О неевклидовой теореме Фейербаха

Г. Галяпин, Т. Карягин, Г. Шарафетдинова

Введение от П. В. Бибикова

Неевклидова геометрия была и остаётся для меня особой областью математики. Именно с неё начался мой путь в мире математики, и именно по неевклидовой геометрии мной были опубликованы первые статьи, а также были высказаны некоторые гипотезы, связанные с обобщением классических конструкций из геометрии Евклида на неевклидову геометрию. Самыми значимыми были гипотезы об аналогах прямой Эйлера и теореме Фейербаха для треугольников из геометрии Лобачевского. Звучали эти гипотезы настолько необычно, что мне было страшно даже подумать о том, чтобы пытаться их доказывать. Так, аналог теоремы Фейербаха в неевклидовой геометрии звучал следующим образом.

Теорема 1 (теорема Фейербаха в геометрии Лобачевского). *Пусть AW_a, BW_b и CW_c — отрезки, делящие площадь неевклидова треугольника ABC пополам. Тогда описанная окружность треугольника $W_aW_bW_c$ касается вписанной окружности треугольника ABC.*

К счастью, нашлись более смелые люди. Спустя всего год с момента публикации этих гипотез А. Акопян нашёл доказательство гипотезы об аналоге теоремы Фейербаха, попутно предложив ещё один аналог неевклидовой прямой Эйлера (см. [1]).

Недавно, пересматривая материалы для подготовки сборной России к Международной математической олимпиаде, в видео [2] я обратил внимание на задачу 5 из этих материалов. Условие этой задачи звучит так (обозначения ниже отличаются от исходных).

Задача (Задача 5). Через вершины B и C треугольника ABC проведена окружность Ω, вторично пересекающая продолжения сторон AB и AC в точках B_1 и C_1 соответственно. Окружность ω касается сторон AB и AC в точках K и L соответственно, а также касается внешним

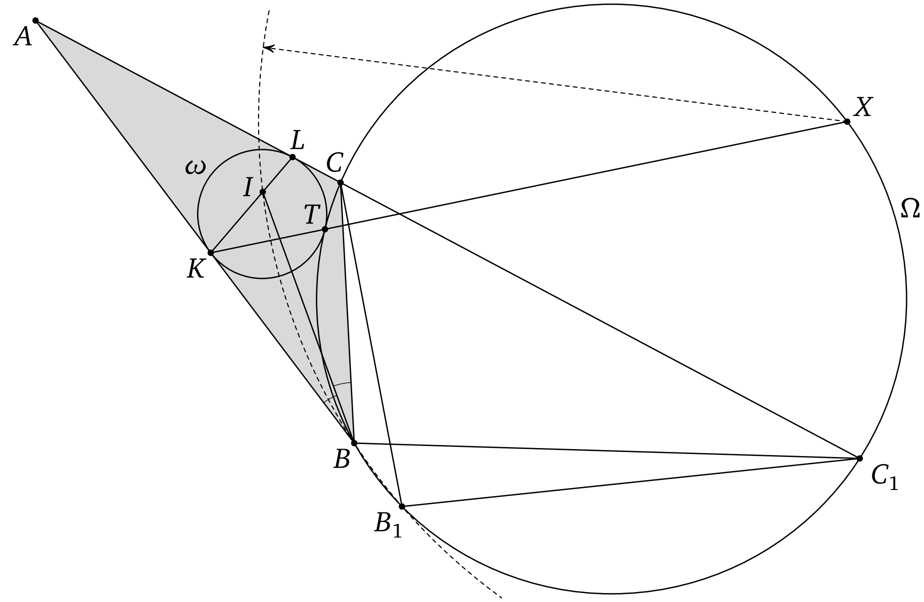


Рис. 1

образом окружности Ω в точке T. Биссектриса угла ABC пересекает отрезок KL в точке I. Прямая LT вторично пересекает окружность Ω в точке X. Докажите, что X — центр описанной окружности треугольника BB_1I (рис. 1).

Невероятно, как далеко вперёд шагнула математика, если подобные задачи предлагаются сейчас для подготовки школьников (правда, речь идёт о сильнейших школьниках страны, но всё же)! Но ещё более невероятно то, что эта задача при небольшой модификации превращается в ту самую неевклидову теорему Фейербаха, формулировка которой приведена выше!

В результате неевклидова теорема Фейербаха (в терминах евклидовой геометрии, разумеется) была предложена на июньских тренировочных сборах членам сборной команды России на Международную математическую олимпиаду 2022 г. И доказательство было найдено! Автором доказательства является Галия Шарафетдинова, впоследствии показавшая абсолютный результат на Международной математической олимпиаде (что нашим школьникам долгое время не удавалось…), и первая часть данной статьи посвящена этому доказательству.

П. А. Кожевников также рассказал мне, что И. И. Богданов нашёл другое доказательство неевклидовой теоремы Фейербаха, сведя её к так называемой лемме о сегменте. Это замечание показалось мне любопытным, и я предложил попытаться доказать теорему Фейербаха с помощью этого соображения двум своим ученикам, Георгию Галяпину и Тимофею Карягину. И они смогли найти это доказательство, попутно предложив новое доказательство самой леммы о сегменте, использующее модное в последнее время проективное движение точек. (Поскольку эта техника требует для своего применения существенного количества вспомогательной теории, в тексте статьи приводится доказательство в рамках классических методов, но и оно ранее мне не встречалось.)

В данной статье представлены оба этих пути от формулировки неевклидовой теоремы Фейербаха до полного её доказательства. Сначала будут приведены необходимые факты из геометрии Лобачевского, из которых станет понятно, каким образом можно *догадаться* до формулировки неевклидовой теоремы Фейербаха, если заранее её не знать (интересно отметить, что А. Акопян в своём доказательстве шёл совершенно иным путём). Далее будут изложены оба пути к доказательству: один — Галии Шарафетдиновой, другой — Георгия Галяпина и Тимофея Карягина. Первый путь включает в себя переформулировку неевклидовой теоремы Фейербаха в терминах евклидовой геометрии, лемму Саваямы и её применение для доказательства теорем Фейербаха сначала в евклидовой геометрии, а затем и в неевклидовой. Второй путь основан на лемме о сегменте и также содержит доказательства обеих теорем Фейербаха, опирающихся на эту лемму (эти два доказательства оказываются очень похожими друг на друга и лишний раз подчёркивают связь теорем Фейербаха в двух геометриях).

§ 1. Общие факты из геометрии Лобачевского

Мы начнём с того, что напомним об основных конструкциях из геометрии Лобачевского. Будем использовать *модель Пуанкаре в круге*. Иначе говоря, различные объекты неевклидовой геометрии (точки, прямые, окружности…) мы проинтерпретируем с помощью этой модели в терминах евклидовой геометрии, что даст нам возможность использовать для доказательства неевклидовых теорем факты из геометрии Евклида (подробные сведения о моделях геометрии Лобачевского см. в [3]).

