Несколько задач о треугольниках Понселе

А. А. Заславский

В «Математическом просвещении» (выпуск 13, с. 179) была опубликована следующая задача (см. решение: выпуск 21, с. 278–282).

Задача 13.5. Известно, что в любом треугольнике расстояние между центрами O и I описанной и вписанной окружностей выражается через их радиусы R и r с помощью *формулы Эйлера*: $OI^2 = R^2 - 2Rr$. Докажите обобщение этой формулы: если в треугольник вписан эллипс с фокусами F_1, F_2 и малой осью ℓ, то

$$R^2\ell^2 = (R^2 - OF_1^2)(R^2 - OF_2^2). \qquad (1)$$

(*А. А. Заславский*)

В данной заметке приводятся решения двух других задач, продолжающих этот сюжет.

Задача 13.5$'$ (выпуск 28, с. 242–243). Треугольник вписан в окружность радиуса R и описан около эллипса с тем же центром и полуосями a, b.

(а) Докажите, что $R = a + b$.

(б) Найдите расстояние между центром описанной окружности и ортоцентром треугольника. (*А. А. Заславский*)

Решение. (а) Пусть $a > b$. Тогда в формуле (1) $\ell = 2b$ и $OF_1^2 = OF_2^2 = a^2 - b^2$. Следовательно, $a^2 = (R - b)^2$. Поскольку $R > b$, получаем искомое равенство.

(б) Ответ. $|a - b|$.

Будем считать, что $R = 1$ и описанная окружность треугольника является единичной окружностью комплексной плоскости. Пусть A, B, C, f_1, f_2 — комплексные числа, соответствующие вершинам треугольника и фокусам эллипса. Фокусы изогонально сопряжены относительно треугольника, поэтому, как заметил Морли, имеет место равенство (см. решение задачи 13.5 или [1], «Изогонально сопряжённые точки»)

$$f_1 + f_2 + \overline{f_1 f_2}ABC = A + B + C.$$

Но $f_1 + f_2 = 0$, значит,

$$f_1^2 = f_2^2 = -f_1 f_2, \quad f_{1,2} = \pm\sqrt{-(AB + BC + CA)}$$

и

$$OF_i^2 = \sqrt{\frac{(AB + BC + CA)(A + B + C)}{ABC}}.$$

С другой стороны, поскольку центру описанной окружности соответствует 0, ортоцентру H соответствует комплексное число $A + B + C$. Так как $|A| = |B| = |C| = 1$, имеем

$$OH^2 = (A + B + C)(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) = (A + B + C)\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right).$$

Следовательно,

$$OH = \sqrt{\frac{(AB + BC + CA)(A + B + C)}{ABC}}.$$

Таким образом,

$$OH = \frac{OF_i^2}{R} = a^2 - b^2 = |a - b|,$$

поскольку $a + b = 1$ в силу п. (а).

Примечания.

1. Из п. (а) и задачи 42 в [2] вытекает следующее свойство. Построим окружность с центром в вершине треугольника, касающуюся эллипса внешним образом. Тогда общие внешние касательные к этой окружности и эллипсу параллельны (рис. 1).

