Популяризация и преподавание математики

О Законе Всемирного Тяготения и его объяснениях

Г. Б. Шабат

Памяти В. В. Бронфмана

§ 0. Введение: разговоры с Бронфманом

Мне посчастливилось несколько лет работать с Владимиром Владимировичем в учебном центре при Институте теоретической и экспериментальной физики. Мы часто учили (соответственно математике и физике) одних и тех же школьников и не жалели времени на индивидуальное обсуждение этих школьников — их интереса к нашим предметам, понимания отдельных разделов, зависимости от похвал и порицаний и т. п. Случались и нестандартные проблемы — например, одного мальчика, весьма способного к обоим предметам, родственники убедили, что в наше время наука никому не нужна, и мы тщательно перебирали возможные возражения; кажется, друг друга мы вполне уговорили (что нужна — по крайней мере не меньше, чем в любые другие времена); мальчик же наши соображения с интересом выслушивал, однако родственники неизменно оказывались авторитетнее.

Но ещё больше времени мы отводили обсуждению наших наук и проблем их преподавания. Нужны ли отметки? Совершенна ли классно-урочная система или от неё надо (полностью или частично) отходить? В чём различие в разумных подходах к преподаванию наших предметов, скажем, будущим балеринам, инженерам и работникам физико-математических наук? Насколько школьный язык может отличаться от профессионального? Что может дать компьютеризация? Следует ли пытаться давать определения пространства и времени, и существуют ли такие определения? Можно ли и нужно ли честно объяснять, что такое симметрия? И т. д., и т. п. Труднее всего было закончить разговор и разойтись по домам.

Владимир Владимирович был уникальным собеседником. Обычно имея собственное мнение по обсуждаемым вопросам (иногда — близкое к общепринятому, иногда — весьма оригинальное), он всегда очень доброжелательно выслушивал собеседника. В случае согласия кратко и точно резюмировал итог. В случае несогласия (в том числе с соображениями, кажущимися ему дикими) — прежде, чем возразить, старался как можно точнее понять собеседника, определить, знает ли собеседник что-то такое, чего не знают он и другие физики, или, наоборот, собеседник *не* знает чего-то общеизвестного. В первом случае задавал вопросы и с интересом слушал ответы. Во втором — до того, как начать возражать, объяснял общеизвестное.

Наши с Владимиром Владимировичем беседы чаще выглядели как споры; но сейчас я понимаю, что согласий было гораздо больше, чем расхождений. Я кратко перечислю и то и другое. Надеюсь, что не припишу Владимиру Владимировичу точек зрения, с которыми он не согласился бы. Начнём с расхождений.

Строгость

Бронфман. Сначала надо объяснять понятия по существу: вектор — это направленный отрезок, производная — это мгновенная скорость и т. д. А потом приходи́те вы, математики, со своими аксиомами и определениями предела и уточняйте, как хотите. То же касается доказательств: сначала их надо проводить на физическом уровне строгости, а потом вы доказывайте по-вашему.

Я. Физический уровень строгости — миф. Строгость, как и свежесть рыбы у булгаковского буфетчика, бывает только полная. Если же полной строгости нет, то её нет вовсе, и физикам не следует её имитировать. В школе эта имитация приводит к заучиванию текстов вместо понимания логической структуры предмета.

Давление и т. п.

Бронфман. Давление — одно из важнейших понятий, освоение которого необходимо для развития физического мышления. То же касается понятий *работы*, *заряда* и других, входящих в традиционную школьную программу.

Я. «Определение» вроде *давление — это сила, действующая на единицу площади поверхности*... не может быть *понято* критически мыслящим человеком, а может быть только *заучено*. По-видимому, без основных понятий векторного анализа точного определения давления дать и нельзя; тогда в программу надо явно вводить частные производные и градиент и соответствующим образом изменить порядок освоения разделов школьной физики. Если же давление — это то, что показывают соответствующие приборы (такое «определение» вполне пригодно, например, для врачей), то об этом надо говорить честно. Не лучше обстоят дела и с другими физическими абстракциями.

Силовые линии

Бронфман. Силовые линии электромагнитного поля — основное средство его понимания. Картина силовых линий абсолютно ясна и сопоставима с экспериментом. Обойтись без них невозможно.

Я. Если силовые линии — милый сердцам физиков *художественный образ*, то не мне, постороннему, с этим образом бороться. Но в какой-то момент преподаватели физики должны понять сами и объяснить ученикам, что никакого *точного* смысла в этом образе нет и быть не может. Конечно, у любого векторного поля есть интегральные кривые и через каждую неособую точку поля проходит только одна, но представление о том, что из множества интегральных кривых можно выбрать конечное подмножество так, чтобы *густота* силовых линий из этого подмножества была пропорциональна (хотя бы приближённо) *интенсивности* поля, совершенно иллюзорно[1)].

Вот и все наши с Владимиром Владимировичем разногласия, которые мне удалось припомнить. Думаю, что, если бы судьба отвела нам ещё какое-то время для общения, то и по этим вопросам наши позиции сблизились бы.

[1)] Вопрос о силовых линиях для меня особо важен по личным причинам. Когда в 60-х годах я учился в старших классах одной из лучших в Москве физико-математической 2-й школы, мои отношения с физикой были прерваны тем, что я был не в силах представить себе *$4\pi n$ силовых линий, проходящих через поверхность сферы*. Моя нежно любимая учительница физики Валерия Александровна Тихомирова во мне разуверилась навсегда, а сама эта история оказалась для меня *профориентирующей*: до того колебавшийся в выборе будущей профессии между физикой и математикой, я был обречён выбрать последнюю.

