Решения задач из прошлых выпусков

Серия 1, вып. 13, задача 163. Условие. Решить в целых числах уравнение $x^8 - y^5 z = x^5$, где y и z — простые числа. (*Г. А. Делибаш*)

Ответ. $x = 2$, $y = 2$, $z = 7$.

Решение. Преобразуем уравнение: $x^5(x^3 - 1) = y^5 z$. Пусть $x = 2k$ с целым k. Если $|k| > 1$, то $x^5 = 2^5 k^5$, что не может быть равно $y^5 z$, тем более после умножения на $x^3 - 1$. Если $x = -2$, то легко видеть, что решений также нет. Значит, $x = 2$, тогда правая часть равна $2^5 7$, откуда $y = 2$, $z = 7$.

Пусть теперь x нечётно. Если $x = p$, где p нечётное простое, то $p^3 - 1 = 2m$, где $m \neq 1$, и $p^5(p^3 - 1)$ не имеет вида $y^5 z$ с простыми y, z. Если же $x = pk$, где p нечётное простое, а $|k| \geqslant 2$, то $x^5 = p^5 k^5$ заведомо не имеет нужного вида. (*Ю. Раскин*)

Серия 1, вып. 13, задача для школьников 6. Условие. Если между цифрами 1 и 6 числа 16 вставить число 15, затем в полученное таким образом число 1156 вставить между цифрами 1 и 5 опять число 15 и так поступить произвольное число раз и далее, вставляя каждый раз число 15 между 1 и 5, то полученное число будет квадратом целого числа. Доказать это. (*Предложил С. И. Городов*)

Решение. Пусть число 15 вставили n раз. Тогда получилось число $\underbrace{1\ldots1}_{n+1}\underbrace{5\ldots5}_{n}6$. Его можно записать как

$$\underbrace{1\ldots1}_{n+1}\cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{n}5 + 1 = \underbrace{3\ldots3}_{n+1}\cdot\underbrace{3\ldots3}_{n}5 + 1 = (\underbrace{3\ldots3}_{n}4)^2 - 1 + 1 = (\underbrace{3\ldots3}_{n}4)^2.$$

(*Ю. Раскин*)

Серия 1, вып. 13, задача для школьников 7. Условие. Доказать формулу

$$n! + \frac{(n+1)!}{1!} + \frac{(n+2)!}{2!} + \ldots + \frac{(n+k)!}{k!} = \frac{(n+k+1)!}{k!(n+1)}.$$

(*Б. А. Оксенов*)

Решение. Проведём индукцию по k. Случай $k=0$ очевиден. Пусть для k формула верна. Докажем её для $k+1$:

$$n!+\frac{(n+1)!}{1!}+\frac{(n+2)!}{2!}+\ldots+\frac{(n+k+1)!}{(k+1)!}=\frac{(n+k+1)!}{k!(n+1)}+\frac{(n+k+1)!}{(k+1)!}=$$
$$=\frac{(n+k+1)!(k+1)}{(k+1)!(n+1)}+\frac{(n+k+1)!(n+1)}{(k+1)!(n+1)}=\frac{(n+k+2)!}{(k+1)!(n+1)},$$

что и требовалось. (*Ю. Раскин*)

8.7. Условие. Докажите, что для любых целых неотрицательных n, p найдётся такая константа $C>0$, что для любой бесконечно дифференцируемой функции f условия

$$\int_0^1 x^n|f^{(k)}(x)|^p dx<1;$$

$$p>1,\quad k=0,\ldots,\left\lfloor\frac{n+p+1}{p}\right\rfloor \quad \text{или} \quad p=1,\quad k=0,\ldots,n+1,$$

влекут условие $|f(0)|<C$. (*А. Я. Канель*)

Замечание. В тексте, опубликованном в выпуске 8, имелись опечатки: указано $1/p$ вместо p в подынтегральном выражении и $\left\lfloor\frac{n+p}{p}\right\rfloor$ вместо $\left\lfloor\frac{n+p+1}{p}\right\rfloor$. Для этих условий найден контрпример в виде бесконечно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций

$$f_\varepsilon(x)=\ln\left|\ln\left(\frac{x}{m}+\varepsilon\right)\right|,\quad m\geqslant e,$$

для которых при $n\equiv-1\pmod p$, $p>1$, значения всех интегралов

$$\int_0^1 x^n|f^{(k)}(x)|^p dx,\quad k=0,\ldots,\left\lfloor\frac{n+p}{p}\right\rfloor,$$

меньше единицы, но $\lim_{\varepsilon\to0} f_\varepsilon(0)=\infty$.

