

$$F(t) = \frac{1-2t}{t(1-t)^2},$$

с помощью которой оказалось удобно выражать связь между длинами биссектрис и длинами сторон искомого треугольника.

В разделе 1 мы для сравнения приведём существенно другое доказательство теоремы Бейкера (следуя статье [20]), основанное на клас-

[4] Очевидно, задача имеет обширную историю использования в школах: П. Барбарен утверждает, что Э. Каталан был среди тех, кто предлагал её как элементарное упражнение, а из российского источника автор знает, что там эта задача широко использовалась в школах как стандартное испытание для честолюбивых молодых геометров.

[5] Во всяком случае, автор в свои аспирантские годы, параллельно занимаясь со школьниками разной олимпиадной математикой, с удовольствием для себя решил эту задачу (см. далее раздел 2) и был уверен, что это какой-то пусть малоизвестный, но всё же фольклор.

сической *теореме Брауэра о неподвижной точке* (см., например, [26], а также [13, § 1.1] и [1, гл. 3, § 4]), а в разделе 2 представим авторское элементарное доказательство, которое по сути есть переоткрытое доказательство самого Бейкера. Оба доказательства так или иначе используют известные формулы, связывающие длины биссектрис l_a, l_b, l_c с длинами сторон $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ треугольника:

$$l_c^2 = ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right) \tag{0.1}$$

и аналогично для l_a^2 и l_b^2 (см., например, [11, задача 12.37]).

В частности, имеем

$$l_c^2 - l_b^2 = \frac{a(b-c)(a+b+c)(a^3+(b+c)a^2+3bca+b^2c+bc^2)}{(a+b)^2(a+c)^2},$$

откуда следует равносильность неравенств $b > c$ и $l_b < l_c$ (против большей стороны лежит меньшая биссектриса). Ясно также, что $l_b = l_c$ тогда и только тогда, когда $b = c$ (*теорема Штейнера — Лемуса*).

В § 3 мы обратимся к п. б) задачи 27.5 и покажем, что, вообще говоря, нельзя построить циркулем и линейкой треугольник по заданным его биссектрисам. Поскольку этот факт, скорее всего, читателю хорошо известен (ибо в Интернете имеется довольно много публикаций на эту тему, например [23, 25]), мы приведём пару близких, но менее известных утверждений. Отметим, что ещё одна близкая задача — о построении циркулем и линейкой треугольника по заданным основаниям его биссектрис — была решена относительно недавно (см. статьи [12, 22]). Ответ прежний: вообще говоря, такое построение невозможно. Для доказательства подобных утверждений удобно привлекать системы компьютерной алгебры (например, Maple [27]), поскольку тогда появляется возможность рассуждать прямолинейно за счёт манипулирования довольно громоздкими выражениями (типичный пример: упражнение 3 в конце статьи).

Задача о нахождении треугольника по биссектрисам номинально относится к геометрии, поэтому имеет смысл упомянуть статью [21], в которой чисто геометрическими средствами[6)] доказывается единственность (с точностью до изометрии) треугольника, имеющего заданные биссектрисы.

---

6) Цитата из [21]: «…the proof does not use trigonometry, analysis and the formulas for triangle angle bisector length, but only synthetic reasoning» («…доказательство не использует тригонометрию, анализ и формулы для длин биссектрис углов треугольника, но лишь синтетические рассуждения»).