Перейдём к тому, в чём мы были с ним согласны.

Несовременность школьных программ

В школьных курсах физики и математики изучается в основном то, что было известно уже в XVIII веке. Это недопустимо, по крайней мере в отношении молодых людей, которые при выборе будущей профессии рассматривают возможность заниматься наукой. В профильных классах следует давать некоторое представление о квантовой механике, теории относительности, топологии, теории групп и др.

Согласуемость математических и физических программ

Она возможна, хотя иногда требует существенных изменений в программах. Над этим следует работать; логика наук глубже указаний министерств и важнее случайно сложившихся традиций.

Компьютеризация

Это замечательное достижение нашей цивилизации имеет колоссальные перспективы в преподавании, которые, однако, педагогическим сообществом будут восприниматься медленно. Не следует ожидать слишком радикальных перемен; применение компьютеров целесообразно лишь тогда, когда с их помощью достигаются результаты, иначе недостижимые или требующие значительно бóльших усилий. Компьютеры не отменяют традиционных педагогических технологий.

Гуманитарная составляющая физики и математики

История наук, их место в развитии нашей культуры; личности, именами которых названы законы и теоремы; связи с философией и с искусством — всё это важно и может быть рассказано понятно и интересно для всех. Для будущих же не-математиков и не-физиков гуманитарные аспекты естественных и точных наук иногда важнее и интереснее, чем расчёты конденсаторов и тождественные алгебраические преобразования.

Движения и траектории

Описать лыжню иногда проще, чем описать движения проложившего её лыжника. Подробнее об этом пойдёт речь в основной части статьи.

Занимались ли мы маниловщиной? Суждено ли нашим мечтаниям о разумном и интересном преподавании где-нибудь когда-нибудь сбыться?

Наш учебный центр просуществовал недолго[2]; сейчас кругом свирепствует всеразрушающий ЕГЭ[3].

Но надежды остаются; у меня есть возможности пытаться воплощать то, что мы обсуждали, по крайней мере в личной преподавательской деятельности. В любом случае разговоры с Владимиром Владимировичем остаются в моей памяти несравненным образцом взаимопонимания и добросовестности в проникновении в тайны нашего ремесла.

§ 1. Закон Всемирного Тяготения с одной неизвестной функцией

В этом разделе мы кратко воспроизведём *физические* соображения, приводящие к системе дифференциальных уравнений, описывающих движение материальной точки в центральном поле. Эта система содержит одну неизвестную функцию, вид которой не может быть установлен в предлагаемой общности; функция, соответствующая реальному тяготению, будет введена в следующем разделе. Затем эта система будет (в не всегда стандартных обозначениях) проанализирована математически.

Материал этого раздела покрывается почти любым учебником физики или теоретической механики; понимание математика лучше всего отражено в знаменитом учебнике [3].

1.0. «Вывод» уравнений

Упомянутые физические соображения могут быть сформулированы на сравнительно общепонятном языке.

- И мы, и видимые нами небесные светила расположены в трёхмерном евклидовом пространстве, однородном и изотропном[4].

[2] Одна из причин его закрытия — наше полное поражение в борьбе с охранниками, не желающими пускать школьников на территорию Института.

[3] В престижном гуманитарном университете, в котором я работаю, студенты (в том числе медалисты и имеющие максимальные баллы по ЕГЭ) не понимают, что такое *доказательство* и чем отличается текст, скачанный из Интернета, от текста *понятого*; случается, что в целой аудитории первокурсников ни один не знает, что такое синус, и все забыли, как решать квадратные уравнения. По поводу теории относительности все твёрдо знают лишь то, что Эйнштейн играл на скрипке.

[4] То есть физические законы одинаковы всюду и во всех направлениях; в соответствии со сказанным во введении следует работать над модернизацией школьных программ, в результате которой эти постулаты можно будет формулировать на взрослом языке *групп преобразований*.

- Время вещественно и одномерно; когда в нашей идеализации небесных тел мы начинаем считать их («материальными») *точками*, их траектории, т. е. местоположения в пространстве, описываются *гладкими* вектор-функциями времени. Физические законы вечны и неизменны во времени.
- На небесах — та же физика, что и на Земле; точнее, действует *второй закон Ньютона*, согласно которому положение точки и её скорость однозначно определяют её будущее (а заодно и прошлое…).

Сказанного достаточно, чтобы перейти к математическому описанию движений небесных тел. Мы, однако, введём ещё одно важное упрощение — сведём проблему к так называемой *задаче двух тел*.

Ограничившись целью изучить движения планет в Солнечной системе, мы пренебрежём их попарными взаимодействиями по сравнению с их взаимодействием с Солнцем. Многотысячелетний опыт наблюдений человечества за планетами показывает оправданность этой идеализации.