Решение. Ключевую роль в доказательстве играет следующая

Лемма. *В условиях задачи*

$$|f^{(k)}(t)|<\frac{n+2p}{p}t^{-(n+p)/p},\quad k=0,\ldots,\left\lfloor\frac{n+1}{p}\right\rfloor,\quad 0<t\leqslant1.$$

Доказательство леммы. Вспомним неравенство Гёльдера для интегралов:

$$\int_a^b |g(x)h(x)|\,dx \leqslant \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q} \left(\int_a^b |h(x)|^{q'} dx\right)^{1/q'}, \quad \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1,\ 1<q.$$

При

$$g(x)=1, \quad h(x)=x^{n/p}|f^{(k)}(x)|, \quad q=\frac{p}{p-1}$$

получаем

$$\left|\int_0^t x^{n/p} f^{(k)}(x)\,dx\right| \leqslant \int_0^t x^{n/p}|f^{(k)}(x)|\,dx \leqslant t^{(p-1)/p}\left(\int_0^t x^n|f^{(k)}(x)|^p dx\right)^{1/p} < 1.$$

Интегрирование по частям даёт

$$\begin{aligned} 1 &> \left|\int_0^t x^{n/p} f^{(k)}(x)\,dx\right| = \\ &= \left|\frac{p}{n+p} t^{(n+p)/p} f^{(k)}(t) - \frac{p}{n+p}\int_0^t x^{(n+p)/p} f^{(k+1)}(x)\,dx\right| \geqslant \\ &\geqslant \left|\frac{p}{n+p} t^{(n+p)/p} f^{(k)}(t)\right| - \left|\frac{p}{n+p}\int_0^t x^{(n+p)/p} f^{(k+1)}(x)\,dx\right| > \\ &> \frac{p}{n+p} t^{(n+p)/p}|f^{(k)}(t)| - \frac{p}{n+p}. \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

Решение задачи при $p=1$ непосредственно следует из леммы. Действительно, многократно интегрируя по частям при $k=n+1$, получаем:

$$\begin{aligned} 1 > \left|\int_0^1 x^n f^{(n+1)}(x)\,dx\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(A_n^{n-k} f^{(n-k)}(1)\right) + (-1)^n n! \int_0^1 f'(x)\,dx\right| = \\ &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} A_n^{n-k} f^{(n-k)}(1) + (-1)^n n!(f(1)-f(0))\right|, \end{aligned}$$

где

$$A_n^{n-k} = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Поскольку при $k=0,\ldots,n$ согласно лемме $|f^{(k)}(1)| < n+2$, получаем, что $|f(0)|$ ограниченна.

Перейдём к случаю $p > 1$. Интегральное неравенство Гёльдера меняет знак при $0 < q < 1$:

$$\int_a^b |g(x)h(x)|\,dx \geqslant \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q} \left(\int_a^b |h(x)|^{q'}dx\right)^{1/q'},$$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \quad 0 < q < 1.$$

Пусть $n = mp + r$, где $0 \leqslant r < p$. Если $r < p - 1$, то, применяя неравенство Гёльдера для

$$g(x) = x^r, \quad h(x) = x^{mp}|f^{(k)}(x)|^p, \quad q = \frac{1}{1-p}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

получаем, что для интегралов

$$\int_0^1 x^n|f^{(k)}(x)|^p dx, \quad n = mp + r, \quad 0 \leqslant r < p - 1$$

выполняются неравенства

$$1 > \int_0^1 x^n|f^{(k)}(x)|^p dx = \int_0^1 x^r\left(x^m|f^{(k)}(x)|\right)^p dx \geqslant$$

$$\geqslant \left(\int_0^1 x^{r/(1-p)}\,dx\right)^{1-p} \left(\int_0^1 x^m|f^{(k)}(x)|\,dx\right)^p.$$

(При $0 \leqslant r < p - 1$ интеграл $\int_0^1 x^{r/(1-p)}\,dx$ конечен, так что конечны и интегралы $\int_0^1 x^m|f^{(k)}(x)|\,dx$ для $k = 0, 1, \ldots, \left\lfloor \dfrac{n+p+1}{p} \right\rfloor = m + 1$.) Действуя как в случае $p = 1$ с заменой n на m (и используя лишь $\left\lfloor \dfrac{n+p}{p} \right\rfloor$ производных), получаем нужный результат.

