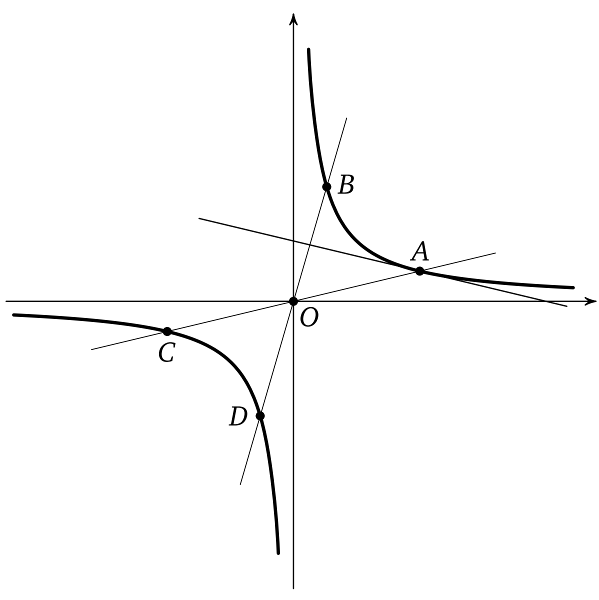
Решения задач из прошлых выпусков

15.3. Условие. Гипербола $H=\{(x,y)\colon xy=1\}$ повёрнута на угол α относительно начала координат $(0;0)$; получилась гипербола H_α. Найдите угол между их касательными в точках пересечения H и H_α.

(*А. В. Акопян*, *D. Schleicher*)

Ответ. $180^\circ-2\alpha$.

Решение. Возьмём точку A на гиперболе. При повороте она может перейти в одну из точек на гиперболе, находящихся на том же расстоянии от начала координат (см. рисунок). Так как при повороте на 180° гипербола переходит сама в себя, достаточно рассмотреть только случай, когда совмещаются точки A и B, т. е. $\angle AOB=\alpha$. Обозначим через φ острый угол между OA и касательной к гиперболе в точке A. Из симметрии относительно прямой $x=y$ следует, что острый угол между



прямой OB и касательной в точке B также равен φ и противоположно ориентирован, поэтому ответ равен 2φ. Осталось выразить φ через α.

Пусть $y = kx$ — уравнение прямой OA. Тогда $(1/\sqrt{k}, \sqrt{k})$ — координаты точки A. Подставляя $x = 1/\sqrt{k}$ в формулу для производной $y' = -1/x^2$, получаем, что угловой коэффициент касательной в точке A равен $-k$, а значит, касательная и прямая OA образуют равные углы с осью OX.

Угол между Ox и прямой OA равен (из симметрии) $(90° - \alpha)/2 = 45° - \alpha/2$, поэтому $\varphi = \angle 90° - \alpha$ и ответ равен $180° - 2\alpha$.

(*И. В. Митрофанов*)

16.8. Условие. Даны два подмножества в $\mathbb{Z}_2^n$: A и B. Известно, что $|A| + |B| > 2^k$. Докажите, что $|A + B| \geqslant 2^k$. (Здесь $A + B$ — это сумма Минковского двух множеств.) (*Д. Г. Фон-дер-Флаасс*)

Решение. Будем доказывать утверждение задачи индукцией по k. База $k = 1$ очевидна.

Будем говорить, что координата *разделяет* множество двоичных векторов, если в этом множестве есть как векторы, у которых эта координата равна 0, так и векторы, у которых она равна 1. Если среди координат нет такой, которая разделяет и A и B, то координаты делятся на два типа: одинаковые для любого вектора из A и одинаковые для любого вектора из B. Тогда все суммы Минковского попарно разные, а значит, их количество равно $|A| \cdot |B| \geqslant 1 \cdot 2^k = 2^k$.

Теперь предположим, что одна из координат (не умаляя общности, первая) разделяет как A, так и B. Обозначим A_0 множество всех векторов из A, у которых первая координата равна 0. Аналогично определим A_1, B_0 и B_1.

Либо $|A_0| + |B_0| > 2^{k-1}$, либо $|A_1| + |B_1| > 2^{k-1}$. Аналогично либо $|A_0| + |B_1| > 2^{k-1}$, либо $|A_1| + |B_0| > 2^{k-1}$. Не умаляя общности, пусть

$$|A_0| + |B_0| > 2^{k-1}, \quad |A_0| + |B_1| > 2^{k-1}.$$

По предположению индукции $|A_0 + B_0| \geqslant 2^{k-1}$ и $|A_0 + B_1| \geqslant 2^{k-1}$. Далее, у всех векторов из $A_0 + B_0$ первая координата равна 0, а у векторов из $A_0 + B_1$ она равна 1, поэтому эти две суммы Минковского не пересекаются и $|A + B| \geqslant |A_0 + B_0| + |A_0 + B_1| \geqslant 2^k$.

(*И. В. Митрофанов*)

28.2. Условие. Любой ли трёхгранный угол имеет сечение, являющееся правильным треугольником? (*Фольклор*)

Ответ. Не любой.

Решение. Предположим, что любой трёхгранный угол имеет сечение, являющееся правильным треугольником. Можно считать (применив гомотетию), что сторона этого треугольника равна 1. Тогда можно также считать, что для всех трёхгранных углов это один и тот же треугольник ABC.

Рассмотрим замыкание M множества точек, из которых стороны AB и AC видны под углами, не меньшими $\pi-\varepsilon$, где ε — заданное положительное число. Ясно, что $A \in M$.

Возьмём трёхгранный угол, в котором AB и AC принадлежат плоским углам, равным $\pi-\varepsilon$, а третий плоский угол равен ε. Тогда вершина трёхгранного угла O принадлежит M.

Устремим теперь ε к нулю. Множество M в пределе сводится к точке A. Значит, $O \to A$. Так как отрезок BC виден из O под углом ε, из A он должен быть виден под нулевым углом, что неверно.

Замечание. На самом деле наше рассуждение показывает, что для любого треугольника найдётся трёхгранный угол, не имеющий подобного ему сечения. (*А. Я. Канель-Белов*, *Б. Р. Френкин*)