Теперь с точки зрения каждой планеты в пустом пространстве существуют только Солнце и она, сжатая до точки. Солнце — тоже точка, которую мы, уже не опасаясь костров инквизиции, смело поместим в *центр*, т. е. в *начало координат* нашего пространства, которое отныне считается *векторным*. Теперь возьмём в произвольный момент (например, в полночь на 1 января 2001 года) положение планеты и предположим, что её скорость направлена не *на* Солнце и не *от* Солнца. Далее построим *единственную* плоскость, проходяшую через Солнце, положение планеты в полночь 1 января и её вектор скорости в полночь 1 января; можно *доказать*, что планета навеки останется в этой плоскости. Таким образом, пространственная задача сводится к плоской. Введение на этой плоскости стандартных координат x, y позволяет перевести вышесказанное на язык дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -x\mathscr{B}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), & (1.1)\\ \ddot{y} = -y\mathscr{B}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right). & (1.2) \end{cases}$$

Здесь $\mathscr{B}: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ — пока неизвестная гладкая функция положительного аргумента.

1.1. Симметрии

Система (1.1)–(1.2) фундаментальна и с физической, и с математической точек зрения; весьма плодотворно *сочетание* этих точек зрения. Так, сформулированные выше (на привычном в физике натурфилософском языке) принципы однородности, изотропности и неизменности транслируются в свойства *симметрии* системы (1.1)–(1.2). Точнее, на множестве решений этой системы действуют следующие *группы*:

сдвиги по времени $\big(x(t), y(t)\big) \mapsto \big(x(t-t_0), y(t-t_0)\big)$;

повороты $(x, y) \mapsto (\cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y,\ \sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y)$;

масштабирование $\big(x(t), y(t)\big) \mapsto \left(Rx\left(\frac{t}{R^{3/2}}\right), Ry\left(\frac{t}{R^{3/2}}\right)\right)$.

Именно в силу этих симметрий система (1.1)–(1.2) может быть «решена»[5].

1.2. Круговые решения

Для любой функции $\mathscr{B}$, любого положительного числа r_0 и любого «момента» t_0 система (1.1)–(1.2) имеет решения

$$x(t) = r_0 \cos\left(\sqrt{\frac{\mathscr{B}(r_0)}{r_0}}(t-t_0)\right), \quad y(t) = r_0 \sin\left(\sqrt{\frac{\mathscr{B}(r_0)}{r_0}}(t-t_0)\right).$$

Если бы первоначальное предположение Кеплера[6] было верно, для понимания динамики Солнечной системы достаточно было бы знания тригонометрии! Однако, как мы увидим ниже, Всемирное тяготение требует гораздо более изощрённой математики, в том числе (в настоящее время) не школьной.

1.3. Секториальная скорость

Согласно вышеупомянутой теореме Нётер, симметрии дифференциальных уравнений влекут наличие так называемых *интегралов движения*, т. е. функций местоположения и скорости, сохраняющихся вдоль орбит. Первым примером такого интеграла является *секториальная скорость*

$$\Sigma := x\dot{y} - \dot{x}y,$$

очевидно сохраняющаяся в силу уравнений (1.1)–(1.2). Возможность обсудить со школьниками её красивый и глубокий геометрический смысл[7] — один из критериев согласованности математических и физических программ, о которой мы говорили во введении.

---

[5] Это — частный случай *теоремы Нётер*, см. [3].

[6] *Все планеты движутся по окружностям с центром в Солнце.*

[7] Это — второй закон Кеплера, *за равные промежутки времени планета заметает равные площади.*

1.4. Переход к полярным координатам

Введём обычным образом полярные координаты

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \tag{1.4.1}$$

и вычислим

$$\Sigma = r^2\dot\varphi. \tag{1.4.2}$$

Уравнения (1.1)–(1.2) примут вид

$$\begin{cases} \ddot r\cos\varphi - 2\dot r\dot\varphi\sin\varphi - r\dot\varphi^2\cos\varphi - r\ddot\varphi\sin\varphi = -\mathscr{B}(r)r\cos\varphi, & (1.4.3)\\ \ddot r\sin\varphi + 2\dot r\dot\varphi\cos\varphi - r\dot\varphi^2\sin\varphi + r\ddot\varphi\cos\varphi = -\mathscr{B}(r)r\sin\varphi. & (1.4.4)\end{cases}$$

1.5. Разделение переменных

Вычисляя $\cos\varphi\cdot(1.4.3) + \sin\varphi\cdot(1.4.4)$, получаем

$$\ddot r - r\dot\varphi^2 = -\mathscr{B}(r)r. \tag{1.5.1}$$

С помощью (1.4.2) исключаем φ:

$$\ddot r - \frac{\Sigma^2}{r^3} = -\mathscr{B}(r)r. \tag{1.5.2}$$

1.6. Введение «потенциала»

Взяв произвольное число $r_0 > 0$, введём определённую с точностью до аддитивной константы функцию

$$\mathscr{A}(r) := \int\limits_{r_0}^{r} \rho\,\mathscr{B}(\rho)\,\mathrm{d}\rho. \tag{1.6.1}$$

Уравнение (1.5.2) примет вид

$$\ddot r - \frac{\Sigma^2}{r^3} = -\mathscr{A}'(r). \tag{1.6.2}$$

1.7. Введение «энергии»

Последнее уравнение допускает интеграл

$$\frac{\dot r^2}{2} + \frac{\Sigma^2}{2r^2} =: -\mathscr{A}(r) + E \tag{1.7.1}$$

(для проверки продифференцируем эту формулу по времени и разделим результат на $\dot r$) или

$$\dot r^2 = 2E - 2\mathscr{A}(r) - \frac{\Sigma^2}{r^2}. \tag{1.7.2}$$

Наша *энергия* E имеет точный математический смысл, но, очевидно, такое её введение не удовлетворит физиков. Любой физик готов произнести вдохновенную речь об энергии; хотелось бы, чтобы когда-нибудь эти речи стали понятны не-физикам.