§ 1. Доказательство с помощью теоремы Брауэра о неподвижной точке

Введём обозначения

$$x=\frac{b+c-a}{2},\quad y=\frac{a+c-b}{2},\quad z=\frac{a+b-c}{2}$$

и перепишем формулу (0.1) в следующем эквивалентном виде:

$$z=\frac{\sqrt{l_c^2+x^2}-x}{2}+\frac{\sqrt{l_c^2+y^2}-y}{2}. \tag{1.1}$$

Покажем, например, как из формулы (0.1) следует формула (1.1). Имеем

$$\sqrt{l_c^2+x^2}=\frac{(a+b)^2-c(a-b)}{2(a+b)},\qquad \sqrt{l_c^2+y^2}=\frac{(a+b)^2-c(b-a)}{2(a+b)},$$

так что

$$\frac{\sqrt{l_c^2+x^2}-x}{2}+\frac{\sqrt{l_c^2+y^2}-y}{2}=\frac{a+b-c}{2}=z.$$

Для доказательства теоремы Бейкера достаточно доказать следующее утверждение: система уравнений

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{l_a^2+y^2}-y}{2}+\dfrac{\sqrt{l_a^2+z^2}-z}{2}, \\ y=\dfrac{\sqrt{l_b^2+z^2}-z}{2}+\dfrac{\sqrt{l_b^2+x^2}-x}{2}, \\ z=\dfrac{\sqrt{l_c^2+x^2}-x}{2}+\dfrac{\sqrt{l_c^2+y^2}-y}{2} \end{cases} \tag{1.2}$$

имеет единственное решение (x,y,z) в положительных числах. Действительно, тогда длины сторон искомого треугольника могут быть найдены по формулам

$$a=y+z,\quad b=z+x,\quad c=x+y.$$

Рассмотрим отображение Φ, заданное формулой

$$\Phi(x,y,z)=\big(\varphi(l_a,y)+\varphi(l_a,z),\varphi(l_b,z)+\varphi(l_b,x),\varphi(l_c,x)+\varphi(l_c,y)\big),$$

где $\varphi(u,v)=(\sqrt{u^2+v^2}-v)/2$. Утверждение об однозначной разрешимости системы уравнений (1.2) в положительных числах x, y, z равносильно утверждению о существовании у отображения Φ единственной неподвижной точки (x^*,y^*,z^*) с положительными координатами. Пусть Π — прямоугольный параллелепипед

$$\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: 0\leqslant x\leqslant l_a,\ 0\leqslant y\leqslant l_b,\ 0\leqslant z\leqslant l_c\big\}.$$

Поскольку при любых $u \geqslant 0$ и $v \geqslant 0$ справедливы неравенства
$$0 \leqslant \varphi(u, v) \leqslant \frac{u}{2},$$
образ П при отображении Φ содержится в П: $\Phi(\Pi) \subset \Pi$. Очевидно, отображение Φ непрерывно. Поскольку П — компактное выпуклое множество в $\mathbb{R}^3$, по теореме Брауэра в П существует неподвижная точка отображения Φ. Легко видеть, что координаты этой точки (x^*, y^*, z^*) обязаны быть положительными (если, например, $x = 0$, то $\varphi(l_a, y) = \varphi(l_a, z) = 0$ и, как следствие, $l_a = 0$, что невозможно). Кроме того, неподвижная точка с положительными координатами может быть только одна. Последнее вытекает из неравенства
$$\|\Phi(x, y, z) - \Phi(x', y', z')\| < \|(x, y, z) - (x', y', z')\|, \tag{1.3}$$
где $(x, y, z) \neq (x', y', z')$ — две точки с положительными координатами и
$$\|(u, v, w)\| = |u| + |v| + |w|.$$
Докажем неравенство (1.3). Пусть
$$(X, Y, Z) = \Phi(x, y, z), \quad (X', Y', Z') = \Phi(x', y', z').$$
Оценим $|X - X'|$, $|Y - Y'|$ и $|Z - Z'|$:
$$\begin{aligned}|X - X'| &= |\varphi(l_a, y) + \varphi(l_a, z) - \varphi(l_a, y') - \varphi(l_a, z')| \leqslant \\ &\leqslant |\varphi(l_a, y) - \varphi(l_a, y')| + |\varphi(l_a, z) - \varphi(l_a, z')| < \frac{|y - y'| + |z - z'|}{2}\end{aligned}$$
и аналогично для $|Y - Y'|$ и $|Z - Z'|$. Здесь мы воспользовались неравенством
$$|\varphi(u, v_1) - \varphi(u, v_2)| < \frac{|v_1 - v_2|}{2}, \tag{1.4}$$
справедливым для любых положительных чисел u, v_1 и v_2 с условием $v_1 \neq v_2$.

