

Дополнение и комментарии к задачку

Хорошая задача ценна своими связями. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

Эстетическое чувство позволяет ощутить богатство связей и ответственность задачи. Оно так важно в том числе и по этой причине. Значение математика определяется произведением его «пробивной силы» на эстетическое чувство (впрочем, эти две вещи взаимозависимы⁴).

При публикации дополнения к задачку нам прежде всего важны эти связи. Разумеется, содержательные и важные связи могут найтись как с классикой, так и с сюжетами, которые находятся в процессе исследования и ещё не получили изящной формулировки.

В выпуске 3 (с. 233, см. решение: выпуск 6, с. 148–149) опубликована

Задача 3.8. Внутри выпуклого пятиугольника проведены диагонали. Докажите, что они образуют пятиугольник, проективно эквивалентный исходному. (Д. Любшин)

С такой конструкцией связан следующий сюжет.

Задача 3.8'. Дан пятиугольник $ABCDEF$ площади S . Докажите неравенство

$$S \leq S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCD} + S_{\triangle CDE} + S_{\triangle DEF} + S_{\triangle EFA} + S_{\triangle FAB}.$$

В продолжение темы:

Задача 3.8''. В выпуклом пятиугольнике P провели все диагонали, в результате чего он оказался разбитым на десять треугольников и один пятиугольник P' . Из суммы площадей треугольников, прилегающих к сторонам P , вычли площадь P' ; получилось число N . Совершив те же операции с пятиугольником P' , получили число N' . Докажите, что $N > N'$. (А. Я. Канель-Белов)

В выпуске 6 (с. 135, см. решение: выпуск 7, с. 195–196) опубликована

Задача 5.2. Али-Баба делит с разбойником 10 куч золотого песку. Али-Баба может в любой момент взять три кучи и уйти, либо он может выбрать 4 любые кучи и разделить каждую из куч на правую и левую часть. Далее разбойник правые части нетождественно переставляет, и затем части объединяются — каждая левая с новой правой.

Сможет ли Али-Баба унести с собой свыше 49 кг золотого песку, если всего было 50 кг? (А. Я. Белов)

Естественно возникает следующий вопрос.

Задача 5.2' (на исследование). *Оцените число операций в задаче 5.2, в частности когда число куч равно k , общее количество песка равно единице и при этом Али-Баба может взять любые $k - 1$ куч и уйти, а разбойнику следует оставить не больше ε песка.*

(А. Я. Канель-Белов)

Этот сюжет имеет приложение к теории колец с тождествами (PI-теории).

Задача 5.2''. Пусть в ассоциативной алгебре выполняется полиномиальное тождество степени n :

$$x_1 \dots x_n = \sum_{\sigma \in S_n \setminus \text{Id}} \alpha_\sigma x_\sigma(1) \dots x_\sigma(n).$$

Тогда в ней выполняется некоторое нетривиальное тождество алгебраичности порядка n

$$\sum_{I=(i_1, \dots, i_n)} c_0 x^{k_1} c_1 x^{k_2} \dots c_n = 0. \quad (\text{А. Я. Канель-Белов})$$

В выпуске 7 (с. 187, см. решение: выпуск 9, с. 229–230) опубликована

Задача 7.4. Доказать неравенство $x^y + y^x > 1$ ($x, y > 0$).

(Фольклор)

Вот связанный сюжет.

Задача 7.4'. Докажите неравенство $2^x + 2^{1/x} > 1$. (Фольклор)

В выпуске 8 (с. 247, см. исправления и решение: наст. выпуск, с. 222–225) опубликована

Задача 8.7. Докажите, что для любых целых неотрицательных n, p найдётся такая константа $C > 0$, что для любой бесконечно дифферен-

цируемой функции f условия

$$\int_0^1 x^n |f^{(k)}(x)|^p dx < 1;$$

$$p > 1, k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n+p+1}{p} \right\rfloor \quad \text{или} \quad p = 1, k = 0, \dots, n+1,$$

влекут условие $|f(0)| < C$.

(А. Я. Канель)

Естественно возникает

ЗАДАЧА 8.7'. Верно ли, что для $p, n \in \mathbb{N}$ из неравенств

$$\int_0^1 x^n |f^{(k)}(x)|^{1/p} dx < 1;$$

$k = 0, \dots, np + p + 1$ при $p > 1$ и $k = 0, \dots, n + 1$ при $p = 1$ следует ограниченность $|f(0)|$? (А. С. Мингажев)

В выпуске 9 (с. 223, см. решение: выпуск 14, с. 277) опубликована

ЗАДАЧА 9.5. Существует ли функция, непрерывная во всех рациональных точках и разрывная во всех иррациональных? (Фольклор)

Вот задача на связанный сюжет.

