Памяти Джона Хортона Конвея

Л. Х. Кауффман

§ 1. Введение

Джон мог усадить вас и показать волшебный фокус, а затем научить, как его делать (если вы могли такое усвоить). Джон мог усадить вас и прочитать короткую чёткую лекцию о скейн-соотношениях (что он и делал для многих из нас в 1970-е годы), и вы думали — это остроумно. И это меняло вашу жизнь.

Вот вкратце моё впечатление от Джона Конвея.

Впервые я встретил его в 1970-х, когда он приезжал к Вере Плесс в Иллинойсский университет в Чикаго (где я учился с 1971 г., а теперь заслуженный профессор). Он сделал доклад о многочлене Александера и как его можно вычислить индуктивно с помощью теории скейн-соотношений — рекурсии включали только диаграммы узлов и зацеплений. Никаких других инструментов не требовалось. Топологи изучали многочлен Александера с помощью таких структур, как свободное дифференциальное исчисление Фокса, группы гомологий, модули, бесконечное циклическое накрытие дополнения узла, фундаментальная группа, представления групп, специальный арсенал алгебраической топологии. А этот волшебник объяснил нам, как получить многочлен Александера из чистой комбинаторики, которую мог понять старшеклассник. (На самом деле было сказано, что он открыл этот способ, будучи старшеклассником.) Затем он сообщил, что рассказал нам это ещё в 1969 году, но тогда лишь немногие его слушали. Так или иначе, в этот раз мы стали слушать.

Я снова встретил его, когда был приглашённым профессором в Энн-Арборе (Мичиган), и он ещё кое-что рассказал о скейн-соотношениях. Я задавал ему вопросы об этом подходе, очень трудные и выглядевшие

Kauffman L. H. John Horton Conway — a recollection. Статья написана для «Математического просвещения». Перевод Б. Р. Френкина.

неясными, а он сказал: «Всё это содержится в скейн-соотношениях». И я поверил ему. В итоге я нашёл модель для рассказанного им с помощью работы Зайферта 1930-х годов, а потом нашёл другую модель с помощью работы Александера 1920-х. Работа Александера в моём сознании преобразовалась, став особой комбинаторикой, причём аналогичной некоторым структурам статистической физики (статистическим суммам), и я написал книгу об этих новых способах работы с многочленами Александера (Kauffman, Formal Knot Theory, Princeton University Press 1981 [9]). Но я не подозревал, какие глубины скрыты в этом месте. Не подозревал этого и Конвей.

В 1983 Воган Джонс (руководясь идеями из теории алгебр фон Неймана и статистической физики) открыл новый инвариант со скейн-тождеством, которое было небольшой модификацией тождества Конвея для многочлена Александера. Конвей мог бы его открыть, если бы задался вопросом, что происходит при изменении какого-либо коэффициента или знака в его формуле для многочлена Александера! В тот момент многие, включая меня, ухватились за эту идею — и началась новая эпоха в теории узлов. Открылась связь с физикой, а Конвей открыл связь с диаграммами и рекурсией. Всё это вовлекло нас в дьявольскую пляску, которая с тех пор продолжается все эти годы. Мир изменился.

Джон был глубоким математиком и действующим магом. Он хотел вызвать изумление своей магией, и он хотел вовлечь вас в создание и отделку этой магии. Он был изобретателем и наставником. Он мог очень напряжённо работать, чтобы привести кусочек математики в такое состояние, когда он глубоко нетривиален и однако может быть несколькими штрихами объяснён почти любому. Так обстоит дело с игрой «Жизнь», теорией скейн-соотношений, фокусами с верёвкой, аудиоактивностью[1)], сюрреальными числами и многим другим, что он любил. Этот труд любви, превращающий математику в созидательную магию, был самой характерной чертой Джона Хортона Конвея. Она всегда будет жить в сердце каждого, с кем он соприкасался.