Итак, *плоскостью Лобачевского* будем называть внутренность некоторого круга. Границу этого круга будем называть *абсолютом*. *Точками* в геометрии Лобачевского будут обычные точки, лежащие внутри круга, а *прямыми* — диаметры круга и дуги окружностей, ортогональные абсолюту (рис. 2 *а*). В дальнейшем нам потребуется следующий

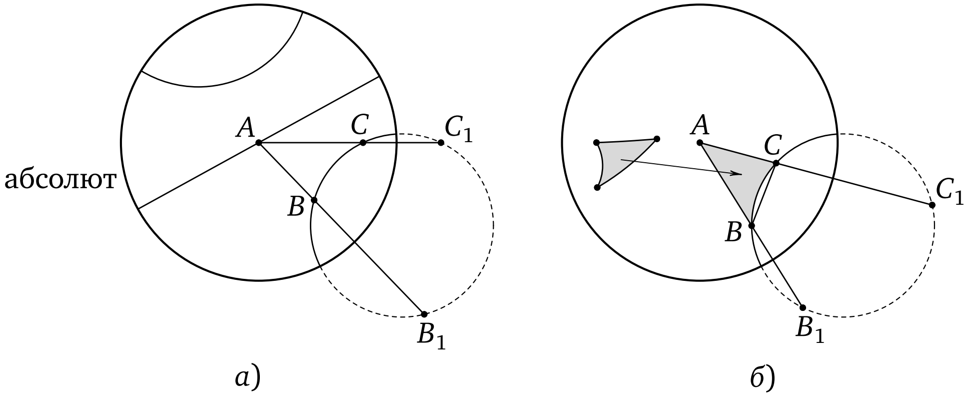


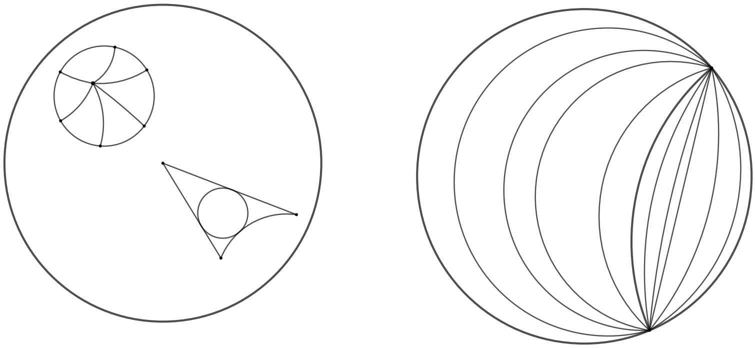
Рис. 2

факт про ортогональные окружности. Если взять окружность, дуга которой является неевклидовой прямой, проходящей через точки B и C, то эта окружность также проходит через точки B_1 и C_1, симметричные точкам B и C относительно абсолюта (т. е. точки B_1 и C_1 являются образами точек B и C при инверсии относительно абсолюта; подробнее о свойствах инверсии см. [4]).

Давайте попробуем нарисовать неевклидов треугольник ABC в модели Пуанкаре наиболее простым образом. Понятно, что для нас диаметры окружности проще, чем дуги, ортогональные абсолюту, поэтому хотелось бы сделать как можно больше сторон треугольника состоящими из отрезков, лежащих на диаметрах. Для этого поместим одну из вершин треугольника (мы обозначаем её через A) в центр круга. Тогда мы увидим следующую картинку (рис. 2 *б*).

Видно, что так расположенный неевклидов треугольник очень похож на стартовую конфигурацию из задачи 5. И мы уже начинаем понимать связь этой задачи с неевклидовой геометрией. Теперь нужно разобраться с тем, что собой представляют окружности в модели Пуанкаре. Так, окружность ω из задачи 5 естественно считать вписанной окружностью неевклидова треугольника ABC в модели Пуанкаре.

Оказывается, в модели Пуанкаре *неевклидова окружность* (т. е. множество всех точек, равноудалённых от данной) по форме совпадает с обычной евклидовой окружностью. Проще всего это можно понять так. Рассмотрим неевклидову окружность с центром в центре абсолюта. В таком случае очевидно, что эта окружность является обычной евклидовой окружностью. А перенос этой окружности в другое место на плоскости Лобачевского можно осуществить с помощью осевой симметрии, которая с евклидовой точки зрения является инверсией



а) *б*)

Рис. 3

относительно окружности, ортогональной абсолюту. Поскольку инверсия переводит окружности в окружности, неевклидова окружность всегда совпадает по форме с евклидовой (рис. 3 *а*).

Возникает естественный вопрос: чем, с точки зрения геометрии Лобачевского, являются евклидовы окружности, пересекающие абсолют (рис. 3 *б*)? Соответствующие кривые в неевклидовой геометрии называются *эквидистантами*, и их геометрический смысл таков: каждая точка эквидистанты удалена от некоторой неевклидовой прямой на одно и то же расстояние. Иначе говоря, эквидистанта — это аналог прямой, параллельной данной, в геометрии Лобачевского. Отметим, что хорды абсолюта также являются эквидистантами.

Сделаем ещё одно замечание касательно неевклидова треугольника с вершиной в центре абсолюта. Если мы соединим точки B и C обычным евклидовым отрезком, то мы увидим, что неевклидов треугольник ABC лежит внутри евклидова треугольника с теми же вершинами (рис. 2 *б*). Отсюда сразу следует, что сумма углов неевклидова треугольника ABC меньше π. Этот, казалось бы, незначительный факт влечёт серьёзные отличия между мирами Евклида и Лобачевского. Одно из таких отличий проявляется при определении *площади неевклидовых треугольников*.

Площадь треугольника с углами α, β и γ в геометрии Лобачевского равна $\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$. Здесь необходимо сделать несколько пояснений.

Во-первых, величина $\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$, также называемая *дефектом треугольника*, действительно удовлетворяет привычным нам аксиомам площади: она положительна, одинакова для равных треугольников, и, если треугольник разбить на два, сумма дефектов частей равна дефекту исходного треугольника. Можно показать, что существует ровно одна функция на множестве неевклидовых треугольников, удовлетворяющая этим аксиомам площади, так что площадь неевклидова треугольника действительно равна дефекту.

Во-вторых, видно, что у двух треугольников с попарно равными углами будут одинаковые площади. Это противоречит привычному нам из евклидовой геометрии первому признаку подобия треугольников: треугольники с равными углами лишь подобны, а потому их площади могут отличаться как угодно. Однако в геометрии Лобачевского имеет место *четвёртый признак равенства треугольников*: треугольники равны по трём углам. Таким образом, углы и длины отрезков в геометрии Лобачевского становятся равноправными величинами, и происходит это в каком-то смысле благодаря доказанному нами выше утверждению о сумме углов неевклидова треугольника.