Неравенство (1.4) следует из *формулы конечных приращений*, применённой к функции $f(v) = \varphi(u, v)$ на отрезке $[v_1, v_2]$. Действительно, имеем
$$|f'(v)| = \left| \frac{\sqrt{u^2 + v^2} - v}{2\sqrt{u^2 + v^2}} \right| < \frac{1}{2},$$
поэтому
$$|f(v_1) - f(v_2)| = |f'(v)| \cdot |v_1 - v_2| < \frac{|v_1 - v_2|}{2}.$$
Также неравенство (1.4) можно доказать, интерпретируя $\varphi(u, v)$ как половину разности между длинами гипотенузы и одного из катетов прямоугольного треугольника.

Складывая теперь оценки для $|X-X'|$, $|Y-Y'|$ и $|Z-Z'|$, получим
$$\|(X,Y,Z)-(X',Y',Z')\|<\|(x,y,z)-(x',y',z')\|,$$
что и требовалось.

Итак, доказано, что система (1.2) имеет единственное решение (x^*,y^*,z^*) в положительных числах. Учитывая неравенство (1.3), для поиска этого единственного решения можно воспользоваться общей идеей — искать его приближение *методом итераций*, т. е. рассматривая последовательность точек $\{P_j=(x_j,y_j,z_j)\}$, заданную рекуррентным правилом
$$P_{j+1}=\Phi(P_j),\quad j=0,1,2,\ldots,$$
при каком-нибудь начальном приближении $P_0\in\Pi$. Конечно, предварительно потребуется обосновать существование предела такой последовательности $\{P_j\}$. Можно использовать метод сжимающих отображений, см. [6, гл. II, § 4]. Подробное доказательство см. в [19].

§ 2. Элементарное доказательство

Мы будем доказывать прямое утверждение: система уравнений и неравенств
$$\begin{cases} l_a^2=bc\Big(1-\dfrac{a^2}{(b+c)^2}\Big),\\ l_b^2=ca\Big(1-\dfrac{b^2}{(c+a)^2}\Big),\\ l_c^2=ab\Big(1-\dfrac{c^2}{(a+b)^2}\Big),\\ a+b>c,\quad b+c>a,\quad c+a>b \end{cases}\tag{2.1}$$
имеет единственное решение в положительных числах a, b, c.

Введём обозначения
$$P=a+b+c,\quad F(t)=\frac{1-2t}{t(1-t)^2},\quad \lambda=\frac{l_b^2}{l_a^2},\quad \mu=\frac{l_c^2}{l_a^2}$$
и перепишем систему (2.1) в следующем равносильном виде:
$$\begin{cases} bc\Big(1-\dfrac{a^2}{(b+c)^2}\Big)=l_a^2,\\ F\Big(\dfrac{b}{P}\Big)=\lambda F\Big(\dfrac{a}{P}\Big),\\ F\Big(\dfrac{c}{P}\Big)=\mu F\Big(\dfrac{a}{P}\Big),\\ a+b>c,\quad b+c>a,\quad c+a>b. \end{cases}\tag{2.2}$$

Удобно рассмотреть вспомогательную систему

$$\begin{cases} F(b_1) = \lambda F(a_1), \\ F(c_1) = \mu F(a_1), \\ a_1 + b_1 + c_1 = 1, \\ 0 < a_1, b_1, c_1 < 1/2 \end{cases} \tag{2.3}$$

с новыми неизвестными $a_1 = a/P$, $b_1 = b/P$, $c_1 = c/P$. Покажем, что она имеет единственное решение, которое мы обозначим через (a_1^*, b_1^*, c_1^*). Тем самым искомый треугольник будет найден с точностью до подобия.