1.8. Дифференциал времени

Последнее уравнение (по крайней мере формально[8)]) можно переписать в виде

$$\mathrm{d}t = \pm \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2E - 2\mathscr{A}(r) - \dfrac{\Sigma^2}{r^2}}} \tag{1.8.1}$$

и констатировать, что в некотором смысле задача исследования движения в центральном поле решена — если добавить к соотношению (1.8.1) соотношение (1.4.2), переписанное в виде

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\Sigma \cdot \mathrm{d}t}{r^2}. \tag{1.8.2}$$

Действительно, дифференциальное уравнение считается решённым, когда оно сведено к интегрированию.

В данном случае, если переписать (1.8.1) в виде

$$t - t_0 = \pm \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{2E - 2\mathscr{A}(\rho) - \dfrac{\Sigma^2}{\rho^2}}}, \tag{1.8.3}$$

то интеграл в правой части (1.8.3) получается весьма интересным. Если $\mathscr{A}$ — *рациональная* функция (а в случае реального тяготения это именно так), то он называется *гиперэллиптическим*. Частные случаи этих интегралов (*эллиптические*) были известны ещё Ньютону, который установил, что они *не берутся* (как говорят специалисты, *не берутся в квадратурах*). Гиперэллиптическим интегралам и их обобщениям были посвящены работы сильнейших математиков XIX века — Абеля, Якоби, Римана и других.

1.9. Исследование «ответа»

Хотя мы ещё ничего не знаем о функции $\mathscr{A}$ и потому не можем даже подступиться к количественным рассмотрениям, мы уже можем

[8)] Физики не любят обсуждать ни определение дифференциала d, ни определение вариации δ. Большинство из них не обладает той кротостью, которая была присуща Владимиру Владимировичу, и при попытках собеседника понять, имеют ли они в виду что-нибудь определённое, когда говорят о *бесконечно малом*, приходят в ярость — скрываемую или открытую; собеседник, скорее всего, будет обвинён в неспособности к физическому мышлению и формализме, а то и в *бурбакизме*. Между тем дифференциалы будут играть важную роль в дальнейшем изложении, и я не вижу беды в том, чтобы интересующиеся физикой люди знали, что дифференциалы — это *сечения кокасательного расслоения*. В каком возрасте этому учить — отдельный вопрос.

сделать некоторые выводы, *качественно* анализируя полученный «ответ»; следует исключить из рассмотрения круговые решения, поскольку для них из уравнения (1.8.1) следует *остановка времени*.

Во-первых, под корнем в правой части уравнения должна стоять *положительная* величина; не вдаваясь в логику этого вопроса, отметим, что *при достаточно больших* E это имеет место. И, хотя наша «энергия» E и введена формально, мы вправе выразиться так: *при достаточно высоких энергиях* наше решение имеет смысл, хотя бы локально. Словосочетание «высокие энергии» вызывает физические ассоциации: коллайдеры, ЦЕРН, чёрные дыры…

Во-вторых, посмотрев на уравнение (1.4.2), мы поймём, что *знак* секториальной скорости Σ имеет ясный физический смысл. Вслед за круговыми следует исключить из рассмотрения *катастрофические* решения, в которых $\Sigma = 0$, т. е. планета *падает прямо на* Солнце. Если же $\Sigma \neq 0$, то уравнение (1.4.2) гарантирует *знакопостоянство* $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$, т. е. планета движется вокруг Солнца либо всё время против часовой стрелки, либо всё время по часовой стрелке. Поэтому динамика планеты однозначно восстанавливается по динамике её расстояния до Солнца.

В-третьих, хотя мы собирались найти r как функцию от t, а получили с помощью уравнения (1.8.3) t как функцию от r (после выбора знака и интегрирования), несложные качественные рассмотрения позволяют преодолеть это затруднение. Действительно, любая траектория разбивается на участки приближения к Солнцу и отдаления от Солнца[9], и на каждом таком участке знак в (1.8.3) подбирается однозначно. Тогда на каждом таком участке t как функция от r монотонна и, следовательно, обратима.

Таким образом, с определёнными оговорками и энергетическими ограничениями, мы показали, что описанная процедура при *любой* функции $\mathscr{B}$ задаёт решения системы (1.1)–(1.2).

1.10. Дополнительные свойства неизвестной функции $\mathscr{B}$

Следующие вопросы естественны и физически, и математически.

- Когда все (или хотя бы некоторые некруговые) траектории решений системы (1.1)–(1.2) ограничены?
- Когда все (или хотя бы некоторые некруговые) траектории решений системы (1.1)–(1.2) замкнуты?

[9] Для полной безупречности этого утверждения следует предположить, что $\mathscr{B}$ не только гладка, но и вещественно-аналитична….

- Когда интеграл в правой части (1.8.3) всё-таки берётся (в элементарных функциях)?[10] Один из этих вопросов был действительно поставлен — но лишь в XIX веке. Ответу посвящён следующий раздел.