Замечание 1. Есть ещё несколько объяснений такой странной двойственности между мерами углов и длинами отрезков. Во-первых, в геометрии Лобачевского существует так называемая *функция параллельности*, которая связывает градусную меру угла и длину отрезка. В отличие от геометрии Евклида, для этого не требуется треугольник и какой-либо аналог теоремы косинусов, а требуется лишь пара параллельных прямых и перпендикуляр, опущенный на одну из прямых из точки на другой прямой. Во-вторых, если вспомнить *сферическую геометрию*, в ней длины сторон треугольника и градусные меры его углов измерялись в радианах, а наличие конструкций типа *полярного трёхгранного угла* позволяет «менять местами» углы и стороны сферических треугольников. Геометрия Лобачевского тоже в некотором смысле является сферической, только соответствует сфере радиусом $\sqrt{-1}$. Тем не менее, аналог полярного соответствия есть и в ней. Этот аналог также подчёркивает равноправие мер углов и длин отрезков.

Теперь мы готовы к тому, чтобы определить второй ключевой объект в формулировке неевклидовой теоремы Фейербаха: отрезок, проходящий через вершины треугольника и делящий его площадь пополам. Такой отрезок является аналогом медианы треугольника в неевклидовой геометрии, поскольку в геометрии Евклида именно медиана делит площадь треугольника пополам. Однако в геометрии Лобачевского это не так, и отрезок, делящий площадь пополам (мы будем называть его *биссектором*), отличается от медианы.

Чтобы увидеть этот отрезок, вновь рассмотрим неевклидов треугольник ABC с вершиной A в центре абсолюта и отметим точку B_1, симметричную B относительно абсолюта.

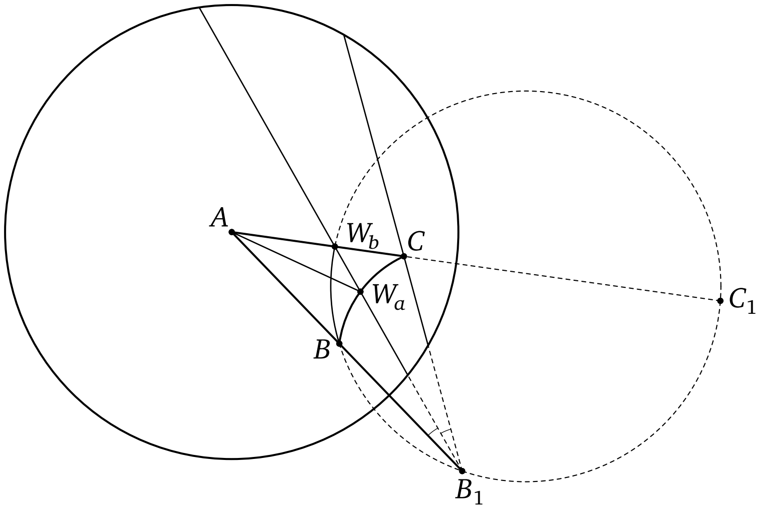


Рис. 4

Проведём биссектрису угла AB_1C и обозначим через W_a и W_b точки её пересечения с неевклидовыми прямыми BC и AC. Утверждается, что неевклидовы отрезки AW_a и BW_b являются биссекторами для треугольника ABC, т. е. делят площадь этого треугольника пополам (рис. 4). Чтобы доказать это, нам потребуется следующая замечательная теорема, которая называется теоремой Лекселя.

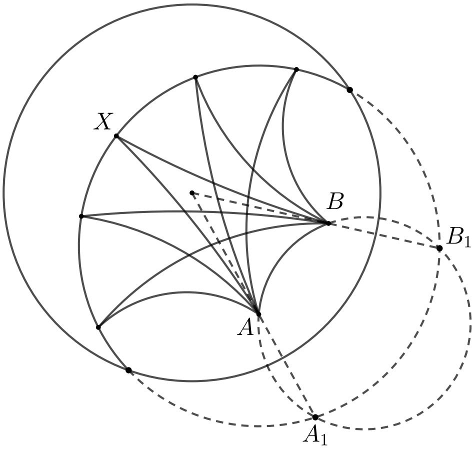
Теорема 2 (Лексель). *Пусть точки A_1 и B_1 инверсны точкам A и B относительно абсолюта. Пусть ω — некоторая евклидова окружность, проходящая через точки A_1 и B_1. Тогда для любой точки X, лежащей на окружности ω, площадь неевклидова треугольника XAB будет постоянной, т. е. не будет зависеть от точки X* (рис. 5 *а*).

Иначе говоря, множество точек, лежащих в одной полуплоскости относительно неевклидовой прямой AB и образующих с отрезком AB треугольники фиксированной площади, есть эквидистанта.

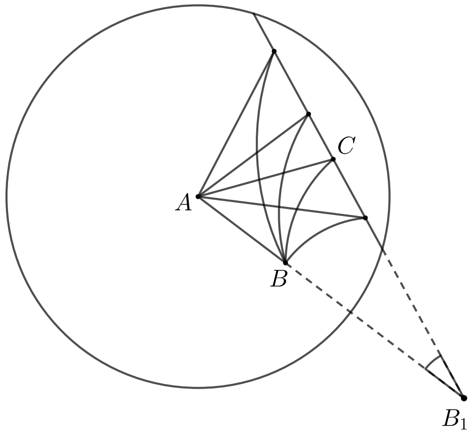
У этой теоремы также есть важное уточнение, соответствующее ситуации, когда точка A_1 является бесконечно удалённой (т. е. когда точка A совпадает с центром абсолюта).

Теорема 3. *Пусть ABC — неевклидов треугольник, вершина A которого совпадает с центром абсолюта, и пусть точка B_1 симметрична точке B относительно абсолюта. Тогда площадь неевклидова треугольника ABC равна $2\angle AB_1C$* (рис. 5 *б*).

Доказательства этих теорем можно найти в [5]. Также в статье [5] приведено красивое геометрическое доказательство того, что три бис-



а)



б)

Рис. 5

сектора треугольника пересекаются в одной точке (аналитическое доказательство приведено в [6]). Отметим также, что такое яркое применение классических фактов евклидовой геометрии для доказательства утверждений из геометрии Лобачевского не является «односторонним»: иногда, наоборот, геометрия Лобачевского помогает доказывать некоторые евклидовы утверждения, трактуя их в терминах подходящей модели неевклидовой геометрии. Примеры таких ситуаций можно найти в [7, 8].

Именно теорема Лекселя объясняет, почему биссекторы в геометрии Лобачевского правильно рассматривать как аналоги медиан в геометрии Евклида. С одной стороны, у этих объектов есть общее свойство — они делят площадь треугольника пополам. С другом стороны, в геометрии Лобачевского биссекторы имеют понятное геометрическое описание, которое можно использовать при решении задач. В качестве примера напомним всё ещё открытую гипотезу об аналоге прямой Эйлера в геометрии Лобачевского.