Действительно, функция $T = F(t)$ является непрерывной и убывающей при $t \in (0; 1/2)$ (это можно проверить, вычислив производную $F'(t)$). Значит, она имеет обратную функцию $t = G(T)$, которая является непрерывной и убывающей при $T \in (0; \infty)$.

Более того, с помощью *формулы Кардано* (см., например, [2, с. 129]) можно получить следующую явную формулу:

$$G(T) = \frac{R_+(T) + R_-(T) + 4}{6}, \tag{2.4}$$

где

$$R_\pm(T) = \frac{1}{T}\sqrt[3]{-8T^3 - 36T^2 \pm 12T\sqrt{12T^3 - 39T^2 + 96T}}.$$

Формулу (2.4) можно использовать при приближённом решении уравнения (2.5) (см. далее).

Очевидно, система (2.3) равносильна системе

$$\begin{cases} b_1 = G(\lambda F(a_1)), \\ c_1 = G(\mu F(a_1)), \\ a_1 + G(\lambda F(a_1)) + G(\mu F(a_1)) = 1, \\ 0 < a_1 < 1/2 \end{cases}$$

(неравенства $0 < b_1, c_1 < 1/2$ выполнены автоматически, так как $G(T) \in \in (0; 1/2)$ при любом $T > 0$). Поскольку уравнение

$$a_1 + G(\lambda F(a_1)) + G(\mu F(a_1)) = 1$$

имеет единственное решение $a_1 = a_1^*$ в интервале $(0; 1/2)$, система (2.3) также имеет единственное решение. Именно здесь нам потребуется не совсем элементарный, но интуитивно очень простой (по сравнению с теоремой Брауэра о неподвижной точке) факт — *теорема* *о промежуточном значении* непрерывной функции. Действительно, функция

$$f(t) = t + G(\lambda F(t)) + G(\mu F(t))$$

непрерывна и возрастает при $t \in (0; 1/2)$, при этом

$$\lim_{t \to 0} f(t) = 0 < 1, \quad \lim_{t \to 1/2} f(t) = \frac{3}{2} > 1.$$

Следовательно, существует единственное значение $t = a_1^*$, при котором значение функции равно 1. Найдя это a_1^*, затем находим $b_1^* = G(\lambda F(a_1^*))$ и $c_1^* = G(\mu F(a_1^*))$.

Теперь осталось заметить, что система (2.2) равносильна системе

$$\begin{cases} bc\left(1 - \dfrac{a^2}{(b+c)^2}\right) = l_a^2, \\ \dfrac{a}{P} = a_1^*, \\ \dfrac{b}{P} = b_1^*, \\ \dfrac{c}{P} = c_1^*, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение. В самом деле, подставив $a = Pa_1^*$, $b = Pb_1^*$, $c = Pc_1^*$ в первое уравнение, найдём

$$P = \frac{l_a(1 - a_1^*)}{\sqrt{b_1^* c_1^* (1 - 2a_1^*)}},$$

после чего однозначно определим и сами a, b, c.

В заключение обсудим вопрос о приближённом вычислении a_1^*. Удобно решать не уравнение $f(t) = 1$, а уравнение

$$G(T) + G(\lambda T) + G(\mu T) = 1, \tag{2.5}$$

где $T = F(t)$. Его единственное решение $T^* = F(a_1^*)$ легко локализовать в предположении, что $l_a = \min\{l_a, l_b, l_c\}$. Тогда $\lambda \geqslant 1$ и $\mu \geqslant 1$, так что

$$1 = G(T^*) + G(\lambda T^*) + G(\mu T^*) \leqslant 3G(T^*),$$

т. е. $G(T^*) \geqslant 1/3$. Отсюда $T^* \leqslant F(1/3) = 9/4$, причём независимо от значений λ и μ.