ЗАДАЧА 9.5'. Существует ли функция, дифференцируемая во всех рациональных точках и недифференцируемая во всех иррациональных? (Фольклор)

В выпуске 10 (с. 278, см. решение: выпуск 13, с. 185–186) опубликована

ЗАДАЧА 10.1. В вершинах куба написаны числа. Вместо каждого числа записывают среднее арифметическое чисел, стоящих в трёх соседних вершинах (числа заменяют одновременно). После 10 таких операций в вершинах оказались исходные числа. Найдите все такие числа. (А. К. Ковальджи)

Вот контрапункт к этой задаче.

ЗАДАЧА 10.1'. (а) В каждой вершине треугольника записано некоторое число, меньшее чем 10^6 , причём сумма всех этих чисел равна нулю. Каждое число заменяется средним арифметическим чисел, стоящих в остальных вершинах, и эта операция повторяется 30 раз. Докажите, что после этого каждое число станет по модулю меньше чем 10^{-3} .

(б) По кругу расставлены n вещественных чисел, не все они равны. За секунду каждое число заменяется на среднее арифметическое со своим соседом по часовой стрелке. Докажите, что расположение чисел стремится к постоянному,

(в) причём это происходит с экспоненциальной скоростью, т. е. существует $0 < \alpha < 1$ такое, что на k -й секунде разности чисел имеют порядок $O(\alpha^k)$.

(г) Найдите это α .

(Л. Радзивиловский)

А вот общая формулировка.

Задача 10.1''. В вершинах графа Γ написаны числа. Вместо каждого числа записывают среднее арифметическое чисел, стоящих в трёх соседних вершинах (числа заменяются одновременно). Операцию повторяют до бесконечности. При этом оказалось, что последовательности чисел, записанные в вершинах, не сходятся. Докажите, что граф Γ является двудольным, т. е. все его вершины можно раскрасить в два цвета так, что соседние вершины будут разноцветными.

(А. Я. Канель-Белов)

В выпуске 26 (с. 269, см. решение: выпуск 27, с. 253–254) опубликована

Задача 11.7'. Докажите, что

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}. \quad (\text{Фольклор})$$

В выпуске 29 (с. 263) опубликована

Задача 11.7''. Докажите, что

$$p \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (p - kq)^{k-1} (r + kq)^{n-k} = (p + r)^n. \quad (\text{Фольклор})$$

В продолжение темы:

Задача 11.7'''. Среди $t + n$ пассажиров автобуса t человек имеют монету в 5 копеек, n человек — 10 копеек, у кассира есть k монет достоинством 10 копеек. Какова вероятность того, что все пассажиры смогут заплатить за проезд и очередь не будет приостанавливаться?

(Фольклор)

В выпуске 14 (с. 272) опубликована

Задача 14.2. Найти предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \operatorname{tg}(x) - \operatorname{tg} \sin(x)}{\arcsin \operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg} \arcsin(x)} \quad (\text{В. И. Арнольд})$$

В продолжение темы:

ЗАДАЧА 14.2'. Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Что больше: $\operatorname{tg}(\sin(x))$ или $\sin(\operatorname{tg}(x))$?
(Л. Радзивиловский)

В выпуске 17 (с. 197) опубликована

Задача 17.7. На каждом ребре правильного многогранника M с единичными рёбрами взяли по точке A_i . Найдите объём геометрического места центров масс таких наборов. Рассмотрите все 5 возможностей.
(А. Я. Канель-Белов)

С ней связана (выпуск 29, с. 265)

Задача 17.7' (на исследование). На каждом ребре правильного многогранника M с единичными рёбрами в n -мерном пространстве взяли по точке A_i . Найдите объём геометрического места центров масс таких наборов. Рассмотрите случаи кубов, октаэдров, тетраэдров, а также три исключительных многогранника в четырёхмерье (три правильных многогранника, не аналогичных трёхмерным). Рассмотрите случай k -мерных граней.
(А. Я. Канель)

В продолжение темы:

Задача 17.7''. (а) Даны два правильных тетраэдра с рёбрами длины $\sqrt{2}$, переходящих один в другой при центральной симметрии. Пусть Φ — множество середин отрезков, концы которых принадлежат разным тетраэдрам. Найдите объём фигуры Φ .

(б) В правильный додекаэдр можно вписать куб 5 разными способами. В каждом таком кубе взяли по точке. Пусть Φ — множество центров масс пятёрок точек, концы которых принадлежат попарно разным кубам. Найдите объём фигуры Φ .

(в) В правильный додекаэдр можно вписать правильный тетраэдр 10 разными способами. В каждом таком кубе взяли по точке. Пусть Φ — множество центров масс десятков точек, концы которых принадлежат попарно разным тетраэдрам. Найдите объём фигуры Φ .

(А. Я. Канель-Белов)

В выпуске 19 (с. 257) опубликована

Задача 19.3. Решите уравнения

$$\text{а) } x^2 + y^2 = (x + 1)^3;$$

$$\text{б) } x^2 + xy + 2y^2 = (y + 1)^3$$

в целых числах.