§ 2. Теория скейнов и так далее

Одно из важнейших достижений Конвея в теории узлов — его теория рациональных танглов. Здесь я дам лишь некий её набросок. На рис. 1 вы увидите два тангла T и S (кусочки танглов связаны с четырьмя

[1)] См. § 3. — *Прим. перев.*

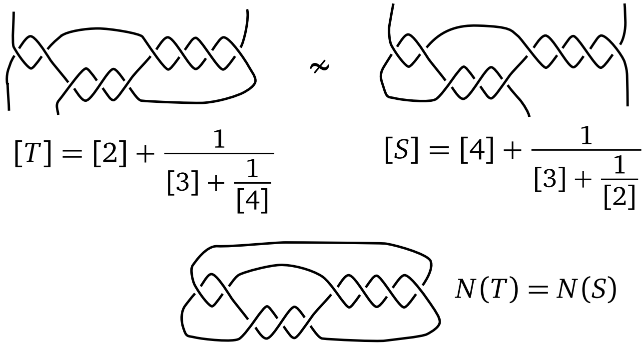


Рис. 1. Цепные дроби и рациональные узлы

свободными концами), один помечен цепной дробью

$$[2, 3, 4] = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}} = 2 + \frac{4}{13} = \frac{30}{13},$$

а другой — цепной дробью

$$[4, 3, 2] = 4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}} = 4 + \frac{2}{7} = \frac{30}{7}.$$

По теореме Конвея о танглах [4] оказывается, что такими дробями классифицируется топологический тип танглов. Чтобы получить танглы данного типа, мы фиксируем концы и позволяем танглам двигаться. Два тангла на рис. 1 оказываются топологически не эквивалентными. Но, как показывается рисунок, они связаны. Оба они замыкаются в один и тот же рациональный узел, помеченный на рисунке как $N(T) = N(S)$. Теперь заметим, что обе дроби имеют один и тот же числитель (30), а что касается знаменателей, то $7 \times 13 = 91$ — число с остатком 1 при делении на 30. Это не случайно. Есть красивый способ классифицировать рациональные узлы (замыкания рациональных танглов) по их цепным дробям. Можно выбрать обозначение $(4, 3, 2)$ с точностью до обращения $(2, 3, 4)$ в качестве индикатора рационального узла на рисунке. На этой основе Конвей разработал простые обозначения для рациональных узлов и затем применил их вместе с вложениями в определённые графы, чтобы создать очень удобные обозначения узлов, позволяющие очень изящно маркировать тысячи узлов в соответствующих таблицах.

Ниже следует краткое введение в теорию скейнов Джона Конвея [4]. Начнём с рис. 2, где я схематически изобразил диаграмму узла или зацепления K_+ и другую диаграмму K_-, которая отличается лишь пере-

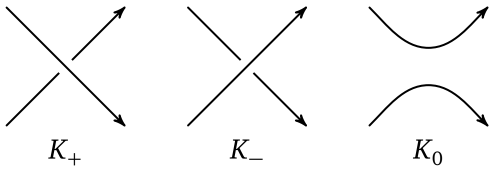


Рис. 2. Скейн-тройка

ключением перекрёстка (переменой местами верхнего и нижнего ребра, что показано для случая единственного перекрёстка). На том же рисунке представлена ещё одна диаграмма K_0, где перекрёсток заменён двумя параллельными дугами. Это так называемое *разрешение* перекрёстка. Три диаграммы K_+, K_-, K_0, вместе взятые, называются *скейном* (*скейн-тройкой*), и Конвей сообщил нам ключевое соотношение для своего многочлена $\nabla_K(z)$, который сопоставляется каждой ориентированной диаграмме зацепления:

$$\nabla_{K_+} - \nabla_{K_-} = z\nabla_{K_0}.$$

Наряду с этим *скейн-соотношением* он сообщает нам, что

$$\nabla_O = 1,$$

где O обозначает незаузленную окружность. Он также сообщает, что если K и K' — топологически эквивалентные узлы или зацепления, то

$$\nabla_K = \nabla_{K'}.$$

Это полный набор правил для отыскания инварианта $\nabla_K(z)$ любого ориентированного зацепления K.