Таким образом, уравнение (2.5) достаточно решить на интервале $(0; 9/4]$. Располагая явной формулой (2.4) для вычисления значений функции G и применяя какой-нибудь приближённый метод (например, банальный метод деления пополам), мы сможем найти T^* и затем $a_1^* = G(T^*)$ с любой наперёд заданной точностью.

§ 3. О невозможности построения циркулем и линейкой

Обратимся теперь к п. б) задачи 27.5: можно ли построить циркулем и линейкой треугольник по трём его биссектрисам?

По-видимому, впервые данный вопрос был поставлен в 1875 году Брокаром [17]. В 1896 году П. Барбарен [16] показал, что в общем случае задача сводится к решению в квадратных радикалах некоторого алгебраического уравнения довольно большой степени[7]. В частном случае — когда две из трёх данных биссектрис имеют равные длины — задачу удаётся свести к решению всего лишь кубического уравнения, что открывает лёгкий путь к доказательству невозможности искомого построения в общем случае.

В русскоязычной литературе обоснование невозможности построения циркулем и линейкой треугольника по трём биссектрисам можно найти, по крайней мере, в двух источниках: в статье Ю. И. Манина [8] из «Энциклопедии элементарной математики» 1963 года, а также в книге М. М. Постникова «Теория Галуа» [10]. Отметим, что уже в начале XX века общий метод доказательства невозможности различных построений с помощью циркуля и линейки был хорошо известен. Этот метод практически целиком базируется на алгебраической теории расширений полей. Более подробно с ним можно познакомиться по цитированным выше книгам (см. также часть 1 главы III книги [7]).

Сформулируем один удобный факт, который часто эксплуатируется при доказательстве невозможности построения чего-либо циркулем и линейкой (в частности, этого факта вполне хватает при анализе на разрешимость классических задач об удвоении куба, трисекции угла, построении правильного 7-угольника и т. д.).

Теорема. *Если кубическое уравнение с рациональными коэффициентами не имеет рациональных корней, то ни один из его корней не может быть построен с помощью циркуля и линейки, исходя из поля рациональных чисел.*

Здесь фразу «исходя из поля рациональных чисел» нужно понимать так: помимо циркуля и линейки, в нашем распоряжении есть также некоторый отрезок единичной длины. Доказательство этой теоремы изложено, например, в § 3 главы III книги [7].

Теперь в случае, когда две из трёх данных биссектрис равны по длине, мы легко сможем обосновать невозможность построения тре-

---

[7] Этот результат также был анонсирован в [15].

угольника циркулем и линейкой. Далее мы дадим совсем прямолинейное доказательство (по сравнению с известными доказательствами из книг [8, 10]).

Действительно, пусть $l_c = l_b$. Тогда, как уже отмечалось, $c = b$, т. е. треугольник обязан быть равнобедренным. Таким образом, имеем систему

$$\begin{cases} l_a^2 = b^2 - \dfrac{a^2}{4}, \\ l_b^2 = ab\left(1 - \dfrac{b^2}{(a+b)^2}\right) \end{cases}$$

для определения основания a и боковой стороны b. Исключив b, получим

$$\left(16l_a^2 - 4l_b^2\right)a^6 + \left(9l_b^4 + 64l_a^4 - 32l_a^2l_b^2\right)a^4 + \\ + \left(-64l_a^4l_b^2 - 24l_b^4l_a^2\right)a^2 + 16l_a^4l_b^4 = 0. \qquad (3.1)$$

Если $l_b \neq 2l_a$, то корни уравнения (3.1), вообще говоря, не могут быть построены циркулем и линейкой. Вот конкретный пример, когда такое построение невозможно: $l_a = 1$ и $l_b = 3$. В самом деле, для $u = a^2$ получается кубическое уравнение

$$20u^3 - 505u^2 + 2520u - 1296 = 0,$$

которое, как нетрудно проверить, не имеет рациональных корней. (При $l_b = 2l_a$ получим равнобедренный треугольник с углом 36° при основании; построение такого треугольника сводится к построению правильного 5-угольника и потому возможно циркулем и линейкой.)