Гипотеза. *В неевклидовом треугольнике точка пересечения медиан, точка пересечения высот и центр окружности Эйлера лежат на одной прямой.*

Настало время переформулировать неевклидову теорему Фейербаха с помощью теорем 2 и 3 на евклидов язык. Для этого рассмотрим неевклидов треугольник ABC, вершина A которого лежит в центре абсолюта. Отметим точки B_1 и C_1, симметричные точкам B и C отно-

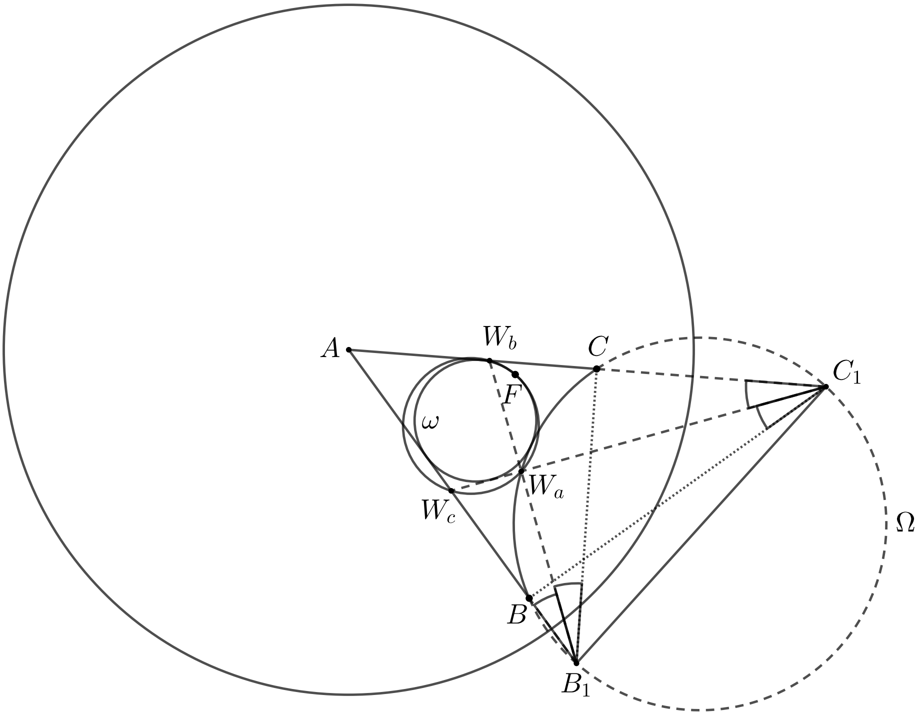


Рис. 6

сительно абсолюта, и проведём биссектрисы углов AB_1C и AC_1B. Эти биссектрисы (являющиеся с точки зрения геометрии Лобачевского эквидистантами) пересекают дугу BC в её середине W_a, а стороны AC и AB — в точках W_b и W_c. Из теоремы 3 следует, что точки W_a, W_b и W_c являются основаниями биссекторов треугольника ABC. Окружность, проходящую через эти точки, будем называть *окружностью Эйлера* неевклидова треугольника ABC (рис. 6).

Итак, все составляющие неевклидовой теоремы Фейербаха определены. Остаётся сформулировать эту теорему на евклидовом языке. Делается это следующим образом.

Через вершины B и C треугольника ABC проведена окружность Ω, вторично пересекающая стороны AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Окружность ω касается сторон AB и AC в точках L и K соответственно, а также касается внешним образом окружности Ω. Биссектрисы углов AB_1C и AC_1B пересекаются в точке W_a и пересекают стороны AC и AB в точках W_b и W_c. Докажите, что окружность, проходящая через точки W_a, W_b и W_c, касается окружности ω (рис. 6).

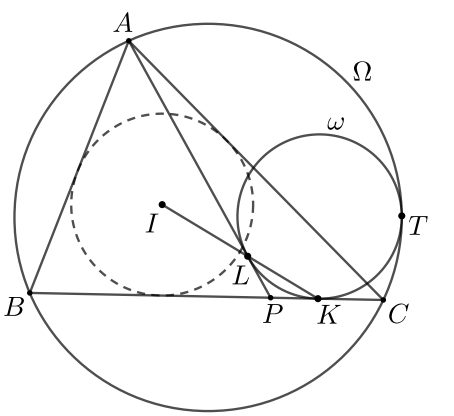
Именно это утверждение мы и будем доказывать. Но для этого нам потребуется мощный инструмент, часто используемый в сложных конструкциях для доказательства касания окружностей. Речь идёт о *лемме Саваямы*.

§ 2. Лемма Саваямы и евклидова теорема Фейербаха

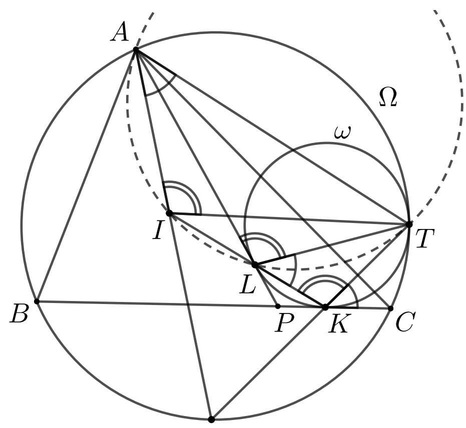
Лемма Саваямы считается «тяжёлой артиллерией» в олимпиадной геометрии. Именно она будет нашим основным орудием в доказательстве неевклидовой теоремы Фейербаха. Начнём с того, что сформулируем и докажем эту лемму (которую, учитывая уровень сложности, мы всё же назовём теоремой).

Теорема 4 (лемма Саваямы). *Пусть треугольник ABC вписан в окружность Ω. На прямой BC отмечена произвольная точка P. Окружность ω касается отрезка AP в точке L, прямой BC в точке K и окружности Ω внутренним образом. Тогда прямая KL проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC* (рис. 7 *а*).

Доказательство. Основная идея доказательства леммы Саваямы — применение известной теоремы о трезубце. Проведём биссектрису угла BAC, и пусть она пересекает окружность Ω в точке W. Пусть I — точка пересечения прямой KL и этой биссектрисы. Наша цель — доказать, что I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Из теоремы о трезубце следует, что для этого достаточно доказать равенство отрезков WI и WC. Именно этим мы и займёмся.



а)



б)

Рис. 7

Заметим, что если T — точка касания окружностей Ω и ω, то точки T, K и W лежат на одной прямой согласно лемме Архимеда. Заметим также, что угол WAT равен половине дуги WT, а угол TKC равен полусумме дуг WC и WB. Но $\smile{WB} = \smile{WC}$, так как точка W — середина дуги BC. Значит, оба угла WAT и TKC равны половине дуги WT. Кроме того, по теореме об угле между касательной и хордой $\angle TKC = \angle TLK$. Таким образом, $\angle WAT = \angle TLK$ и четырёхугольник $AILT$ является вписанным (рис. 7 *б*).

Отсюда, в свою очередь, следует равенство углов AIT и ALT. А раз так, то равны и смежные с ними углы WIT и TLP. Ещё раз применяя теорему об угле между касательной и хордой, получаем равенство углов TLP и WKL. Таким образом, $\angle WIT = \angle WKL$.