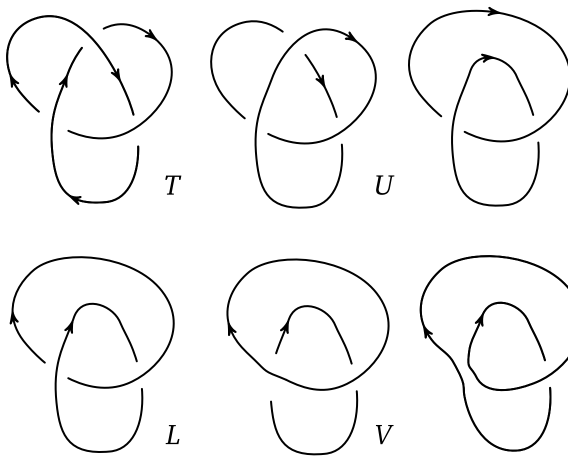
На рис. 3 мы иллюстрируем простейшее следствие из этих аксиом. Базовая скейн-тройка состоит из U, U', V, где U и U' — тривиальные узлы, а V — пара незаузленных окружностей. Значения многочлена Александера — Конвея для U и U' равны 1, так что их разность равна 0. Отсюда получаем, что $z\nabla_V = 0$, так что $\nabla_V = 0$. Можно показать, что таким образом многочлен Александера — Конвея получает значение 0 для тривиального зацепления любого количества компонент.

На рис. 4 мы иллюстрируем эту ситуацию для некоторых конкретных диаграмм. Здесь T — диаграмма трилистника, а U — результат «переключения» одного перекрёстка на диаграмме T. Можно положить $K_+ = T$, $K_- = U$ и $K_0 = L$, где L — двухкомпонентное зацепление в верхнем ряду рисунка. Таким образом,

$$\nabla_T - \nabla_U = z\nabla_L \quad \text{и} \quad \nabla_L - \nabla_V = z\nabla_W.$$

U U' V

Рис. 3. Скейн-тройка для тривиального зацепления



T U L

L V W

Рис. 4. Скейн-тройка для трилистника

Но U и W — тривиальные узлы, а V — тривиальное зацепление. Кроме того, мы проверили, что у тривиального зацепления нулевой многочлен. Отсюда получаем, что $\nabla_T - 1 = z\nabla_L$ и $\nabla_L = z$, так что $\nabla_T = 1 + z^2$.

Любой узел или зацепление можно сделать на диаграмме тривиальным, «переключив» («перевернув») некоторые его перекрёстки, как мы сделали в случае трилистника T и зацепления Хопфа L. Благодаря этому можно применить скейн-соотношение Конвея, чтобы вычислить многочлен Александера — Конвея $\nabla_K(z)$ для любого узла или зацепления K. Замечательно, что, хотя во многих пунктах этого вычисления возможен различный выбор, ответ всегда однозначен и является топологическим инвариантом зацепления K.

Не столь общеизвестно, что Конвей понимал скейн-теорию гораздо шире, а не как следствие из единственного базового скейн-соотношения, приведённого выше. Конвей мог поведать вам, что узел или зацепление K живёт в «скейн-комнате» $\{K\}$ и можно ввести неассоциативные операции $\oplus, \ominus$ между скейн-комнатами таким образом, что

$$\{K_+\} = \{K_-\} \oplus \{K_0\} \quad \text{и} \quad \{K_-\} = \{K_+\} \ominus \{K_0\}.$$