При произвольных l_a, l_b, l_c такой чисто алгебраический подход, связанный с последовательным исключением неизвестных из системы уравнений (2.1) с помощью *результанта*[8)], приведёт к уравнению 20-й степени (см. по этому поводу [24]). Например, при $l_a = 1$, $l_b = 2$, $l_c = 3$ получим

$$2\,043\,740\,160a^{20} - 87\,748\,669\,440a^{18} + 1\,421\,635\,969\,280a^{16} - \\ - 10\,783\,995\,413\,376a^{14} + 37\,981\,175\,081\,076a^{12} - 42\,210\,536\,672\,727a^{10} - \\ - 83\,380\,498\,450\,560a^8 + 250\,870\,367\,172\,096a^6 - 178\,821\,038\,555\,136a^4 - \\ - 1\,495\,906\,320\,384a^2 + 20\,061\,226\,008\,576 = 0.$$

Отметим, однако, что для нахождения истинного значения $a \approx 3{,}607$ это не очень удобно: полученное уравнение имеет много посторонних положительных корней.

---

8) Об этом методе решения систем алгебраических уравнений см., например, § 3 главы III в учебном пособии [2].

Приведём ещё один пример задачи на построение, которую в общем случае невозможно решить циркулем и линейкой.

Предложение 1. *Равнобедренный треугольник нельзя построить циркулем и линейкой, зная боковую сторону b и биссектрису l, проведённую к боковой стороне.*

Доказательство. Обозначив основание равнобедренного треугольника через a и положив $l = 1$, получим уравнение

$$ba^3 + (2b^2 - 1)a^2 - 2ba - b^2 = 0. \tag{3.2}$$

Нетрудно убедиться, что при некоторых рациональных $b > 0$ кубическое относительно a уравнение (3.2) не имеет рациональных корней. Например, при $b = 1$ уравнение

$$a^3 + a^2 - 2a - 1 = 0 \tag{3.3}$$

имеет иррациональные «тригонометрические» корни

$$2\cos\frac{2\pi}{7}, \quad 2\cos\frac{4\pi}{7}, \quad 2\cos\frac{6\pi}{7}.$$

При этом только $a = 2\cos(2\pi/7)$ соответствует реальному треугольнику[9]. □

Вместе с тем, уравнение (3.2) допускает *рациональную параметризацию*:

$$a = \frac{t^2 - 1}{t}, \quad b = \frac{t^2 - 1}{t^3 - 2t}. \tag{3.4}$$

Как следствие, в случае $l = 1$ для бесконечно многих рациональных $b > 0$ построение циркулем и линейкой искомого равнобедренного треугольника всё-таки возможно. Читателю предлагается доказать, что искомый треугольник будет существовать только при $b > 3/4$, что соответствует требованию $\sqrt{2} < t < 2$.

Может показаться, что построение треугольника циркулем и линейкой в случае, когда среди известных элементов треугольника есть биссектрисы, всегда невозможно, но это не так.

[9] Наверное, стоит напомнить, что уравнение (3.3) непосредственно связано с задачей построения правильного 7-угольника. Действительно, для комплексных корней 7-й степени из единицы имеем уравнение

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0,$$

которое заменой $a = z + 1/z$ приводится к виду (3.3). В частности, получим $a = 2\cos(2\pi k/7)$, поскольку $z = e^{2\pi i k/7}$.

Предложение 2. *Равнобедренный треугольник можно построить циркулем и линейкой, зная основание a и биссектрису l, проведённую к боковой стороне.*

Доказательство. Действительно, уравнение для определения неизвестной боковой стороны b имеет вид

$$(2a^2 - l^2)b^2 + (a^3 - 2l^2a)b - l^2a^2 = 0. \tag{3.5}$$

В отличие от уравнения (3.2), уравнение (3.5) является квадратным, а положительные корни квадратных уравнений с известными коэффициентами можно построить циркулем и линейкой. □

В заключение читателю предлагается решить несколько упражнений.

