Дополнение и комментарии к задачнику

Хорошая задача ценна своими связями. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

Эстетическое чувство позволяет ощутить богатство связей и естественность задачи. Оно так важно в том числе и по этой причине. Значение математика определяется произведением его «пробивной силы» на эстетическое чувство (впрочем, эти две вещи взаимозависимы).

При публикации дополнения к задачнику нам прежде всего важны эти связи. Разумеется, содержательные и важные связи могут найтись как с классикой, так и с сюжетами, которые находятся в процессе исследования и ещё не получили изящной формулировки.

В выпуске 1 (с. 193, см. решение: выпуск 6, с. 137–139) опубликована

Задача 1.1. Могут ли 1000 ладей в пространстве заматовать короля? (*Фольклор*)

Развитием сюжета служит

Задача 1.1$'$. *Имеется бесконечная клетчатая плоскость и хромая ладья на ней.* (*Ход хромой ладьи — в клетку, соседнюю по стороне.*) *Также имеется программа, которая выставляет между соседними по стороне клетками перегородки и к моменту времени t не может выставить больше чем $t \cdot c$ перегородок, где c — константа* (*то есть программа может и выставлять перегородки регулярно, и долгое время не ставить, но к моменту времени t должно быть выставлено не больше $t \cdot c$ перегородок*). *Программа написана заранее и не может реагировать на то, как будет ходить ладья. Более того, ладья знает программу и знает, когда и куда будут выставляться перегородки.*

(а) *Докажите, что при $c \leqslant 1$ ладья заведомо сможет ходить вечно.*

(б) *Докажите, что при $c > 2$ можно написать программу, которая поймает ладью, если программе известно изначальное местоположение ладьи.*

(в) *Решите пункт* (б) *без условия о том, что программе известно изначальное местоположение ладьи.* (*М. Матдинов, Ф. Ивлев*)

Замечание. Есть гипотеза, что при $c = 2$ (а значит, и при $c < 2$) ладья сможет ходить сколь угодно долго, даже если программе известно изначальное положение ладьи.

В выпуске 8 (с. 246, см. решение: выпуск 9, с. 215–217) опубликована

Задача 8.5. Для иррационального $\alpha > 1$ обозначим
$$N(\alpha) = \{[n\alpha] \mid n \in N\}.$$
При каких k найдутся такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, что множества $N(\alpha_1), \ldots, N(\alpha_k)$ задают разбиение натурального ряда?

(*А. А. Заславский, А. В. Спивак*)

С ней связана (выпуск 29, с. 263)

Задача 8.5$'$. Закрашены k вершин правильного n-угольника P. Закраска называется почти равномерной, если для любого натурального m верно следующее условие: если $M1$ — множество m расположенных подряд вершин и $M2$ — другое такое множество, то количество закрашенных вершин в $M1$ отличается от количества закрашенных вершин в $M2$ не больше, чем на 1. Доказать, что для любых натуральных n и k ($k < n$) почти равномерная закраска существует и что она единственна с точностью до поворотов закрашенного множества.

(*М. Л. Концевич*)

В продолжение темы:

Задача 8.5$''$. (а) *Опишите все бесконечные апериодические слова над алфавитом из k символов со следующим свойством: в любых двух подсловах одинаковой длины количество символов каждого сорта отличается не более чем на* 1.

(б) *Опишите все бесконечные апериодические слова над алфавитом из k символов такие, что для некоторых C и N_0 при всех $n > N_0$ количество подслов длины n равно $n + C$.*

(*А. Я. Канель-Белов, А. Л. Чернятьев*)

Задача 8.5$'''$. *Пусть n — фиксированное число. Укажите все такие A, что числа $[A], [2A], \ldots, [NA]$ все различны и $[1/A], [2/A], \ldots, [N/A]$ тоже различны.* (*Фольклор*)

В выпуске 11 опубликована (с. 163, см. решение: выпуск 14, с. 279)

Задача 11.6. Обозначим через $s(n)$ сумму цифр числа n. Ограничена ли последовательность $s(n)/s(n^2)$? (*Э. Туркевич*)

Ответ отрицательный, и решение проходит при всех целых $k > 1$. В этой связи возникает

Задача 11.6$'$. (а) *Пусть k — целое число, $k > 1$. Ограничена ли последовательность $s(n^k)/s(n)$?*

(б) *Решите уравнение в целых числах*: $s(n^4) = s(n)^4$.

(*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 13 (с. 181) опубликована

Задача 13.12. Докажите, что следующие числа могут начинаться с любой комбинации цифр: (а) 2^{n^2}; (б) $2^{2^n 3^k}$.

(в) Докажите, что множество $A \subset \mathbb{R}$ чисел таких, что последовательность первых цифр c^{2^n} $(c \in A)$ периодична, счётно, а множество $B \subset \mathbb{R}$ чисел таких, что последовательность первых цифр c^{10^n} $(c \in B)$ периодична, несчётно. (*А. Канель*)

С ней связана (выпуск 29, с. 264)

Задача 13.12$'$. (а) Пусть $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Докажите, что множество дробных частей $\{\alpha \cdot n\}$, где $n \in \mathbb{N}$, всюду плотно и равномерно распределено на единичном отрезке. (*Фольклор*)

(б) Лемма Кронекера. Пусть α_i, $i = 1, \ldots, k$, линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Докажите, что множество векторов из дробных частей $\{\alpha_1 \cdot n\}$, $\ldots$, $\{\alpha_k \cdot n\}$, где $n \in \mathbb{N}$, всюду плотно и равномерно распределено в единичном кубе.