При $r = p - 1$ неравенство Гёльдера применить нельзя, так как появляется расходящийся интеграл. Однако заметим, что

$$\int_0^1 x^{n+1}|f^{(k)}(x)|^p dx \leqslant \int_0^1 x^n|f^{(k)}(x)|^p dx < 1.$$

Поэтому можно рассуждать как выше, заменив n на $n + 1$ и используя $\left\lfloor \dfrac{n+p+1}{p} \right\rfloor$ производных.

Комментарии. 1. Можно показать, что указанное в условии количество k интегральных неравенств не только достаточно, но и необходимо для гарантии ограниченности $|f(0)|$.

2. Задача возникла при рассмотрении доказательства леммы Соболева в книге Р. Нарасимхана «Анализ на действительных и комплексных многообразиях». А. Я. Канель-Белов заметил, что доказательство леммы Соболева удивительным образом сводится к одномерью! Так и появилась эта задача.

(*А. С. Мингажев*)

13.9. Условие. В компании n человек. У каждого своя новость. Они перезваниваются, причём в каждом разговоре собеседники сообщают друг другу все известные им новости.

(б) За один день каждый человек участвует не более чем в одном разговоре. Какое минимальное количество дней необходимо, чтобы все узнали все новости?[1] (*А. В. Анджанс*)

Ответ. Пусть k — такое натуральное число, что $2^{k-1}<n\leqslant 2^k$. Если n чётно, то понадобится k дней, а если n нечётно, понадобится $k+1$ день.

Решение. Покажем сначала, что потребуется хотя бы k дней. Возьмём одного из жителей, пусть это Вася. До первого обмена новостями Васину новость знал только сам Вася, и каждый день число людей, знающих Васину новость, увеличивается не более чем в два раза. Значит, после $k-1$ дней число людей, знающих Васину новость, не больше, чем $2^{k-1}<n$.

Покажем теперь, что k вопросов хватит, если $n\leqslant 2^k$ и n чётно. Нарисуем правильный n-угольник, пронумеруем его вершины $A_1\ldots A_n$ по часовой стрелке и сопоставим каждому жителю по вершине.

Пусть σ_i $(i=1,2,\ldots,k)$ — симметрия относительно срединного перпендикуляра к отрезку $A_{2^{i-1}}A_{2^{i-1}+1}$. Пусть в день с номером i происходит обмен информацией между парами вершин, переходящих друг в друга при симметрии σ_i. Назовём *допустимыми* те движения многоугольника, которые получаются из композиции k симметрий

$$\sigma_k\sigma_{k-1}\ldots\sigma_2\sigma_1$$

вычёркиванием нескольких членов (возможно, всех или ни одного). Способов вычеркнуть члены всего 2^k.

Рассмотрим какую-то вершину A. Несложно видеть, что после первого дня соответствующая новость известна вершинам (то есть лю-

[1] Решение п. (а) см. *Шаповалов А. В.* Задача о сплетниках // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 19. М.: МЦНМО, 2015. С. 249–253.

дям) A и $\sigma_1 A$, после второго дня — вершинам A, $\sigma_1 A$, $\sigma_2 A$ и $\sigma_2\sigma_1 A$. Рассуждая таким образом, приходим к тому, что после k-го дня эта новость известна тем вершинам, которые являются образами вершины A при всевозможных допустимых движениях.

Покрасим стороны нашего n-угольника в два цвета чередующимся образом. Рассмотрим симметрии n-угольника, сохраняющие раскраску сторон. Такими симметриями можно перевести любую вершину в любую. Утверждение задачи для чётного n вытекает теперь из следующего факта.