§ 2. Теорема Бертрана

В предыдущем разделе мы вышли на глубокую и нетривиальную связь между физикой и математикой. Стремление понять Закон Всемирного Тяготения выводит на класс интегралов, интересовавших математиков и по другим причинам. Главная задача теперь — понять, какой из этих интегралов связан с настоящим тяготением, т. е. чему равны неизвестные функции $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$.

Физики пришли к ответу на этот вопрос путём тысячелетних наблюдений над планетами, завершившихся триумфальными результатами Тихо Браге — Кеплера — Ньютона (увлекательный и современный рассказ об этом можно найти, например, в книге [2]). Математики *могли бы* прийти к тому же ответу, приложив гораздо меньше усилий, если бы поставили перед собой, например, приведённые в предыдущем разделе (связанные между собой) естественные вопросы.

К постулатам, введённым в п. 1.0, можно было бы добавить, например, такой:

- *Все* (некатастрофические) траектории планет — замкнутые.

Постулат сильный, но естественный. В конце концов, жизнь на Земле развилась в условиях, когда миллионы лет зима и лето сравнительно регулярно сменяли друг друга, а среднегодовая температура если и менялась, то крайне медленно. И вряд ли жизнь сложилась бы на планетах, которые, скажем, по спиралям приближались бы к Солнцу и на которых поэтому год от года становилось бы всё жарче и жарче.

Французскому академику Ж. Бертрану принадлежит результат [1], который в наших обозначениях выглядит следующим образом.

Теорема. *Пусть $\mathscr{B}$ — такая функция, что все решения системы уравнений* (1.1)–(1.2) *периодичны. Тогда либо $\mathscr{B}$ постоянна, либо $\mathscr{B}(r) = \dfrac{k}{r^3}$, где k — положительная константа.*

---

[10] Этот вопрос выделяется среди предыдущих: понятие *элементарной функции* является всё-таки продуктом договорённости сообщества, а не свойством наблюдаемых в Природе траекторий. Тем не менее случай *истинного* тяготения обладает уникальным свойством: этот интеграл берётся, и поставленный вопрос — один из способов составить небольшой список кандидатов на роль истинной $\mathscr{B}$. Сомневаюсь, что эта задача полностью решена.

В статье [1] приведено короткое и красивое доказательство этой замечательной теоремы. В виде цепочки задач оно воспроизведено в книге [3].

Случай постоянной $\mathscr{B}$ соответствует свободному изотропному осциллятору, а случай

$$\mathscr{B} = \frac{k}{r^3}$$

— Закону Всемирного Тяготения. Ньютон проанализировал оба случая и установил, что все орбиты в обоих — эллиптические; в случае осцилляции сила направлена в центр эллипса, а в случае тяготения — в один из фокусов.

Если добавить к приведённым выше постулатам ещё один:

- Сила притяжения убывает с расстоянием,

то полученный список постулатов полностью определяет Закон Всемирного Тяготения.

Я думаю, что теорема Бертрана заслуживает гораздо более широкой известности, чем она имеет сегодня. Она даёт логически безупречный ответ на мучающих многих физиков вопрос: *почему в Природе действует именно закон обратных квадратов*[11]*, а не какой нибудь другой*? Один из возможных подходов к составлению школьных программ по физике и математике (для профильных классов...) таков: старшеклассник, собирающийся серьёзно заниматься современной Наукой, должен быть способен понять основные результаты, относящиеся к Закону Всемирного Тяготения. Напомним, что последний из упомянутых результатов, теорема Бертрана, был получен более века назад.

§ 3. Ньютоновское тяготение

Теперь, зная, какова функция $\mathscr{B}$ «на самом деле», мы проанализируем динамику планет более детально.

3.0. Функции

Теперь нам известны

$$\mathscr{B}(r) = \frac{\gamma}{r^3} \tag{3.0.0}$$

и

$$\mathscr{A}(r) =_{(1.6.1)} -\frac{\gamma}{r}. \tag{3.0.1}$$

Постоянную γ мы вскоре уточним.

[11] Так называют иногда ньютоновский Закон Всемирного Тяготения.

3.1. Уравнения движения

Уравнения (1.1)–(1.2) превращаются в

$$\ddot{x} = -\gamma \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \tag{3.1.1}$$

$$\ddot{y} = -\gamma \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \tag{3.1.2}$$

3.2. Случай Солнечной системы

Известно, что для планет Солнечной системы

$$\gamma = Gm_{\odot} \approx 1{,}327 \cdot 10^{20}\ \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2}.$$

К сожалению, объём настоящей статьи не позволяет обсудить интереснейшую историю получения этой величины и связанные с ней вычислительные проблемы.

3.3. Круговые решения

Они имеют вид

$$x(t) = r_0 \cos \frac{\sqrt{\gamma}(t-t_0)}{r_0^{3/2}}, \quad y(t) = r_0 \sin \frac{\sqrt{\gamma}(t-t_0)}{r_0^{3/2}}. \tag{3.3.0}$$

Эти решения можно также записать в виде

$$x(t) = r_0 \cos \frac{2\pi(t-t_0)}{T}, \quad y(t) = r_0 \sin \frac{2\pi(t-t_0)}{T}. \tag{3.3.1}$$

Равносильность этих записей выражается соотношением

$$\frac{\sqrt{\gamma}}{r_0^{3/2}} = \frac{2\pi}{T},$$

или

$$\frac{r_0^3}{T^2} = \frac{\gamma}{4\pi^2}, \tag{3.3.2}$$

которое представляет собой не что иное, как *третий закон Кеплера*!