Из равенства углов WIT и WKL следует, что треугольники WKI и WIT подобны по двум углам. Отсюда мы получаем соотношение между длинами сторон этих треугольников: $WI : WK = WT : WI$. Оно переписывается в виде $WI^2 = WK \cdot WT$. Осталось заметить, что треугольники WKC и WCT также подобны по двум углам (докажите это самостоятельно), откуда получается аналогичное соотношение $WC^2 = WK \cdot WT$.

Итак, мы получили цепочку равенств $WI^2 = WK \cdot WT = WC^2$, откуда и следует искомое равенство $WI = WC$. Применяя теорему о трезубце, получаем, что точка I действительно является центром вписанной окружности треугольника ABC, что и требовалось доказать. □

Отметим, что лемма Саваямы допускает различные обобщения. Например, точка P может выбираться не только на стороне BC, но и на её продолжении; окружность ω может касаться не только отрезка AP, но и прямой AP; касание с окружностью Ω может быть не только внутренним, но и внешним. В зависимости от конфигурации прямая KL может проходить или через центр вписанной окружности треугольника, или через центр вневписанной окружности треугольника, причём вершины треугольника — это точки B, C и одна из точек пересечения окружности Ω с прямой AP. Рисунок 8 демонстрирует различие таких конфигураций.

Несложно понять, что верна и обратная лемма Саваямы.

Теорема 5 (обратная лемма Саваямы). *Пусть треугольник ABC вписан в окружность Ω. На прямой BC отмечена произвольная точка P. Окружность ω касается отрезка AP в точке L и прямой BC в точке K, причём прямая KL проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC. Тогда окружности ω и Ω касаются внутренним образом.*

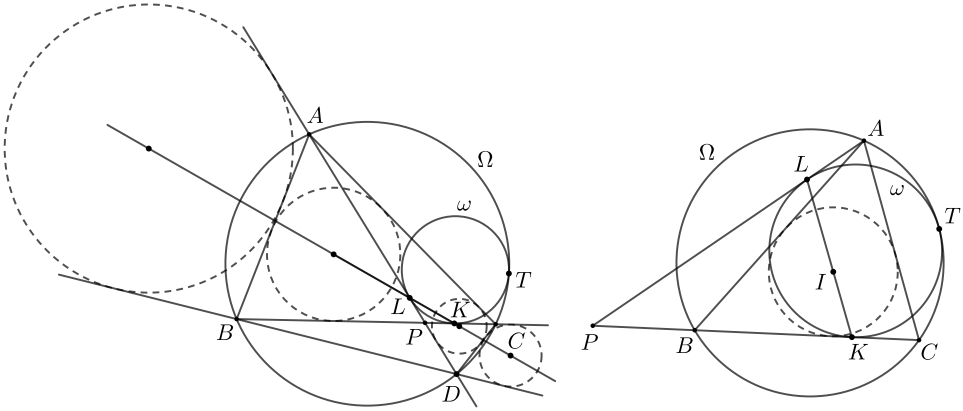


Рис. 8

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно и окружности ω и Ω не касаются. Тогда рассмотрим окружность ω', которая касается отрезка BP в точке L', прямой BC в точке K' и окружности Ω внутренним образом (несложно понять, что такая окружность существует, — например, гомотетично раздувая или сжимая окружность ω с центром в точке P). Тогда прямая $K'L'$ проходит через центр I вписанной окружности треугольника ABC по лемме Саваямы. Однако прямые KL и $K'L'$ параллельны, поскольку обе они перпендикулярны биссектрисе угла APC. С другой стороны, обе прямые KL и $K'L'$ проходят через точку I. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Именно обратная лемма Саваямы позволяет доказать евклидову теорему Фейербаха, и она же поможет доказать её неевклидов аналог. Напомним сейчас доказательство евклидовой версии, после чего обратимся к теореме Фейербаха на плоскости Лобачевского.

Теорема 6 (евклидова теорема Фейербаха). *Окружность девяти точек треугольника ABC касается его вписанной и всех трёх вневписанных окружностей.*

Доказательство. Середины сторон BC, AC, AB треугольника ABC обозначим через M_a, M_b, M_c, а основания высот, опущенных на эти стороны, — через H_a, H_b, H_c соответственно (рис. 9).

Пусть I_a — центр вписанной окружности треугольника $H_aH_cM_a$. Заметим, что треугольник H_cM_aC — равнобедренный, поэтому биссектриса угла H_cM_aC совпадает с серединным перпендикуляром к отрезку CH_c, т. е. со средней линией M_aM_b. Из леммы о трезубце следует, что $M_bJ_a = M_bI_a = M_bH_c = M_bH_a$. Следовательно, точка I_a является

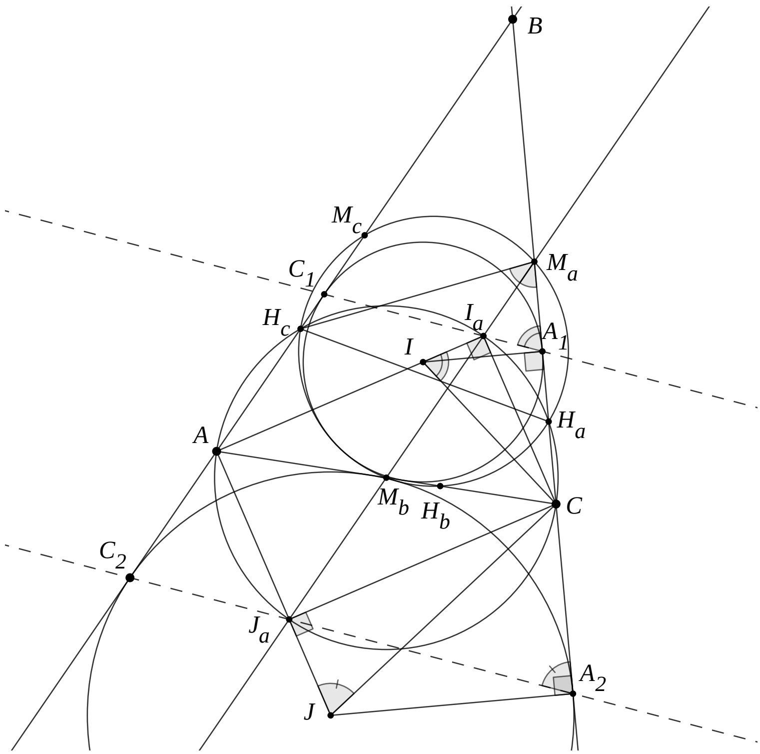


Рис. 9

серединой дуги H_cH_a окружности (ACH_cH_a), т. е. прямая AI_a является внутренней биссектрисой угла BAC. Обозначим центр вписанной окружности треугольника ABC через I, а точки её касания со сторонами AB и BC — через C_1 и A_1 соответственно.