Лемма. *Множество допустимых движений совпадает с множеством всех симметрий многоугольника, сохраняющих раскраску сторон.*

Доказательство. Очевидно, что все допустимые движения сохраняют двухцветную раскраску сторон. Количество движений, сохраняющих раскраску, равно n. Поэтому достаточно показать, что количество допустимых движений не меньше, чем n.

Рассмотрим, в какие вершины переходит вершина A_1. Индукцией по i нетрудно показать, что при $i < k$

$$\bigl\{s_i s_{i-1} \ldots s_2 s_1 A_1,\ \text{где } s_j \text{ — это } \sigma_j \text{ или тождественное преобразование при } j = 1, \ldots, i\bigr\} = \{A_1, \ldots, A_{2^i}\}.$$

Стало быть, A_1 можно перевести допустимыми движениями в любую другую вершину, а их количество равно n. □

Пусть теперь число людей нечётно. Так как они не могут разбиться на пары, в каждый из дней найдётся человек, который ни с кем в этот день не общался. Назовём Васей того, кто не участвовал в разговорах в первый день. Перед *вторым* днём Васину новость знал ровно один человек, и с каждым днём число знающих её увеличивается не более, чем в два раза. Тогда после k-го дня её будут знать не больше, чем $2^{k-1} < n$ человек.

Покажем, как справиться за $(k+1)$ дней. Разделим всех жителей на две группы: в первой 2^{k-1} человек, во второй группе остальные $n - 2^{k-1} < 2^{k-1}$ человек. В первый день устроим $(n - 2^{k-1})$ разговоров — пусть каждый из второй группы говорит с кем-то из первой группы, а остальные не участвуют. Теперь применим алгоритм для 2^{k-1} людей к первой группе, для этого потребуется ещё $k-1$ день. После этого каждый человек из первой группы знает вообще все новости. В последний день проведём те же разговоры, что и в первый день, теперь новости узнают все люди из второй группы.

(*И. В. Митрофанов*)

20.10. Условие. Дан многочлен $P(x)$ степени n с целыми коэффициентами, e — основание натуральных логарифмов. Докажите, что

$$\max_{x\in[0,1]} |P(x)| > e^{-n}.$$

(*Международная студенческая олимпиада*, 2015.
Предложил Гёза Кош, Венгрия)

Решение. Мы будем использовать два нетривиальных, но достаточно известных факта.

Факт 1. Число e не является алгебраическим.

Факт 2. Обозначим $f(N) = \text{НОК}(1, 2, \ldots, N)$. Тогда

$$\frac{\ln f(N)}{N} \to 1 \quad \text{при } N \to \infty.$$

Это утверждение является одной из переформулировок *теоремы о распределении простых чисел*.

Перейдём к решению задачи. Обозначим $M = \max_{x\in[0,1]} |P(x)|$.

Для натурального k рассмотрим интеграл

$$J_k = \int_0^1 (P(x))^{2k} dx.$$

Очевидно, $0 < J_k < M^{2k}$ и $J_k \in \mathbb{Q}$.

Пусть

$$(P(x))^{2k} = \sum_{i=0}^{2kn} a_{k,i} x^i.$$

Тогда

$$J_k = \sum_{i=0}^{2kn} \frac{a_{k,i}}{i+1}.$$

Рациональное число J_k больше нуля, а его знаменатель является делителем наибольшего общего кратного чисел $1, 2, \ldots, 2kn+1$.

В наших обозначениях $f(N) = \text{НОК}(1, 2, \ldots, N)$, тогда

$$M > (f(2nk+1))^{-2k}.$$

Из Факта 2 следует, что для всех $\varepsilon > 0$ и для достаточно большого k выполнено неравенство

$$f(2kn+1) < e^{(1+\varepsilon)(2kn+1)},$$

а следовательно,

$$M > (e^{(1+e)(2kn+1)})^{-2k} = \frac{1}{e^{1+\varepsilon}\left(n+\dfrac{1}{2k}\right)}.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ и потом устремляя ε к нулю, получаем $M \geqslant 1/e^n$.

Число M является алгебраическим как значение P в алгебраической точке (корень производной $P'(x)$ или конец отрезка). Так как e трансцендентное, случай равенства невозможен.