Упражнение 1. Опишите все равнобедренные треугольники, у которых длины всех сторон и всех биссектрис суть целые числа[10)].

План решения. 1. Используя параметризацию (3.4), опишите все тройки (a, b, l) натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению (3.5) и неравенству $a < 2b$.

2. Среди найденных троек (a, b, l) выделите те, для которых $h = \sqrt{b^2 - a^2/4}$ есть целое число. □

Упражнение 2. Для любых двух положительных чисел l_a, l_b существует единственный прямоугольный треугольник, у которого длины биссектрис, проведённых к катетам, равны этим числам.

План решения. 0. Пусть a, b — катеты, c — гипотенуза. Нужно доказать, что система

$$\begin{cases} l_a^2 = bc\left(1 - \dfrac{a^2}{(b+c)^2}\right), \\ l_b^2 = ac\left(1 - \dfrac{b^2}{(a+c)^2}\right), \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение в положительных числах a, b, c.

1. Получите формулы

$$a = \frac{l_b\left(l_b + \sqrt{l_b^2 + 8c^2}\right)}{4c}, \quad b = \frac{l_a\left(l_a + \sqrt{l_a^2 + 8c^2}\right)}{4c}. \tag{3.6}$$

[10)] Это задача, решение которой известно (см., например, [18], где даётся обзор диссертации Р. Бухгольца «On triangles with rational altitudes, angle bisectors or medians», посвящённой подобным вопросам).

2. Подставьте (3.6) в уравнение $a^2/c^2 + b^2/c^2 = 1$ и докажите, что оно имеет единственный положительный корень относительно c. □

Из упражнения 2 следует, что у прямоугольного треугольника длины двух биссектрис могут быть целочисленными. Вместе с тем, из формул

$$l_a l_b = \frac{abc(a+b+c)}{(a+c)(b+c)} \cdot \sqrt{2}, \quad l_c = \frac{ab}{a+b} \cdot \sqrt{2}$$

следует, что у *пифагорова треугольника*[11] лишь одна из биссектрис, проведённых к катетам, может иметь целую длину, а длина биссектрисы, проведённой к гипотенузе, всегда иррациональна. Как найти пифагоров треугольник с одной целочисленной биссектрисой, было описано ещё у Диофанта в его «Арифметике» (см. [3, задача VI_{16}]).

Упражнение 3. Существует ли прямоугольный треугольник, у которого длины всех биссектрис являются целыми числами?

Ответ. Не существует. □

В связи с упражнением 3 отметим, что длины биссектрис прямоугольного треугольника связаны уравнением

$$\begin{aligned}\left(l_a^2 + l_b^2 - l_a l_b \sqrt{2}\right)\left(l_a^2 + l_b^2 + 2 l_a l_b \sqrt{2}\right)^2 t^3 - \\ - 3 l_a^2 l_b^2 \left(l_a^4 + l_b^4 - l_a^2 l_b^2 - l_a l_b \left(l_a^2 + l_b^2\right)\sqrt{2}\right) t^2 + \\ + 3 l_a^4 l_b^4 \left(l_a^2 + l_b^2 - 2 l_a l_b \sqrt{2}\right) t - l_a^6 l_b^6 = 0,\end{aligned}$$

где $t = l_c^2$. Читателю предлагается убедиться (например, с помощью Maple), что при любых положительных l_a, l_b данное уравнение имеет единственный положительный корень $t < \min\{l_a^2, l_b^2\}$[12]. В частности, при $l_a = 1$, $l_b = \sqrt{2}$ получим уравнение

$$49t^3 + 18t^2 - 12t - 8 = 0$$

без рациональных корней. Это означает, что прямоугольный треугольник нельзя построить циркулем и линейкой по биссектрисам, проведённым к катетам.