Лемма Вейля. Пусть многочлены P_i, $i = 1, \ldots, k$, линейно независимы над $\mathbb{Q}$ по модулю многочленов с рациональными коэффициентами и констант. Докажите, что множество векторов из дробных частей $\{P_1(n)\}, \ldots, \{P_k(n)\}$, где $n \in \mathbb{N}$:

(в) всюду плотно;

(г) равномерно распределено в единичном кубе.

В одном из доказательств леммы Вейля используется следующая

Задача 13.12$''$. (а) *В таблице $n \times n$ записаны числа $a_{ij} = b_i b_j$. Главная диагональ $((1, 1) - (n, n))$ покрыта неперекрывающимися квадратами равного размера, стороны которых параллельны сторонам таблицы, а главные диагонали лежат на главной диагонали большого квадрата. Может ли среднее арифметическое чисел, попавших в эти квадраты, быть строго больше среднего арифметического чисел таблицы?*

(б) *Тот же вопрос, если условие равенства размеров убрать.*

(*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 14 (с. 273, поправка: выпуск 15, с. 235, см. решение: выпуск 15, с. 219–228) опубликована

Задача 14.8. Дан треугольник ABC. A_1, B_1, C_1 — точки касания сторон BC, AC, AB с вписанной окружностью соответственно. A_0, B_0, C_0 — середины сторон. Обозначим точку пересечения прямых A_0B_0 и A_1B_1 через C'. Аналогично определяются точки A' и B'. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в точке Фейербаха. (*Ф. Ивлев*)

По мотивам этой задачи придумалась следующая

Задача 14.8′. *Докажите, что касательная к вписанной окружности треугольника в точке Фейербаха касается также вписанного эллипса Штейнера (касающегося сторон в их серединах).*

(*А. А. Заславский*)

В выпуске 16 опубликована (с. 231)

Задача 16.7. В единичный шар вписано тело T, все рёбра которого имеют длину не более 10^{-3}, а площадь его поверхности больше 10^3. Докажите, что у него не менее 10^9 граней. (*А. Я. Белов*)

Ей предшествовала классическая задача:

Задача 16.7′. *В единичный шар вписано тело T. Может ли площадь его поверхности быть сколь угодно большой?* (*«Сапог Шварца»*)

В выпуске 20 опубликована (с. 251)

Задача 20.9. (а) Матрица A называется *нормальной*, если $AA^* = A^*A$, где A^* — матрица, транспонированная к матрице A. Какова максимальная размерность векторного подпространства комплексных $(n \times n)$-матриц, все элементы которого нормальны?

(*Международная студенческая олимпиада*, 2015)

(б) Какова максимальная размерность подпространства попарно коммутирующих комплексных $(n \times n)$-матриц? (*Э. Б. Винберг*)

В продолжение сюжета:

Задача 20.9′. *Матрица A называется* идемпотентной *если $A^2 = A$. Дано k идемпотентных матриц $A_1, \ldots, A_k$ порядка n таких, что $A_iA_j = -A_jA_i$ при $i \neq j$. Докажите, что ранг одной из них не превосходит n/k.* (*Данила Белоусов, Новосибирск*)

В выпуске 26 (с. 267) опубликована

Задача 26.8. Пусть 2019 точек случайно, независимо и равномерно распределены на единичном диске $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, и пусть C есть их выпуклая оболочка. Какая вероятность больше: что C — треугольник или что C — четырёхугольник? (*Ф. В. Петров*)

В продолжение вероятностной темы:

Задача 26.8′. *В круге случайно и равномерно выбрали n синих точек и k красных точек. Каково матожидание количества вершин пересечения выпуклой оболочки красных точек и выпуклой оболочки синих точек?* (*Число вершин пустого множества считается равным нулю.*) (*Ф. В. Петров*)

В выпуске 28 (с. 233, см. решение: этот выпуск, с. 239–240) опубликована

Задача 28.2. Любой ли трёхгранный угол имеет сечение, являющееся правильным треугольником? (*Фольклор*)

Развитием темы служит

Задача 28.2′. *Всегда ли возможно, перегнув произвольный треугольник по средним линиям, получить тетраэдр* (*не обязательно правильный*)? (*Фольклор*)

В выпуске 29 (с. 258) опубликована

Задача 29.15. (а) Рассматривается последовательность первых цифр степеней двойки 1248136125… Каково количество различных подслов длины 13?

(б) Рассматривается последовательность W первых цифр вида 2^{n^2}: 1215636… Докажите, что существует такой многочлен $P(k)$, что для всех достаточно больших k количество всех различных подслов в W длины k есть в точности $P(k)$. (*А. Я. Канель-Белов*)

Продолжением темы служит

Задача 29.15′. *Рассматривается последовательность W первых цифр степеней двойки* 1248136125….

(а) *Докажите, что последовательность непериодична.*

(б) *Докажите, что существует такая константа N, что фрагмент* 1248136125 *встречается в* любом *подслове из W длины N.*

(в) *Докажите, что любое подслово из W, если его записать в обратном порядке, встречается как подслово в последовательности первых цифр степеней пятёрки.*

(г) *Опишите слова, которые могут встречаться бесконечно много раз в последовательности первых цифр числа вида $c_1(c_2n)!$.* (*А. Я. Канель-Белов*)