В пределах данной комнаты $\{K\}$ можно найти любой вариант узла или зацепления K, который может появиться после деформации или объемлющей изотопии. Это означает, что все обитатели комнаты топологически эквивалентны между собой, и они могут быть диаграммами вроде показанных выше или полными трёхмерными вложениями узла или зацепления. Исследуя скейн-тройку, мы берём три представителя K_+, K_-, K_0, по одному из каждой комнаты, причём представители должны быть одинаковы за исключением мест, где происходит «переключение» или разрешение перекрёстка. И мы говорим, что комната $\{K_+\}$ *скейн-эквивалентна* конкатенации $\{K_-\} \oplus \{K_0\}$. Таким способом можно получить *скейн-разложение* узла или зацепления. На рис. 4 можно видеть, что

$$\{T\} = \{U\} \oplus \{L\}, \quad \{L\} = \{V\} \oplus \{W\},$$

так что

$$\{T\} = \{U\} \oplus (\{V\} \oplus \{W\}).$$

Это окончательное скейн-разложение узла T выражает трилистник в скейн-тройке как композицию двух тривиальных узлов и тривиального зацепления. Для любого узла существует такое скейн-разложение на тривиальные узлы и тривиальные зацепления. Решающую роль играет неассоциативность скейн-операций.

Два узла или зацепления называются *скейн-эквивалентными*, если у них одинаковое разложение на тривиальные узлы и зацепления. Полное описание классов скейн-эквивалентности узлов и зацеплений — открытая проблема до сего дня. Определив понятие скейна, Конвей открыл совершенно новую область топологии.

В контексте теории скейнов многочлен Александера — Конвея превращается в один из способов записать скейн-инварианты, причём

$$\nabla(A \oplus B) = \nabla(A) + z\nabla(B) \quad \text{и} \quad \nabla(A \ominus B) = \nabla(A) - z\nabla(B).$$

Что было не очевидно для Конвея в 1970-е годы, так это факт, что кроме многочлена Александера — Конвея и его аналогов от нескольких переменных существуют и другие линейные скейн-инварианты. Самый впечатляющий из них появился вслед за многочленом Джонса [7].

Его часто называют Homflypt-многочленом по его авторам (из независимых групп) Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish, Yetter, Przytycki, Trawczk (см. [6, 15]). Линейное соотношение для него имеет вид

$$aP_{K_+} - a^{-1}P_{K_-} = zP_{K_0}$$

и сопоставляет ориентированному узлу или зацеплению K многочлен Лорана $P_K(a, z)$, который является инвариантом его топологического типа. Многочлен Джонса — частный случай Homflypt-многочлена. Ключевое свойство этих многочленов — их способность отличать многие узлы от их зеркальных образов. Математический контекст, из которого происходят эти новые скейн-многочлены, включает многие вопросы математической физики, алгебр Ли и алгебр Хопфа [2, 3, 7, 16]. Эти многочлены служат основой новейших достижений в изучении инвариантов Васильева и гомологии зацеплений.

Некоторые вопросы теории скейнов стали ясны в связи с моими работами. Один из них — модель многочлена Александера — Конвея, которая использовала работу Зайферта 1930-х годов [8]. Другой — модель суммирования состояний для многочлена Александера — Конвея, связанная с исходной работой Дж. У. Александера [1, 9]. Модель суммирования состояний связана с соответствующей моделью (скобка Кауффмана [10]), которую я позже открыл для многочлена Джонса. Это суммирование состояний имеет особенно простой вид и соответствующее неориентированное скейн-соотношение в примере, приведённом ниже. Скобка Кауффмана может рассматриваться как частный случай так называемого многочлена Кауффмана от двух переменных (обозначение $L_K(a, z)$) со скейн-соотношением

$$L_{\times} + L_{\times} = z(L_{\asymp} + L_{)(}) \quad \text{и} \quad L_{\curvearrowright} = aL_{\smile}, \quad L_{\curvearrowleft} = a^{-1}L_{\smile}.$$

Модель скобочного многочлена [10, 11] для многочлена Джонса может быть описана неориентированным скейн-разложением перекрёстков $\times$ на *A-разрешения* $\asymp$ и *B-разрешения* $)($ в диаграмме зацепления D, а именно:

$$\langle \times \rangle = A\langle \asymp \rangle + A^{-1}\langle)(\rangle, \tag{1}$$