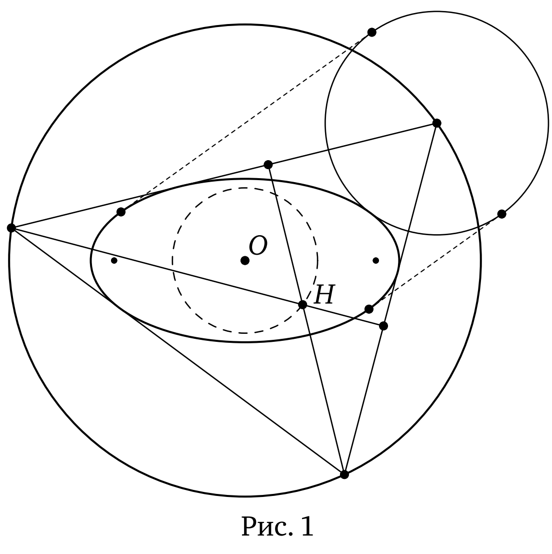

Рис. 1

2. Согласно теореме Понселе треугольник можно «вращать» между описанной окружностью и вписанным эллипсом. Пункт (б) показывает, что при этом вращении ортоцентр треугольника движется по окружности с центром O. Это утверждение является частным случаем задачи А. В. Акопяна [3]. Решение этой задачи, найденное А. Скутиным, приведено в [4].

Задача 13.5$''$ (выпуск 28, с. 243). Треугольник описан около окружности радиуса r и вписан в эллипс с тем же центром и полуосями a, b.

(а) Докажите, что $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

(б) Найдите радиус описанной окружности треугольника.

Решение. (а) При полярном преобразовании относительно вписанной окружности эллипс перейдёт в эллипс с тем же центром и полуосями r^2/a, r^2/b, а вершины треугольника в три прямые, касающиеся этого эллипса и пересекающиеся на окружности. Поэтому искомое равенство следует из п. (а) предыдущей задачи.

(б) Ответ. $\dfrac{a+b}{2}$.

Пусть A, B, C — вершины данного треугольника; I — центр его вписанной окружности; A', B', C' — точки её касания со сторонами BC, CA, AB; H' — ортоцентр треугольника $A'B'C'$. Из п. (б) предыдущей задачи получаем, что $IH'=r^2|a-b|/ab=ab|a-b|/(a+b)^2$. Известно, что $IH' : OI = r : R$ (треугольник, образованный вторыми точками пересечения прямых $A'H'$, $B'H'$, $C'H'$ с окружностью, гомотетичен треугольнику ABC, а H' — центр его вписанной окружности). Кроме того, по формуле Эйлера $OI^2=R^2-2Rr$. Из этих соотношений находим $R=(a+b)/2$, $OI=|a-b|/2$.

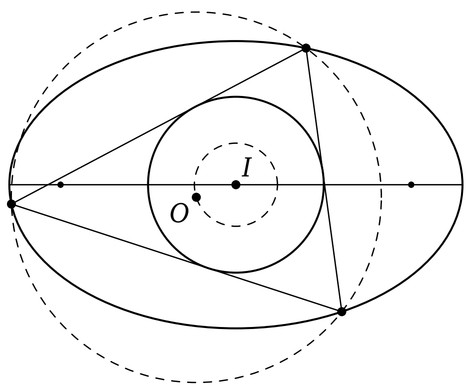

Рис. 2

Примечание. Пункт (б) означает, что при вращении треугольника между описанным эллипсом и вписанной окружностью центр его описанной окружности движется по окружности с центром I, а её радиус остаётся постоянным (рис. 2). Это равносильно следующему факту, замеченному Д. Резником: сумма радиусов вневписанных окружностей треугольника не меняется при его вращении (эта сумма равна $r+4R$). Другие наблюдения Д. Резника приведены в [5].

Список литературы

[1] *Прасолов В. В.* Рассказы о числах, многочленах и фигурах. М.: МЦНМО, 2019.

[2] *Акопян А., Заславский А.* Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2011.

[3] *Akopyan A.* Rotation of isogonal point // Journal of Classical Geometry. Vol. 1. Problem Section. P. 74. https://jcgeometry.org/Articles/Volume1/JCG2012V1pp72-74.pdf.

[4] *Skutin A.* On rotation of a isogonal point // Journal of Classical Geometry. Vol. 2. P. 66–67. https://jcgeometry.org/Articles/Volume2/JCG2013V2pp66-67.pdf.

[5] https://www.youtube.com/watch?v=wvNUdJbyHZA.

Алексей Александрович Заславский, ЦЭМИ РАН, МЭИ
alzasl@yandex.ru