Комментарий. Константу $1/e \approx 0{,}3679$ можно улучшить, оптимальная константа находится между 0,4213 и 0,4232 (см. `https://arxiv.org/abs/1307.5361`).

(*Гёза Кош*)

24.7. Условие. Докажите, что при бесконечно многих n набор чисел $1, \ldots, 3n$ можно разбить на n групп по три числа так, чтобы одно из чисел каждой группы было равно сумме двух других. (*Фольклор*)

Решение. Индукцией по k покажем, что для чисел вида $n = 4^k - 1$ такое разбиение существует. *База индукции* $k=1$ тривиальна: $3=1+2$.

Индукционный переход. Возьмём существующее по предположению индукции разбиение чисел $1, \ldots, 4^k - 1$ на тройки и домножим все эти числа на 2. Получится разбиение всех чётных чисел от 2 до $2 \cdot 4^k - 2$ на тройки, где в каждой тройке одно из чисел — сумма двух других. Оставшиеся числа от 1 до $4^{k+1} - 1$ разобьём на тройки следующим образом:

$$\begin{gathered}
(2 \cdot 4^k - 1) + 2 \cdot 4^k = 4^{k+1} - 1,\\
(2 \cdot 4^k - 3) + (2 \cdot 4^k + 1) = 4^{k+1} - 2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(2 \cdot 4^k - (2i+1)) + (2 \cdot 4^k + i) = 4^{k+1} - i - 1,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
1 + (3 \cdot 4^k - 1) = 3 \cdot 4^k.
\end{gathered}$$

Легко видеть, что каждое из этих чисел действительно входит ровно в одну тройку. (*И. В. Митрофанов*)

25.9. Условие. Одновременно бросается несколько игральных кубиков. Кубики могут быть несимметричны, и они не обязательно одинаковы. Докажите, что случайная величина «*остаток от общей суммы очков по модулю* 11» не распределена равномерно на числах от 0 до 11. (*И. В. Митрофанов*)

Решение. Рассмотрим какой-нибудь из кубиков. Обозначим $a_1, \ldots, a_6$ вероятности, с которыми он при броске выдаёт числа от 1 до 6 соответственно. Многочлен $a_1x + \ldots + a_6x^6$ назовём *производящим многочленом* этого кубика. Пусть всего кубиков n, и их производящие многочлены $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$.

Если бросаются эти кубики одновременно, то вероятность того, что сумма выпавших очков равна b, равна коэффициенту при x^b у произведения многочленов $P(x) = p_1(x)p_2(x) \ldots p_n(x)$. Пусть

$$P(x) = A_0 + A_1x + \ldots + A_{6n}x^{6n}.$$

У многочлена $P(x)$ мономы разбиваются на 11 групп: в первой группе члены с x в степени с показателем, делящимся на 11, во второй группе — мономы вида $A_{11k+1}x^{11k+1}$, и так далее.

Если бы все остатки суммы очков по модулю 11 имели одинаковую вероятность, то в каждой из 11 групп сумма коэффициентов мономов была бы равна 1/11. Тогда комплексный корень 11-й степени из единицы

$$t = \cos\frac{2\pi}{11} + i\sin\frac{2\pi}{11}$$

являлся бы корнем многочлена P. А значит, t обнуляет какой-то из многочленов p_i. Покажем, что так не бывает. Рассмотрим

$$p_i(t) = a_1t + \ldots + a_6t^6 = t(a_1 + \ldots + a_6t^5).$$

Если $p_i(t) = 0$, то мнимая часть хотя бы одного из чисел a_1, a_2t, $\ldots$, a_6t^5 отрицательна. Но все коэффициенты a_i (вероятности выпадения соответствующей грани) — положительные числа, поэтому аргументы чисел a_0, a_1t, $\ldots$, a_6t^5 пробегают значения от 0 до $10\pi/11$. Ни одно из этих чисел не может иметь отрицательную мнимую часть, а значит, и остатки от деления на 11 не распределены равномерно.

Комментарий. Эта задача обобщает задачу 11 из конкурса решения задач Санкт-Петербургского математического общества 2012–2013 года (см. `http://www.mathsoc.spb.ru/konkurs/contest12.pdf`).

(*И. В. Митрофанов*)