3.4. «Физическое» время

Уравнение дифференциала времени из подраздела 1.8 принимает вид

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2E + \frac{2\gamma}{r} - \frac{\Sigma^2}{r^2}}}. \tag{3.4.0}$$

Введём переменную ρ соотношением

$$\frac{1}{\rho^2} = 2E + \frac{2\gamma}{r} - \frac{\Sigma^2}{r^2}. \tag{3.4.1}$$

В координатах $\left(\frac{1}{\rho}, \frac{1}{r}\right)$ это соотношение задаёт *конику*. Мы можем (с точностью до константы) выразить время как *интеграл от рациональной формы на римановой поверхности*: соотношения (3.4.0) и (3.4.1) переписываются в виде

$$t = \int \rho \, \mathrm{d}r, \tag{3.4.2}$$

где ρ и r связаны уравнением

$$\frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{\Sigma}\right)^2 = 2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}. \tag{3.4.3}$$

Наша коника допускает *рациональную параметризацию* (вспомним тангенс половинного аргумента или формулу для пифагоровых троек):

$$\frac{1}{\rho\sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}}} = \frac{1 - T^2}{1 + T^2}, \tag{3.4.4}$$

$$\frac{\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{\Sigma}}{\sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}}} = \frac{2T}{1 + T^2}. \tag{3.4.5}$$

Поэтому, интегрируя соотношение, являющееся дифференциалом соотношения (3.4.2),

$$\mathrm{d}t = \rho \, \mathrm{d}r,$$

мы можем выразить ВРЕМЯ t как элементарную функцию от вспомогательного параметра T.

Однако разрешить это соотношение в элементарных функциях не удаётся[12]. С алгебраической точки зрения физическое время — ТРАНСЦЕНДЕНТНАЯ ХИМЕРА!

3.5. «Угловое» время

Начиная с этого момента, будем называть φ *угловым временем*. К счастью, оно ведёт себя гораздо лучше физического. Переписывая (1.4.2) в виде

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\Sigma}{r^2}, \tag{3.5.0}$$

[12] Можно придать этому утверждению абсолютно точный смысл.

преобразуем (3.4.0) к виду

$$\frac{r^2\,\mathrm{d}\varphi}{\Sigma}=\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2E+\frac{2\gamma}{r}-\frac{\Sigma^2}{r^2}}}, \tag{3.5.1}$$

или

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{\Sigma\,\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2E+\frac{2\gamma}{r}-\frac{\Sigma^2}{r^2}}}=-\frac{\Sigma\,\mathrm{d}\frac{1}{r}}{\sqrt{2E+\frac{2\gamma}{r}-\frac{\Sigma^2}{r^2}}}=-\frac{\Sigma\,\mathrm{d}\frac{1}{r}}{\sqrt{2E+\frac{\gamma^2}{\Sigma^2}-\left(\frac{\Sigma}{r}-\frac{\gamma}{\Sigma}\right)^2}}=$$

$$=-\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\Sigma}{r}-\frac{\gamma}{\Sigma}\right)}{\sqrt{2E+\frac{\gamma^2}{\Sigma^2}-\left(\frac{\Sigma}{r}-\frac{\gamma}{\Sigma}\right)^2}}=\mathrm{d}\arccos\frac{\frac{\Sigma}{r}-\frac{\gamma}{\Sigma}}{\sqrt{2E+\frac{\gamma^2}{\Sigma^2}}},$$

или

$$\varphi-\varphi_0=\arccos\frac{\frac{\Sigma}{r}-\frac{\gamma}{\Sigma}}{\sqrt{2E+\frac{\gamma^2}{\Sigma^2}}},$$

или

$$\cos(\varphi-\varphi_0)=\frac{\frac{\Sigma}{r}-\frac{\gamma}{\Sigma}}{\sqrt{2E+\frac{\gamma^2}{\Sigma^2}}},$$

или

$$\frac{\gamma}{\Sigma}+\sqrt{2E+\frac{\gamma^2}{\Sigma^2}}\cos(\varphi-\varphi_0)=\frac{\Sigma}{r},$$

откуда

$$r=\frac{\Sigma}{\frac{\gamma}{\Sigma}+\sqrt{2E+\frac{\gamma^2}{\Sigma^2}}\cos(\varphi-\varphi_0)}=\frac{\frac{\Sigma^2}{\gamma}}{1+\sqrt{1+\frac{2E\Sigma^2}{\gamma^2}}\cos(\varphi-\varphi_0)}.$$

Вводя

$$r_0:=\frac{\Sigma^2}{\gamma} \tag{3.5.2}$$

и

$$\varepsilon:=\sqrt{1+\frac{2E\Sigma^2}{\gamma^2}}, \tag{3.5.3}$$

переписываем полученное выше соотношение в виде

$$r = \frac{r_0}{1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)}. \tag{3.5.4}$$

В духе упоминавшегося во введении соотношения между лыжником и лыжнёй ещё задолго до полного понимания динамики планет мы получили (в предположении знания уравнения эллипса в полярных координатах) *первый закон Кеплера*.

3.6. Связь времён

Она имеет вид

$$\mathrm{d}t = \frac{r_0^2}{\Sigma}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0))^2}.$$

Пока мы знаем лишь то, что угловое время параметризует орбиты хорошо, а физическое — плохо.