По задаче 255 (см. [9]) точка I_a лежит на прямой A_1C_1, а точка J_a лежит на A_2C_2. По лемме Саваямы точка I_a лежит на прямой, соединяющей точки касания с прямыми AB и BC окружности, касающейся окружности девяти точек треугольника ABC. Поскольку направление таких прямых фиксировано и совпадает с перпендикулярным к биссектрисе угла ABC, это и есть прямая A_1C_1. Следовательно, вписанная окружность треугольника ABC касается его окружности девяти точек, что и требовалось доказать. □

§ 3. Доказательство неевклидовой теоремы Фейербаха

Теперь мы готовы к доказательству неевклидовой теоремы Фейербаха. Но прежде чем приступать к нему, решим задачу 5 (см. с. 166) из материалов для подготовки кандидатов в сборную России.

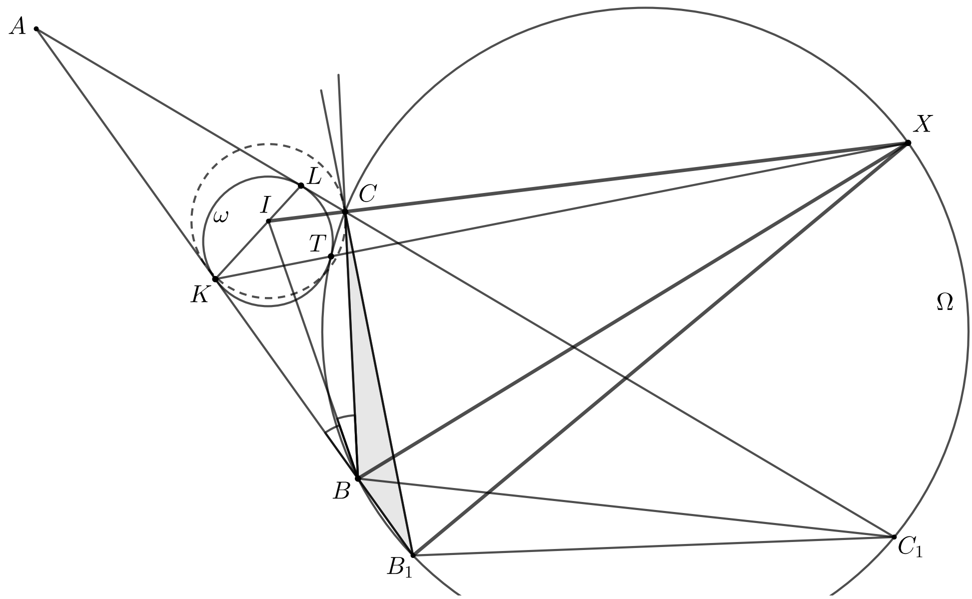


Рис. 10

Решение задачи 5. Прежде всего заметим, что точка X — середина дуги BB_1 по лемме Архимеда (здесь она применяется для случая внешнего касания окружностей). Поэтому $XB = XB_1$. Остаётся доказать, что оба этих отрезка равны XI. Для этого докажем, что точка I — центр B_1-вневписанной окружности треугольника BCB_1 (рис. 10). В самом деле, точка I лежит на биссектрисе внешнего угла при вершине B этого треугольника, а также на прямой KL, соединяющей точки касания окружности ω с прямой BB_1 и чевианой CA (и вновь чевиана проводится вне треугольника!). Поэтому точка I является центром B_1-вневписанной окружности треугольника BCB_1, и по теореме о трезубце $XI = XB = XB_1$, что и требовалось доказать. $\square$

Наконец, докажем неевклидову теорему Фейербаха.

Доказательство неевклидовой теоремы Фейербаха. Пусть точки I_b и I_c — центры вневписанных окружностей треугольников C_1BB_1 и B_1CC_1 напротив вершин B и C соответственно (рис. 11). Тогда эти точки лежат на биссектрисах BW_a и CW_a. При этом, поскольку W_a — середина дуги B_1C_1, то по лемме о трезубце точки I_b и I_c лежат на окружности Γ с центром в точке W_a и радиусом $R = W_aB_1 = W_aC_1$. Применяя лемму Саваямы для прямых BC_1 и CB_1, окружности Ω и касающейся этих прямых и окружности (в точках L, K, W_a соответственно) окружности ω, получаем, что точки I_b и I_c лежат на прямой KL.

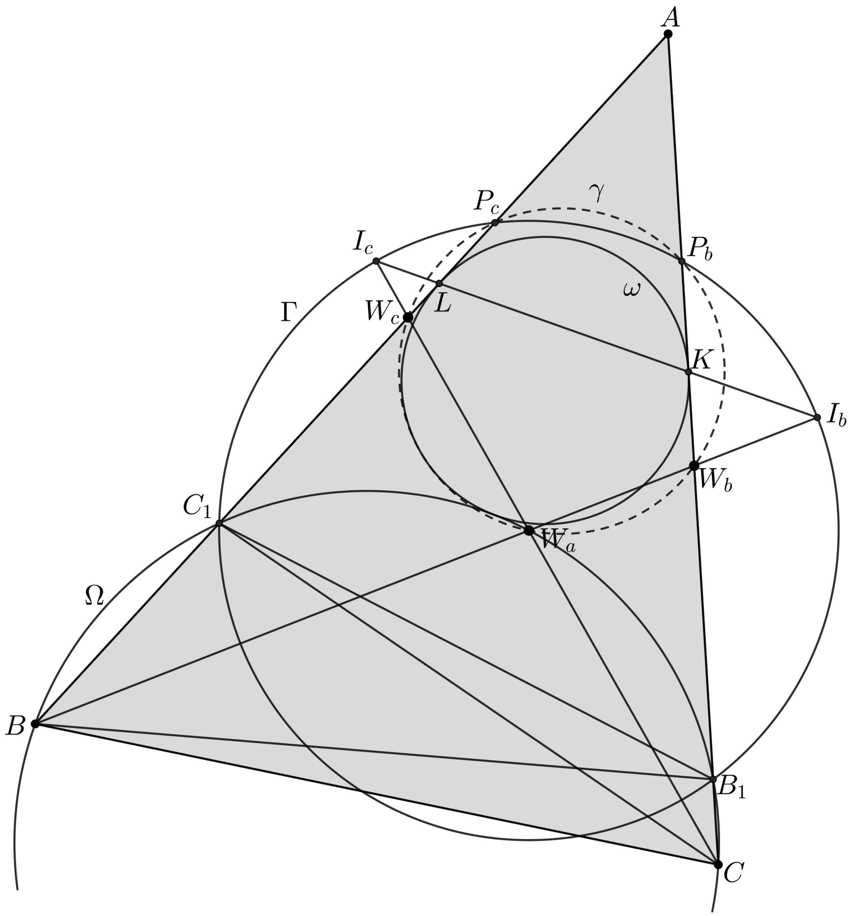


Рис. 11

Построим точку P_c, симметричную точке B_1 относительно прямой BW_a, и точку P_b, симметричную точке C_1 относительно прямой CW_a. Точки P_c и P_b будут лежать на прямых AB и AC соответственно, а также на окружности Γ. Тогда

$$\begin{aligned}\angle(P_cW_b, W_aW_b) &= \angle(W_aW_b, W_bB_1) = \angle(BW_a, AB) + \angle(AB, AC) = \\ &= \angle(CW_a, C_1C) + \angle(AB, AC) = \angle(AC, CW_a) + \angle(AB, AC) = \\ &= \angle(AB, CW_a) = \angle(P_cW_c, W_cW_a)\end{aligned}$$

(здесь через $\angle(\ell_1, \ell_2)$ мы обозначаем направленный угол между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Следовательно, точка P_c лежит на описанной окружности γ треугольника $W_bW_aW_c$. Аналогично точка P_b также на ней лежит.