причём

$$\langle D \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2})\langle D \rangle, \tag{2}$$

$$\langle \curvearrowright \rangle = (-A^3)\langle \smile \rangle, \tag{3}$$

$$\langle \curvearrowleft \rangle = (-A^{-3})\langle \smile \rangle. \tag{4}$$

В терминах скейн-теории Конвея мы имеем неориентированную скейн-тройку с уравнением

$$\{\times\} = \{\asymp\} \oplus \{)(\}.$$

Исследуя это уравнение в каждом перекрёстке диаграммы узла, получаем неориентированное скейн-разложение, где теперь допускается, что операция $\oplus$ ни коммутативна, ни ассоциативна. Тогда скобочный многочлен оценивает этот неориентированный скейн, удовлетворяющий уравнению

$$\langle\{X\} \oplus \{Y\}\rangle = A\langle\{X\}\rangle + A^{-1}\langle\{Y\}\rangle.$$

Как и в случае ориентированного скейна, этот неориентированный скейн содержит неразгаданные тайны, которые медленно раскрываются. Есть лишь предположение, что скобочный многочлен может

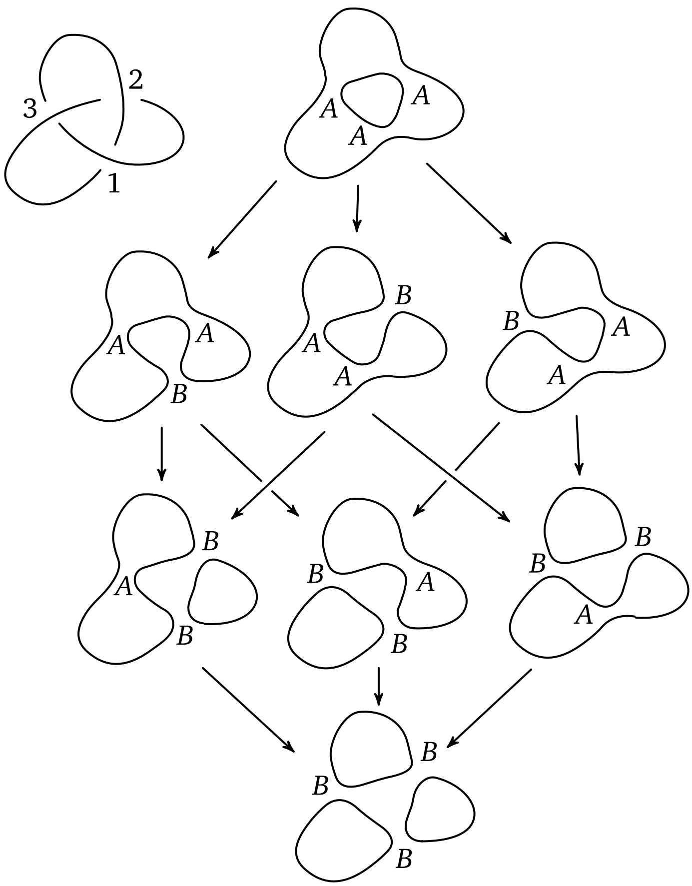


Рис. 5. Скобочные состояния и комплекс Хованова

выявить тривиальный узел, но доказано [13], что тривиальный узел выявляется обобщением скобки Кауффмана в теории гомологий, которое сделано Михаилом Ховановым [12]. Что ещё скрыто в ориентированных и неориентированных скейнах узлов и зацеплений?

На рис. 5 приведена подсказка насчёт гомологии Хованова. На этом рисунке мы иллюстрируем все случаи скобочного суммирования состояний. Его можно также истолковать как полное скейн-разложение трилистника. Каждая диаграмма добавляет слагаемое в скобочный многочлен, и их сумма составляет весь скобочный многочлен. Хованов исследует эту диаграмму состояний и видит, что она образует категорию. Объекты категории — сами состояния. Морфизмы, порождающие категорию, — стрелки на рисунке. Каждая стрелка соединяет два состояния, отличающиеся разрешением ровно одного перекрёстка, причём стрелка направлена от состояния с меньшим количеством разрешений к состоянию, где на одно разрешение больше. Хованов строит свою теорию гомологий для узлов, исходя из соответствующей теории гомологий для этой категории. Здесь мы соприкасаемся с основами алгебраической топологии, где нерв категории допускает симплициальную структуру, а соответствующий функтор в некоторую категорию модулей подключает богатые возможности гомологической алгебры. Ничто из этого не произошло бы, если бы Конвей не открыл скейн.