3.7. Исключение секториальной скорости

Соотношение (3.5.2) связывает три физические константы. Из них две (секториальная скорость Σ и среднее расстояние до Солнца r_0) допускают интуитивную интерпретацию[13)], а третья, γ — не допускает. Было бы соблазнительно с помощью (3.5.3) исключить γ из рассмотрения, оставив только расстояние и секториальную скорость.

Однако γ — константа, единая для всей Солнечной системы, а r_0 и Σ присущи лишь данной планете, так что γ фундаментальнее, и мы её оставим. Исключить придётся секториальную скорость Σ.

Итак, переписываем (3.5.2) как

$$\Sigma = \sqrt{\gamma r_0}, \tag{3.7.0}$$

а (3.5.3) как

$$\varepsilon := \sqrt{1 + \frac{2Er_0}{\gamma}}. \tag{3.7.1}$$

Связь времён принимает вид

$$\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{r_0^3}{\gamma}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0))^2}. \tag{3.7.2}$$

13) Для интерпретации r_0 как среднего расстояния полезно рассмотреть «круговой» случай $\varepsilon = 0$, а затем учесть, что реальное $\epsilon \ll 1$ — маленькое положительное число и, согласно формуле (3.5.4), реальное расстояние до Солнца r то немного больше, то немного меньше r_0.

3.8. Ответ

Полученные формулы позволяют вычислить $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$-динамику в терминах интегралов и *углового времени*:

$$x = \frac{r_0 \cos\varphi}{1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)}, \qquad \dot{x} = \sqrt{\frac{\gamma}{r_0}}(-\sin\varphi - \varepsilon\sin\varphi_0),$$
$$y = \frac{r_0 \sin\varphi}{1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)}, \qquad \dot{y} = \sqrt{\frac{\gamma}{r_0}}(\cos\varphi + \varepsilon\cos\varphi_0).$$

Можно ли считать эти формулы полным и окончательным ответом? Если относиться к φ как к полноценному времени[14)] — безусловно, да. Однако если хотеть получить ответ в терминах *настоящего* времени, то лучшее, чего мы достигли, — это констатация того, что аналогичной формулы не существует.

§ 4. Дифференциалы физических величин и римановы поверхности

Мы укажем общую природу всех физических величин, связанных с тяготением. Все они оказываются *интегралами рациональных дифференциалов* на римановой поверхности, зависящей лишь от эксцентриситета орбиты.

Таким образом, сами физические величины оказываются *минимально трансцендентными* — как логарифм или синус; все они получаются с помощью единственной трансцендентной операции (интегрирования), применённой к алгебраическим объектам (рациональным дифференциалам на алгебраических кривых).

4.0. Пройденный путь и малая риманова поверхность

Как обычно, *дифференциалом пути* называется

$$\mathrm{d}s := \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\gamma}{r_0}}\sqrt{1 + 2\varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0) + \varepsilon^2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \sqrt{\frac{\gamma}{r_0}}\sqrt{1 + 2\varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0) + \varepsilon^2}\sqrt{\frac{r_0^3}{\gamma}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{[1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)]^2} =$$
$$= r_0\frac{\sqrt{1 + 2\varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0) + \varepsilon^2}}{[1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)]^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

---

14) Вопрос о правомерности такого отношения будет рассмотрен в предпоследнем разделе.

Введя обозначение
$$\xi := -\cos(\varphi - \varphi_0),$$
перепишем последнее равенство как
$$\frac{\mathrm{d}s}{r_0} = \frac{\sqrt{1-2\varepsilon\xi+\varepsilon^2}}{(1-\varepsilon\xi)^2} \cdot \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$
Вводя *малую риманову поверхность* орбиты как алгебраическую кривую, заданную в координатах ξ, ζ уравнением
$$\zeta^2 = (1-\xi^2)(1+\varepsilon^2-2\varepsilon\xi),$$
получим
$$\mathrm{d}s = r_0 \cdot \frac{1-2\varepsilon\xi+\varepsilon^2}{(1-\varepsilon\xi)^2} \cdot \frac{\mathrm{d}\xi}{\zeta},$$
или
$$s - s_0 = r_0 \int\limits_{s_0}^{s} \frac{1-2\varepsilon\xi+\varepsilon^2}{(1-\varepsilon\xi)^2} \cdot \frac{\mathrm{d}\xi}{\zeta}.$$
Это — самый почтенный из неберущихся интегралов, *эллиптический* (3-го рода), названный так, поскольку выражает *длину дуги эллипса* (как и в нашем случае). Этим интегралом занимались Ньютон и Эйлер.

4.1. Угловое время и большая риманова поверхность

Имеем
$$\mathrm{d}\varphi = -\mathrm{d}\arccos\xi = \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$
Этот дифференциал иррационален на малой римановой поверхности, поэтому введём ещё
$$\eta := \sin(\varphi - \varphi_0)$$
и *большую риманову поверхность*, определяемую в трёхмерном (ξ, η, ζ)-пространстве соотношениями
$$\begin{cases} \xi^2 + \eta^2 = 1, \\ \zeta^2 = (1-\xi^2)(1+\varepsilon^2-2\varepsilon\xi). \end{cases}$$
На этой римановой поверхности дифференциал углового времени принимает вид
$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}\xi}{\eta}.$$

4.2. Дифференциалы других величин

На большой римановой поверхности рациональны дифференциалы *всех* физически значимых величин: дифференциал углового времени принимает вид

$$\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{r_0^3}{\gamma}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{[1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)]^2} = \sqrt{\frac{r_0^3}{\gamma}}\cdot\frac{\mathrm{d}\xi}{\eta(1-\varepsilon\xi)^2},$$

а дифференциал расстояния до Солнца —

$$\mathrm{d}r =_{(3.5.4)} \mathrm{d}\frac{r_0}{1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)} = r_0\,\mathrm{d}\frac{1}{1-\varepsilon\xi} = \varepsilon r_0\frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\varepsilon\xi)^2}.$$

С помощью этих соотношений легко выразить также и дифференциалы исходных координат $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ в расширенном фазовом пространстве.

