Задачник

(составители А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов)

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

На базе решения трудной задачи неоднократно появлялась научная статья (в том числе у школьника), а также доклад на конференции (школьной или взрослой). Так что призываем присылать решения опубликованных задач. Составители задачника помогут с публикациями и докладами на конференциях.

1. Даны две окружности C_1 радиуса r_1 и C_2 радиуса r_2. Рассматривается множество середин отрезков с концами на C_1 и C_2 соответственно. Какова его площадь? (*Л. Радзивиловский*)

2. Докажите, что для любых $0 < x < 1$ и $m, n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство
$$(1-x^n)^m + (1-x^m)^n > 1.$$
(*Фольклор*)

3. Из n стержней (возможно, различной длины), скреплённых шарнирами, составлен выпуклый n-угольник.

   (a) Докажите, что эту конструкцию можно сделать жёсткой с помощью не более чем $n-2$ нитей.

(б) Каково минимальное число нитей для невыпуклого n-угольника? (*А. Я. Канель-Белов*)

4. (а) Изначально на доске нет чисел. Можно поставить две единицы, а если стоят два числа, равных n, то их можно заменить на $n-1$ и $n+1$. Какое минимальное число таких операций потребуется для создания числа 2021?

   (б) Изначально на доске нет чисел. Можно поставить две единицы, а если стоят два числа, равных n, то их можно заменить на $n-k$ и $n+k$ при некотором целом k, но так, чтобы отрицательных чисел не было. Какое минимальное число таких операций потребуется для создания числа 2022? (*А. Я. Канель-Белов*)

5. Пространственный четырёхугольник касается шара. Докажите, что точки касания лежат в одной плоскости. (*Фольклор*)

6. Дана выпуклая (т. е. такая, что множество точек над графиком выпукло) функция $f(x)$, определённая на всей вещественной прямой. Обозначим через U множество всех точек плоскости между графиками функций $f(x)$ и $f(x)+1$ (включая точки, лежащие на графиках). Докажите, что внутри U можно расположить отрезок любой конечной длины. (*Е. Рябов*)

7. Единичный диск покрыт (возможно, пересекающимися) треугольниками, не вылезающими за его пределы. Может ли сумма длин их периметров быть конечной? (*Л. Радзивиловский*)

8. Рассмотрим множество Ω трёхэлементных подмножеств множества $\{1, \ldots, n\}$. Пусть m — минимальное число цветов, в которые можно раскрасить Ω так, чтобы тройки $\{a, b, c\}$ и $\{b, c, d\}$ при $1 \leqslant a < b < c < d \leqslant n$ были раскрашены в разные цвета. Докажите, что

$$\frac{1}{100} \cdot \ln\ln n \leqslant m \leqslant 100 \cdot \ln\ln n. \qquad \text{(\textit{Д. Черкашин})}$$

9. Дан произвольный треугольник ABC. Пусть O — центр его описанной окружности, а P — произвольная точка плоскости.

   (а) Докажите, что касательные к окружностям (AOP), (BOP), (COP) в точках A, B, C конкурентны тогда и только тогда, когда P лежит на гиперболе $ABCOH$.

   (б) Пусть теперь точка P лежит на гиперболе $ABCOH$. Обозначим через A_1 точку пересечения касательной к окружности (ABC) со стороной BC, а через A_2 — точку пересечения прямых $A_1B_1C_1$ и AP. Аналогично определим точки B_1, B_2 и C_1, C_2. Тогда радикальный центр окружностей (AA_1A_2), (BB_1B_2) и (CC_1C_2) — это точка пересечения прямых OP и $A_1B_1C_1$.

(в) Если P совпадает с точкой Лемуана L треугольника ABC, то окружности из п. (б) соосны и пересекаются на окружности (ABC).

(*А. Жужлев, А. Шевцов*)

10. *Матрицей Маркова* называется квадратная матрица $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, такая, что 1) $a_{ij}\geqslant 0$ для любых i, j; 2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=1$ для любого $1\leqslant i\leqslant n$. Пусть $A=(a_{ij})$ — матрица Маркова порядка $n\geqslant 18$. Тогда из неё можно получить циклическими перестановками элементов строк такую матрицу Маркова $B=(b_{ij})$, что

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij} < 2, \quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

(*К. Э. Каибханов*)

11. (а) Пусть n — натуральное число. Сколько различных решений $(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4$ имеет уравнение $a^2+b^2+c^2+d^2=2^n$?

(б)* Покажите, что для простого нечётного p уравнение

$$x^2+y^2+z^2+t^2=4p$$

имеет $24(p+1)$ различных решений в целых числах. (*Фольклор*)

12. Дана непрерывная функция $f\colon[0,1]\to[0,1]$. Её *k-я итерация* $f_k(x)$ — это $f(f(\ldots(x)\ldots))$ (k раз). Известно, что $f_3(x)=x$, но $f(x)\neq x$ при некотором x. Докажите, что тогда для любого k существует такое $y\in[0,1]$, что $f_k(y)=y$, но $f_m(y)\neq y$ при всех $1\leqslant m<k$.

(*Теорема Шарковского*)

13. (а) На плоскости отмечено несколько клеток. Отмеченную клетку назовём *граничной*, если она граничит по стороне с неотмеченной. Имеется n отмеченных граничных клеток. Каково максимальное возможное число всех отмеченных клеток?

(б) Аналогичный вопрос для кубической решётки (*граничная клетка* имеет общую грань с неотмеченной). (*А. Я. Канель-Белов*)

14. Введём отношение эквивалентности на матрицах второго порядка с единичным определителем: $A\simeq B$, если AB^{-1} — целочисленная матрица. Докажите, что множество классов такой эквивалентности изоморфно дополнению трёхмерного пространства до узла трилистника. (*Фольклор*)

15. Периодическую последовательность символов можно задавать запретами, которые показывают, какие последовательности симво-

лов не могут в ней появляться. Например, последовательность $aabaabaab\dots$ задаётся тремя запретами b^2, bab, a^3.

(а) Дана последовательность периода n. Скольких запретов заведомо будет достаточно?

(б) Периодическая последовательность над n-буквенным алфавитом задана запретами длины k. Каков её максимально возможный период?

(в) Докажите, что последовательность периода n нельзя задать меньше чем $\log_2(n)$ запретами.

(г) Докажите, что есть последовательности периода n, которые можно задать k запретами, где u_k — первое число Фибоначчи, не меньшее чем n. (*А. Я. Канель-Белов*)