§ 3. Аудиоактивность

Я хочу рассказать о загадке, которую Конвей превратил в небольшую остроумную теорию [5]. История этой загадки хорошо известна. Её рассказывал сам Конвей — устно и даже не раз письменно.

Джон был в некоем обществе, где ему предъявили следующую последовательность чисел: $1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, \ldots$ и спросили, какое число будет следующим и по какому правилу строится последовательность. Согласно рассказу Конвей был озадачен, и когда ему рассказали решение, он был восхищён процессом, который приводит к этой последовательности. На следующий день в самолёте он начал исследование его потрясающих свойств.

Видите ли вы следующий член последовательности? Прервите чтение и задумайтесь! Следующий абзац раскроет секрет.

Прочтите последовательность вслух и громко:

1
одна единица:11
две единицы: 21

одна двойка, одна единица: 1211
одна единица, одна двойка, две единицы: 111221
три единицы, две двойки, одна единица: 312211

Каждая строка описывает предыдущую.

11 говорит «одна единица» и описывает 1.
21 говорит «две единицы» и описывает 11.
1211 говорит «одна двойка, одна единица» и описывает 21.
111221 говорит «одна единица, одна двойка, две единицы» и описывает 1211.
312211 говорит «три единицы, две двойки, одна единица» и описывает 111221.

Так что следующий член последовательности имеет вид 13112221 и описывает 312211. Можно продолжить последовательность следующим образом:

1
11
21
1211
111221
312211
13112221
1113213211
31131211131221
…

Не хотел бы и дальше лишать вас удовольствия исследовать территорию, которую открыл Джон Конвей с помощью аудиоактивной[2] последовательности. Поэтому закончу своим собственным небольшим изысканием. Начнём с произвольного символа и будем рекурсивно описывать описания:

*
1*
111*
311*
13211*
111312211*

[2] Этот термин Конвея образован по аналогии с «радиоактивностью» и означает, что строение последовательности обнаруживается при её громком произнесении. — *Прим. перев.*

31131122211*
1321132132211*
…

Вы заметите интересную закономерность, что каждый раз третья строка после данной является (почти) её продолжением. В действительности если начать с символа 3, то продолжения будут точными:

3
13
1113
3113
132113
1113122113
311311222113
13211321322113
…

Это значит, что можно построить такие три бесконечные последовательности A, B и C (см. рис. 6), что

B описывает A,
C описывает B,
A описывает C!
A = 11131221131211132221…
B = 3113112221131112311332…
C = 1321132132211331121321232…

Получились три последовательности, каждая из которых описывает следующую по кругу, и все возникают из описания символа 3.

A = 11131221131211132221…
B = 3113112221131112311332…
C = 1321132132211331121321232…

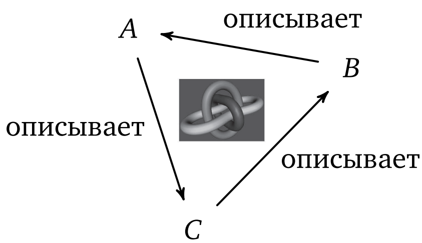


Рис. 6. Описание тройки

В этой загадке и этом примере мы видим замечательную мощь рекурсивного описания — целые миры возникают, казалось бы, совсем из ничего.

Отметим, что 22 описывает себя. Это единственная последовательность с таким свойством в этом языке.