(Н. Н. Осипов)

Развитием сюжета служит

Задача 19.3'. Решите уравнение $x^2 + xy + 41y^2 = (yz + 1)^3$ в натуральных числах. (Н. Н. Осипов)

В выпуске 20 (уточнение в выпуске 28, с. 236, см. решение: выпуск 30, с. 192–208) опубликована

Задача 20.4. Последовательность $\{a_n\}$ называется *линейной рекуррентой порядка k* , если для некоторых b_1, \dots, b_k при всех $n \geq k$ выполняется равенство

$$b_0 a_n + b_1 a_{n-1} + \dots + b_k a_{n-k} = 0.$$

Пусть $b_0 = 1$, $b_i \in \mathbb{Z}$ при всех i . Докажите, что тогда либо последовательность $\{a_n\}$ содержит член, имеющий 2016 различных простых делителей, либо множество натуральных чисел разбивается на непересекающиеся арифметические прогрессии, на каждой из которых наша рекуррента является геометрической прогрессией.

(А. Я. Канель-Белов)

С ней связана

Задача 20.4'. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, $a_1 < \dots < a_s$ — целые числа.

- (а) Докажите, что $P(a)$ делится на $P(a_1), \dots, P(a_s)$ при некотором a .
 (б) Можно ли утверждать, что $P(a)$ делится на $P(a_1) \dots P(a_s)$ при некотором a ? (Л. Радзивилловский)

В выпуске 22 (с. 232, см. решение: выпуск 23, с. 236–238) опубликована

Задача 22.4. Дана кососимметрическая матрица A . Докажите, что некоторая нетривиальная линейная комбинация её столбцов с неотрицательными коэффициентами образует вектор, все координаты которого неотрицательны. (И. В. Митрофанов)

Следующая задача относилась к определителям таких матриц (выпуск 28, с. 244–245).

Задача 22.4'. В матрице на пересечении i -й строки и j -го столбца при $i > j$ стоит переменная x_{ij} , при $i < j$ стоит $-x_{ij}$, а при $i = j$ стоит 0. Докажите, что её определитель есть квадрат многочлена от переменных x_{ij} . (Теорема Пфаффа)

В продолжение темы:

Задача 22.4''. Докажите, что собственные числа кососимметрической матрицы чисто мнимые. (Фольклор)

В этой связи в выпуске 28 на с. 258–259 приведена подборка задач на разностное дифференцирование. Вот и ещё задачи на эту тему.

1. Найдите все такие функции f , что для любой тройки попарно различных вещественных чисел x, y, z выполняется неравенство

$$\frac{f(x)}{(x-y)(x-z)} + \frac{f(y)}{(y-x)(y-z)} + \frac{f(z)}{(z-y)(z-x)} \geq 0.$$

2. Рассмотрим множество всех троек (x, y, z) неотрицательных целых чисел, не превосходящих n , но исключим тройку $(0, 0, 0)$. Каким минимальным числом плоскостей, не проходящих через начало координат, можно покрыть это множество?

В выпуске 28 (с. 234) опубликована

Задача 28.5. (а) Дана полоса $2 \times n$, заполненная знаками «+» и «-». За одну операцию разрешается поменять знаки в одном столбце, строке или диагонали. Каково минимальное число операций, гарантированно достаточное для того, чтобы сделать все знаки плюсами?

(б) Тот же вопрос для полосы $3 \times n$. (А. Я. Канель-Белов)

В продолжение темы:

Задача 28.5'. (а) Во всех клетках таблицы $n \times n$ стоят знаки «+» и «-». Разрешается поменять знаки в любом подквадрате 2×2 на противоположные. Какое максимальное число таблиц можно получить?

(б) Сколько операций для этого требуется? (Л. Радзивилловский)

ЗАМЕЧАНИЕ. На 33-м турнире Городов (2012 г., весна, сложный вариант, 8–9 кл.) была предложена задача.

Задача. В клетках таблицы $n \times n$ стоят знаки «+» и «-». За ход разрешается в любой строке или в любом столбце изменить все знаки на противоположные. Известно, что из начальной расстановки можно за сколько-то ходов сделать все знаки в таблице плюсами. Докажите, что этого можно добиться, сделав не более n ходов.

(А. Я. Канель-Белов)

В выпуске 30 (с. 230) опубликована

Задача 30.6. Дана выпуклая (т. е. такая, что множество точек над графиком выпукло) функция $f(x)$, определённая на всей вещественной прямой. Обозначим через U множество всех точек плоскости между графиками функций $f(x)$ и $f(x) + 1$ (включая точки, лежащие на графиках). Докажите, что внутри U можно расположить отрезок любой конечной длины. (Е. Рябов)

В продолжение темы:

Задача 30.6'. (а) По угловой речке — области между координатными осями, горизонтальным и вертикальным лучами с началом в точке $(1, 1)$ — плывёт ветка. Каково максимально возможное расстояние между её концами, при котором она может проплыть всю область?

(б) Открытый вопрос. Какова максимальная площадь фигуры, которая может в этой области развернуться на 180° ?

(А. Я. Канель-Белов)