§ 5. О временах

В последних двух разделах придётся окончательно перейти на язык современной «взрослой» математики.

Фазовым пространством можно называть любое множество $\mathbb{X}$ с любыми дополнительными структурами, которое кто-либо способен интерпретировать как *пространство состояний* какой-либо физической системы.

Мы до сих пор работали с фазовым пространством

$$\mathbb{X} := \left\{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \in \mathbb{R}^4 \mid (x, y) \neq (0, 0)\right\};$$

вероятно, имеет смысл выбросить из этого пространства *катастрофический конус*

$$\mathbb{X}_{\mathrm{cat}} := \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \in \mathbb{X} \mid x\dot{y} = \dot{x}y\}$$

и работать в фазовом пространстве $\mathbb{X} \setminus \mathbb{X}_{\mathrm{cat}}$.

Временем следовало бы разрешить называть любую группу (или полугруппу…) $\mathbb{T}$ вместе с *действием*

$$\mathbb{T} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X},$$

орбиты которого можно рассматривать как *эволюции* состояний.

Классическим временем является $\mathbb{T} = \mathbb{R}$; в последние десятилетия, впрочем, всё более популярной становится *дискретная динамика* с $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ (в полугрупповой версии $\mathbb{T} = \mathbb{N}$).

В наших рассмотрениях классическое время фигурировало в соображениях о существовании и единственности решений системы уравнений (1.1)–(1.2); эти рассмотрения даже в ньютоновском случае сопровождались законными сетованиями на трансцендентность и неявность этого действия.

Когда же в соответствии с теоремой Бертрана мы ограничились *периодическими* решениями, естественно было бы перейти к *периодическому времени*

$$\mathbb{T} = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}};$$

если продолжать понимать это время классически, то все соображения о трансцендентности и неявности сохраняют силу.

Если же перейти к *угловому* времени

$$\mathbb{T} = \{\varphi\} = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}},$$

то формулы раздела 3.8 задают действие этого времени явно и с помощью только элементарных функций.

Угловое время действует на каждой орбите по отдельности; рассмотренные в предыдущем разделе римановы поверхности позволяют предположить наличие *эллиптического времени*, действующего во всей Солнечной системе.

Этот вопрос требует дальнейших размышлений, желательно — с участием физиков. Бронфману я об этой конструкции рассказать не успел, но уверен, что ему было бы интересно; остаётся надежда на его учеников и последователей.

§ 6. Какими числами описывать наш мир?

К вещественному времени есть ещё одна претензия, которой не было во времена Ньютона. Понятие вещественного числа ещё не было формализовано, но господствовало убеждение в том, что эти числа идеально подходят для описания нашего мира.

Прошли века, появилась квантовая механика. Теперь нам объясняют (см., например, [4], что времена, меньшие 10^{-24} секунды (время прохождения света через ядро атома), не имеют физического смысла. На расстояниях же, меньших планковской длины 10^{-35} метра, пространство вообще теряет свою евклидовость. Таким образом, вещественные числа (с их безграничной делимостью и самоподобием), начиная с XX века для описания нашего мира не идеальны.

Предлагают ли наши рассмотрения какие-либо альтернативы? Да, и даже две. Можно рассмотреть *счётное время*

$$\mathbb{T} = \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$$

и *конечные времена*: для $N \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{T} = \frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}}$$

(для Земли, например, в первом приближении подходит $N = 365$).

Динамика опять определяется формулами из раздела 3.8. Пространство тоже можно сделать *счётным*, разрешив координатам и скоростям принимать только алгебраические значения. Более того, эти значения можно существенно ограничить: они могут лежать в *вещественных циклотомических* полях (т. е. полях, порождённых числами вида $\cos\frac{2\pi}{n}$ при целых n) и даже — в случае конечных времён — в конечнопорождённых полях чисел такого вида.

Предложение сменить основное поле с $\mathbb{R}$ — разумеется, дикое с точки зрения школьной физики. Но, как мы показали (опуская незначительные детали), соответствующие математические модели совместимы со всеми наблюдениями, проведёнными человечеством в связи со Всемирным Тяготением, Думаю, что Владимир Владимирович от этого предложения не отмахнулся бы.

Список литературы

[1] *Bertrand J.* Théorème relatif au mouvement d’un point attiré vers un centre fixe // C. R. Acad. Sci. 1873. V. 77. P. 849–853.

[2] *Аносов Д. В.* От Ньютона к Кеплеру. М.: МЦНМО, 2006.

[3] *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Едиториал УРСС, 2017.

[4] *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 1, гл. 5. М.: Мир, 1977.

Георгий Борисович Шабат, Институт лингвистики РГГУ

george.shabat@gmail.com