Благодарности

Автор благодарит А. В. Спивака за полезные обсуждения по теме статьи.

[11] То есть прямоугольного треугольника с целочисленными длинами сторон.

[12] Тем самым, это уравнение характеризует наборы (l_a, l_b, l_c) возможных длин биссектрис прямоугольного треугольника.

Список литературы

[1] *Александров П. С., Пасынков Б. А.* Введение в теорию размерности. М.: Физматлит, 1973.

[2] *Винберг Э. Б.* Алгебра многочленов. М.: Просвещение, 1980.

[3] *Диофант Александрийский.* Арифметика и книга о многоугольных числах / Редакция и комментарии И. Г. Башмаковой. М.: Наука, 1974.

[4] *Жуков А., Акулич И.* Однозначно ли определяется треугольник? // Квант. 2003. № 1. С. 29–31.

[5] *Жуков А. В., Осипов Н. Н., Спивак А. В.* Длины биссектрис треугольника // Новая школьная энциклопедия. (Небесные тела. Астрономия. Числа и фигуры. Математика.) М.: Мир книги, Росмэн, 2005. С. 484–485.

[6] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 1976.

[7] *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? М.: МЦНМО, 2019.

[8] *Манин Ю. И.* О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки // Энциклопедия элементарной математики. Книга IV. Геометрия. М.: Физматлит, 1963. С. 205–227.

[9] *Пойа Д.* Математическое открытие. М.: Наука, 1976.

[10] *Постников М. М.* Теория Галуа. М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2013.

[11] *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2019.

[12] *Устинов А. В.* Можно ли построить треугольник по основаниям биссектрис? // Потенциал. Математика. Физика. Информатика. 2013. № 10. С. 41–50.

[13] *Хатчер А.* Алгебраическая топология. М.: МЦНМО, 2011.

[14] *Baker R. P.* The Problem of The Angle-Bisectors. Chicago: University of Chicago Press, 1911.

[15] *Barbarin P.* Résumé d’un mémoire sur la détermination d’un triangle au moyen des longueurs de ses bissectrices // Bulletin de la S. M. F. 1894. Vol. 22. P. 76–80.

[16] *Barbarin P.* Triangles dont les bissectrices ont des longueurs données // Mathesis. 1896. Vol. 16. P. 143–150.

[17] *Brocard H.* Question 58 // Nouvelle Correspondance Math. 1875. Vol. 1. P. 208.

[18] *Buchholz R. H.* On triangles with rational altitudes, angle bisectors or medians // Bull. Austral. Math. Soc. 1992. Vol. 45. P. 525–526.

[19] *Dinca G., Mawhin J.* A constructive fixed point approach to the existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2010. Vol. 17. P. 333–341.

[20] *Mironescu P., Panaitopol L.* The existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths // Amer. Math. Monthly. 1994. Vol. 101, № 1. P. 58–60.

[21] *Oxman V.* A Purely Geometric Proof of the Uniqueness of a Triangle with Prescribed Angle Bisectors // Forum Geometricorum. 2008. Vol. 8. P. 197–200.

[22] *Ustinov A. V.* On the Construction of a Triangle from the Feet of its Angle Bisectors // Forum Geometricorum. 2009. Vol. 9. P. 279–280.

[23] https://www.mccme.ru/ask/qa/bissect.html.

[24] https://www.mccme.ru/ask/qa/bissect1.html.

[25] https://www.cut-the-knot.org/triangle/TriangleFromBisectors.shtml.

[26] https://en.wikipedia.org/wiki/Brouwer_fixed-point_theorem.

[27] https://www.maplesoft.com.

Николай Николаевич Осипов, Сибирский федеральный университет (Красноярск)

nnosipov@rambler.ru