
Алгебра и теория чисел

О работе А. Р. Исмаилова «Углы в плоскости над конечным простым полем»

А. Я. Канель-Белов

В работе с математически одарёнными школьниками превалирует решение задач. Олимпиады представляют собой соревнования по решению задач, летние конференции Турнира Городов, а также проектные смены в «Сириусе» являются переходной формой от олимпиад к научному творчеству. Вместе с тем математика не сводится к решению задач — важное значение имеет воспитание *теоретического мышления*. Теоретическое мышление необходимо и для решения задач, особенно трудных, в том числе и олимпиадных. И недостаток теоретического мышления сказывается не только на общей культуре, но и на самой олимпиадной подготовке.

В воспитании теоретического мышления одним из аспектов служит работа с *параллельными мирами*. Есть комплексные числа $a+bi$, $i^2=-1$ и тригонометрические функции, с ними связанные, есть *гиперболические числа* $a+bj$, $j^2=+1$ и гиперболические функции, с ними связанные. Есть скалярное произведение $x_1x_2+y_1y_2$, а есть и *псевдоскалярное* $x_1x_2-y_1y_2$. На сфере есть соответствие полюс-экватор, связанное со скалярным произведением: вектор, направленный из начала координат на полюс, перпендикулярен плоскости экватора. С псевдоскалярным произведением связан *поляритет* или *полярное соответствие*. Имеются аналогии между сферической и неевклидовой геометриями (неевклидова плоскость как сфера «много радиуса»). Помимо мира веще-

ственных чисел, с которым связана обычная геометрия, есть p -адический мир, а также мир остатков по модулю p . Эта тема затронута в статье Ковальджи А. К., Канель-Белов А. Я. «Занятия по математике — листки и диалог» («Математическое просвещение», сер. 3, вып. 19, М.: МЦНМО, 2015, с. 206–233). См. также Яглом И. М. «Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия», М.: Наука, 1969.

Примечательно, что идея «параллельных миров» и построения параллельной геометрии появилась у школьника. И она имеет методическое значение. Некоторые конструкции, например конструкция прямой, переносятся непосредственно. С понятием угла, однако, возникает проблема, поскольку, например, мультипликативная группа остатков по модулю p (или p^2) имеет порядок, взаимно простой с p , так что углы лежат в другом мире. Школьник пытается с этим разобраться, и определённые результаты в этом направлении у него есть, хотя отметим, что взаимосвязь между разными мирами до сих пор не вполне понята.