То, как 22 производит себя, я могу сравнить с машиной Джона фон Неймана B [14], которая может себя построить[3]. Универсальная машина B была «универсальным строителем». Дайте ей описание x, и B построит объект X с таким описанием. Так что можно написать

$$B, x \longrightarrow X, x.$$

Машина B использует описание x, чтобы построить X. Результатом является X вместе с его описанием x. Фантастика: машина B может построить себя. Просто дайте ей её собственное описание, и тогда

$$B, b \longrightarrow B, b,$$

т. е. B создаёт свою копию.

Пусть стрелка

$$nx \longrightarrow xxx \cdots x \ (n \text{ раз } x)$$

«ничего больше не описывает» и создаёт строку с описанием nx. Это аналог того, что делает машина фон Неймана, и nx — описание результата. Тогда $2x \longrightarrow xx$, и мы видим, что строка $22 \longrightarrow 22$ создаёт свою копию. Разумеется, это частный случай схемы фон Неймана. Его самосозидающая машина — это почти философская идея: «Строит себя по своему собственному описанию». Но мы видим, что такая идея может появиться в простых описаниях «обычных строк» — таких, как мы с вами, а также аудиоактивное 22 Джона Хортона Конвея.

Список литературы

[1] *Alexander J. W.* Topological invariants of knots and links // Trans. Amer. Math. Soc. 1928. Vol. 30, iss. 2. P. 275–306.

[2] *Atiyah M. F.* The Geometry and Physics of Knots. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. (Lezioni Lincee. [Lincei Lectures]).

[3] *Bar-Natan D.* On Khovanov's categorification of the Jones polynomial // Algebraic and Geometric Topology. 2002. Vol. 2. P. 337–370.

[3] В подлиннике присутствует фраза: «Descriptions were called „blueprints“ in those days». В переводе употребляется термин «описание». — *Прим. перев.*

[4] *Conway J. H.* An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties // Computational Problems in Abstract Algebra. Oxford: Pergamon, 1970. P. 329–358.

[5] *Conway J. H.* The weird and wonderful chemistry of audoactive decay // Open Problems in Communication and Computation / Ed. by T. M. Cover and B. Gopinath. Springer-Verlag, 1987. P. 173–188.

[6] *Freyd P., Yetter D., Hoste J., Lickorish W. B. R., Millett K., Ocneanu A.* A New Polynomial Invariant of Knots and Links // Bull. Amer. Math. Soc. 1985. Vol. 12, № 2. P. 239–246.

[7] *Jones V. F. R.* A polynomial invariant of links via von Neumann algebras // Bull. Amer. Math. Soc. 1985. № 12. P. 103–111.

[8] *Kauffman L. H.* The Conway polynomial // Topology. 1980. Vol. 20, № 1. P. 101–108.

[9] *Kauffman L. H.* Formal Knot Theory. Princeton University Press, 1983. (Mathematical Notes; Vol. 30).

[10] *Kauffman L. H.* State Models and the Jones Polynomial // Topology. 1987. Vol. 26. P. 395–407.

[11] *Kauffman L. H.* New invariants in the theory of knots // Amer. Math. Monthly. 1988. Vol. 95, № 3. P. 195–242.

[12] *Khovanov M.* A categorification of the Jones polynomial // Duke Math. J. 2000. Vol. 101, № 3. P. 359–426.

[13] *Kronheimer P. B., Mrowka T. S.* Khovanov homology is an unknot-detector // Publ. Math. de l'IHES. 2011. № 113. P. 97–208.

[14] *Neumann J. von, Burks A. W.* Theory of Self-Reproducing Automata, University of Illinois Press, 1966.

[15] *Przytycki J., Traczyk P.* Conway Algebras and Skein Equivalence of Links // Proc. Amer. Math. Soc. 1987. Vol. 100. P. 744–748.

[16] *Witten E.* Quantum field Theory and the Jones PolynomialЁ // Commun. Math. Phys. 1989. Vol. 121. P. 351–399.

Луис Хирш Кауффман, Иллинойсский университет (Чикаго)

`kauffman@uic.edu, loukau@gmail.com`