Далее, докажем, что точки I_b и I_c являются центрами вневписанных (или вписанных) окружностей треугольников $W_bP_bP_c$ и $W_cP_bP_c$ соответственно. Действительно, точка W_a — середина дуги DE окружности γ и $W_aI_b = W_aI_c = W_aD = W_aE$. Из леммы, обратной лемме Саваямы, для прямых DW_c, EW_b и окружности γ, следует, что окружность, касающаяся прямых DW_c и EW_b в точках L и K соответственно, касается γ. А единственная окружность, удовлетворяющая таким условиям, — это окружность ω. Поэтому окружность ω касается окружности γ, что и требовалось доказать. □

§ 4. Лемма о сегменте и второе доказательство

Теперь мы готовы вступить на второй путь к доказательству неевклидовой теоремы Фейербаха, основанный на ещё одном важном факте, связанном с касающимися окружностями. Этот факт называется *леммой о сегменте* и был сформулирован В. Ю. Протасовым (см. [10]). Приведённое ниже доказательство, по всей видимости, является новым.

Теорема (лемма о сегменте). *Пусть две прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке P. Окружность γ с центром J касается прямых ℓ_1 и ℓ_2. На прямых ℓ_1 и ℓ_2 выбраны точки A и B соответственно, такие, что прямая AB касается окружности γ. Пусть окружность Γ такова, что A и B принадлежат Γ и дуга AB имеет заданную градусную меру. Тогда окружность Γ касается двух окружностей, касающихся прямых ℓ_1 и ℓ_2 и не зависящих от выбора точек A и B.*

Доказательство. Пусть окружность Γ вторично пересекает прямую ℓ_2 в точке C. Рассмотрим прямую ℓ, которая параллельна прямой AC и касается окружности γ. Отметим точку H пересечения прямых ℓ и ℓ_2. Пусть также точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а точка K — точка пересечения прямых CI и PJ. Поскольку отражения точки A относительно сторон треугольника IJK лежат на прямой ℓ_2, эта прямая является прямой Штейнера точки A относительно треугольника IJK. Значит, ортоцентр треугольника IJK лежит на прямой ℓ_2. С другой стороны, так как прямые AC и ℓ параллельны, прямая HJ перпендикулярна прямой CI (как биссектрисы внутренних односторонних углов). Но тогда точка H является ортоцентром треугольника IJK и прямая HI перпендикулярна прямой PJ.

Рассмотрим окружность ω, вписанную в угол APB и касающуюся прямой PB в точке H. Тогда прямая HI проходит через точку касания окружности ω и прямой PA. Значит, по обратной лемме Саваямы окружность ω касается окружности Γ. Осталось заметить, что сама окружность ω не зависит от выбора окружности Γ, а зависит

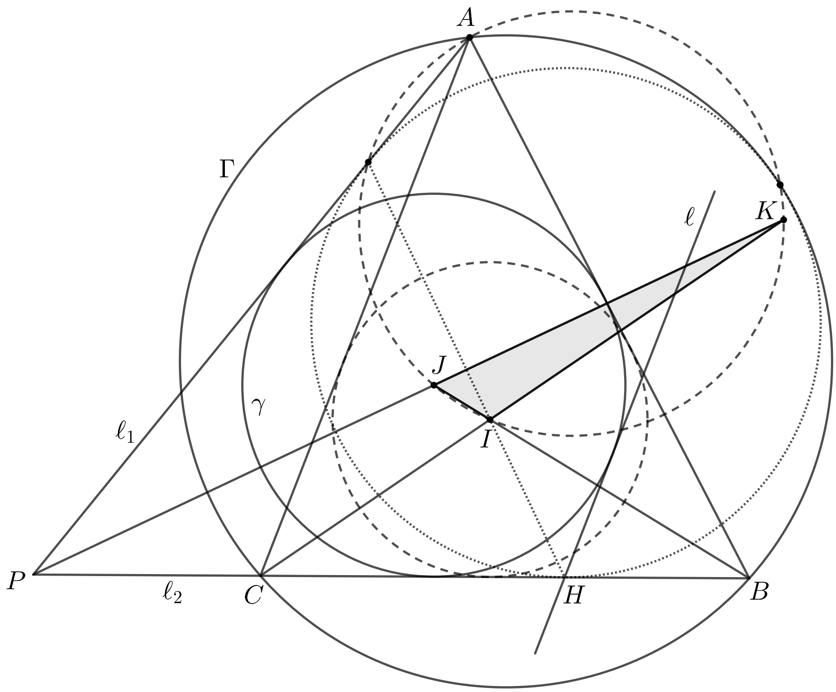


Рис. 12

только от направления прямой AC, поскольку именно направление этой прямой определяет точку H. В зависимости от выбора прямой ℓ (а таких прямых существует две), мы получаем две окружности ω_1 и ω_2, удовлетворяющие условиям теоремы. □

Замечание 2. Из леммы Саваямы также следует, что окружность (IJK) проходит через точку касания окружностей Γ и ω (рис. 12).

Посмотрим, как лемма о сегменте позволяет доказать евклидову теорему Фейербаха.

Доказательство евклидовой теоремы Фейербаха. Применим лемму о сегменте к треугольнику $M_cM_bH_b$ и окружности ω', гомотетичной вписанной окружности ω треугольника ABC с центром в A и коэффициентом $1/2$ (рис. 13). Пусть K_b — точка касания окружности ω со стороной AC. Нам достаточно доказать, что касательная из K_b к окружности ω' параллельна прямой M_cH_b. А это следует из подобия равнобедренных треугольников AM_cH_b и ALK_b, где L — точка пересечения стороны AB с касательной, проведённой из точки K_b к окружности ω'. □

Замечание 3. Как отмечалось ранее, окружность (IJK) проходит через точку касания F вписанной окружности и окружности Эйлера

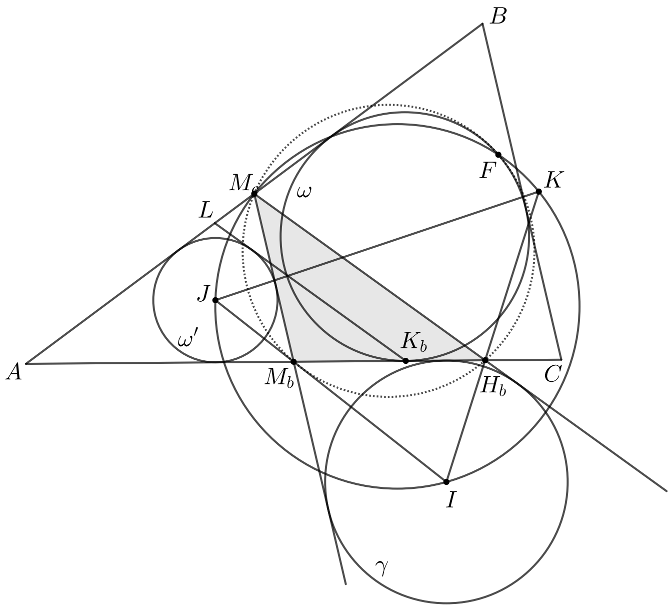


Рис. 13

треугольника ABC. Также несложно показать, что точка K является точкой Шарыгина треугольника ABC, т. е. она лежит на биссектрисе угла BAC и средней линии M_aM_c. Таким образом, мы сразу получаем, что точки K, F, K_c и M_c лежат на одной окружности.

Наконец, мы готовы ко второму доказательству неевклидовой теоремы Фейербаха.

Доказательство. Зафиксируем градусные меры углов ABB_1 и C_1CA, равные 2φ, а также положим $\angle BAC = \alpha$. Пусть ℓ — биссектриса угла BAC. Тогда $\angle ABW_b = \angle W_cCA = \varphi$, поэтому четырёхугольник BW_bW_cC является вписанным. Значит, прямые B_1C_1 и W_bW_c параллельны. Зафиксируем τ — вписанную окружность треугольника AW_bW_c — и будем вращать отрезок W_bW_c вокруг окружности τ. Поскольку

$$\frac{AW_b}{W_bB_1} = \frac{AB}{BB_1} = \frac{\sin(2\varphi + \alpha)}{\sin \alpha} = \mathrm{const},$$

прямая B_1C_1 тоже вращается вокруг некоторой фиксированной окружности, вписанной в угол BAC.

Заметим, что угол $W_cW_aW_b$ постоянен, поэтому по лемме о сегменте окружность $\gamma = (W_cW_aW_b)$ касается некоторой фиксированной окружности ω', вписанной в угол BAC, а окружность $\Omega = (B_1BCC_1)$ касается фиксированной окружности ω, вписанной в угол BAC.

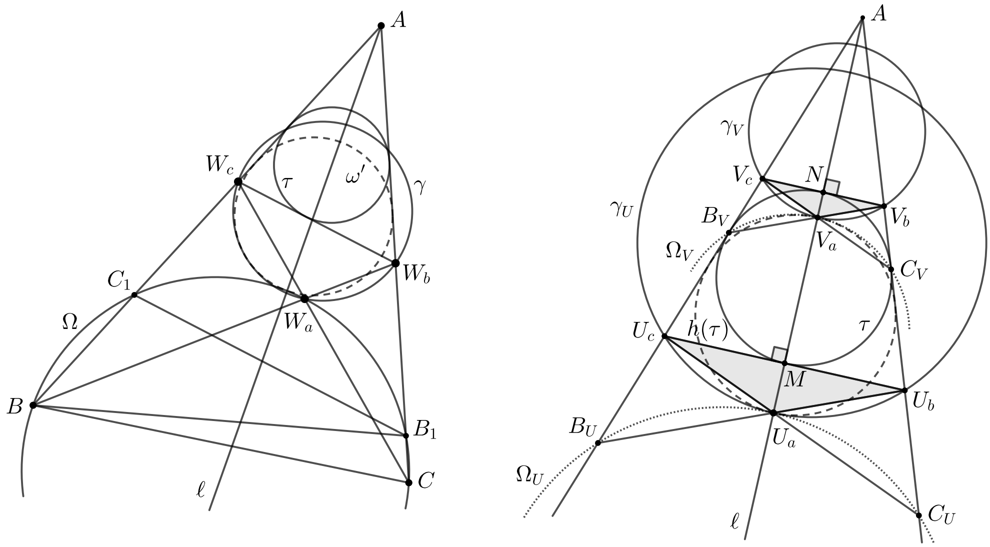


Рис. 14

Рассмотрим два положения отрезка W_cW_b, при которых он перпендикулярен ℓ. Эти два положения определяют исходную конфигурацию задачи, содержащую точки B и C, окружности Ω и γ. Назовём точки W_a, W_b, W_c в первом положении U_a, U_b, U_c, а во втором V_a, V_b, V_c соответственно. Будем приписывать объектам конфигурации, соответствующей стартовым точкам U_a, U_b и U_c, индекс U, а объектам конфигурации, соответствующей стартовым точкам V_a, V_b и V_c, — индекс V (рис. 14).

Очевидно, что точки V_a и U_a лежат на прямой ℓ. Пусть M и N — середины отрезков U_bU_c и V_bV_c соответственно. Тогда MN — диаметр окружности τ. Рассмотрим гомотетию h с центром в A, переводящую N в V_a. Тогда $h(M) = U_a$, поэтому $h(\tau)$ — это окружность с диаметром U_aV_a, совпадающая с ω, поскольку она касается окружностей Ω_U и Ω_V. Также $h(\tau)$ касается γ_U и γ_V, поэтому $h(\tau) = \omega'$. Итак, $\omega = h(\tau) = \omega'$, что и требовалось. □

Список литературы

[1] *Акопян А. В.* О некоторых классических конструкциях в геометрии Лобачевского // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 13. М.: МЦНМО, 2009. С. 155–170.

[2] *Кожевников П. А.* Элементарная геометрия: касание окружностей // Подготовка к международным олимпиадам по математике, `http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?option_lang=rus&presentid=19193`.

[3] *Прасолов В. В.* Геометрия Лобачевского. М.: МЦНМО, 2004.

[4] *Жижилкин И. Д.* Инверсия. М.: МЦНМО, 2009.

[5] *Шварцман О. В.* Комментарий к статье П. В. Бибикова и И. В. Ткаченко // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 11. М.: МЦНМО, 2007. С. 127–130.

[6] *Бибиков П. В., Ткаченко И. В.* О трисекции и бисекции треугольника на плоскости Лобачевского // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 11. М.: МЦНМО, 2007. С. 113–126.

[7] *Заславский А. А.* О вписанно-описанных четырёхугольниках, моделях геометрии Лобачевского и «лемме Нилова» // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 25. М.: МЦНМО, 2020. С. 163–166.

[8] *Бибиков П. В., Фролов И. И.* Неевклидовы решения евклидовых задач // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 26. М.: МЦНМО, 2020. С. 49–66.

[9] Геометрия. 9–11 классы: От учебной задачи — к творческой. М.: Дрофа, 1996.

[10] *Протасов В.* Вокруг теоремы Фейербаха // Квант. 1992. № 9. С. 51–58.

Георгий Галяпин, лицей «Вторая школа» им. В. Ф. Овчинникова
galyapin.gv@students.sch2.ru

Тимофей Карягин, лицей «Вторая школа» им. В. Ф. Овчинникова
karyagin.tm@students.sch2.ru

Галия Шарафетдинова, лицей «Вторая школа» им. В. Ф. Овчинникова
sharafetdinova_galiya@mail.ru