Наш семинар: математические сюжеты

Ещё немного о математике раскрасок

А. М. Райгородский

§ 1. Была недавно такая задачка...

В 2022 году я в очередной раз руководил командой, которая составляла вариант Московской математической олимпиады для 10-го класса. И придумал задачку, которая попала на шестую позицию. Сейчас я её здесь сформулирую и сразу же решу. Но это будет только началом большой истории, которая выведет нас буквально на передний край современной комбинаторики и теории графов. Формулировку и решение привожу дословно по тексту из брошюры [1].

Формулировка. Андрей Михайлович выписал на доску все возможные последовательности длины 2022, состоящие из 1011 нулей и 1011 единиц. Назовём две последовательности *совместимыми*, если они совпадают ровно в 4 позициях. Докажите, что Андрей Михайлович может разбить все последовательности на 20 групп так, чтобы никакие две совместимые последовательности не попали в одну группу.

Решение. Понятно, что совместимые последовательности совпадают в двух позициях по единицам, а в двух — по нулям. Рассмотрим первые пять позиций. Существует $C_5^3 = 10$ способов поставить три единицы на эти пять позиций. Для каждого из этих десяти способов А. М. выделяет группу написанных на доске последовательностей, первые три единицы которых стоят на соответствующих трёх позициях. Таким образом, А. М. разбивает на десять групп все написанные на доске последовательности, у которых на первых пяти позициях встречаются хотя бы три единицы. Кроме того, любые две последовательности из одной группы совпадают по единицам хотя бы в трёх позициях, следовательно, не являются совместимыми. Аналогично А. М. разбивает на десять групп все написанные на доске последовательности, у которых на первых пяти позициях встречаются хотя бы три нуля. А поскольку у каждой последовательности на первых пяти позициях встречаются или три нуля, или три единицы, А. М. разбил все последовательности на 20 групп.

Из решения видно, что число 2022 в формулировке выбрано исключительно из соображений «стиля». Подойдёт любое чётное число n, а в последовательностях тогда будет по $n/2$ единиц и нулей. Ответ 20 при сохранении метода решения не изменится. Несложно придумать и ещё одно обобщение. А именно, пусть n — чётное число, снова выписаны все последовательности из $n/2$ единиц и $n/2$ нулей, но теперь две последовательности *совместимы*, если они совпадают ровно в $2s$ позициях, где s — любое целое неотрицательное число, меньшее чем $n/2$. Данное нами решение воспроизводится практически дословно, и число групп получается равным $2C_{2s+1}^{s+1} = 2C_{2s+1}^{s}$. Любопытно, что, поставь мы задачу сразу в таком виде, вряд ли бы она заняла шестую позицию в варианте: биномиальный коэффициент даёт намёк на то, как нужно действовать.

Скоро мы узнаем, что всё, о чём мы до сих пор говорили, лишь верхушка айсберга. Для этого мы в следующем разделе переведём задачу на язык теории графов.

§ 2. На языке графов

Прежде всего договоримся, что всюду далее мы будем встречаться только с обыкновенными (простыми) графами, т. е. графами, у которых нет кратных рёбер, нет ориентации и нет петель. Желая подчеркнуть, что данный граф G имеет множество вершин V и множество рёбер E, мы будем писать, как это принято, что $G = (V, E)$.

Теперь напомним одну очень важную характеристику графа — его *хроматическое число*. Для данного графа $G = (V, E)$ хроматическое число — это минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить все вершины из множества V, чтобы концы каждого ребра из множества E имели разные цвета. Обозначается хроматическое число $\chi(G)$. Например, если C_n — это простой цикл на n вершинах (рис. 1), то $\chi(C_n) = 2$ при чётных n и $\chi(C_n) = 3$ при нечётных n. А если

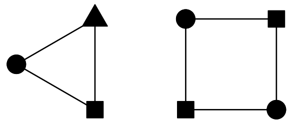

Рис. 1

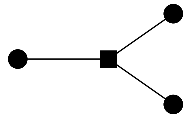

Рис. 2

T_n — дерево с $n \geqslant 2$ вершинами, то $\chi(T_n) = 2$ (рис. 2). Если же, скажем, K_n — это полный граф на n вершинах, т. е. граф, в котором проведены все возможные $C_n^2 = n(n-1)/2$ рёбер, то $\chi(K_n) = n$.

В целом хроматические числа графов устроены крайне непросто. Легко лишь проверить, что граф с хотя бы одним ребром тогда и только тогда имеет хроматическое число 2 (красится в 2 цвета или, как ещё говорят, *двудолен*), когда в нём нет простых циклов C_n с нечётным n. Доказательство утверждения в одну сторону («необходимость») очевидно (см. предыдущий абзац), а доказательство в другую сторону («достаточность») посложнее, но читатель, который ранее не знал этого факта, может найти его в литературе или даже самостоятельно доказать. Уже проверка существования раскраски графа в 3 цвета — алгоритмически трудная проблема.

Мы не будем много времени тратить здесь на обсуждение различных вопросов, которые возникают в связи с понятием хроматического числа, хотя они безумно интересны. Наша цель — олимпиадная задача и её обобщение из первого раздела. При чём же здесь хроматические числа?

Пусть n — чётное число, а s — неотрицательное целое число, строго меньшее чем $n/2$. Обозначим через $J(n, s)$ граф, вершинами которого служат все возможные последовательности из $n/2$ единиц и $n/2$ нулей, а рёбрами соединены все пары вершин, отвечающих совместимым последовательностям, т. е. последовательностям, совпадающим ровно в $2s$ позициях. Что значит покрасить вершины этого графа согласно условиям из определения хроматического числа? «Концы каждого ребра должны иметь разные цвета.» Это то же самое, что разбить множество вершин (последовательностей) на группы (цвета) так, чтобы никакие две совместимые последовательности не попали в одну группу. Таким образом, результат первого раздела — это утверждение о том, что независимо от величины n справедливо неравенство $\chi(J(n, s)) \leqslant 2C_{2s+1}^s$. Здесь именно неравенство, так как мы лишь предложили способ покраски, но отнюдь не доказали, что он оптимален, т. е. даёт *минимальное* количество цветов, как это требуется в определении хроматического числа.

Раз мы не знаем, оптимальна ли «олимпиадная» оценка, значит, нужно подумать о нижних оценках величины $\chi(J(n, s))$. Об этом мы

$$
\begin{array}{ccl}
1\ldots\ldots\ldots 1\,0\ldots\ldots\ldots 0 & & \left\{1,2,\ldots,\frac{n}{2}-s+1,\ldots,\frac{n}{2}\right\} \\
0\ldots 0\underbrace{1\ldots 1}_{s}\,\underbrace{1\ldots 1}_{s}0\ldots 0 & \longleftrightarrow & \qquad\left\{\underbrace{\frac{n}{2}-s+1,\ldots,\frac{n}{2}}_{s},\frac{n}{2}+1,\ldots,n-s\right\}
\end{array}
$$

Рис. 3

поговорим в третьем разделе, а пока дадим ещё один равносильный вариант определения графа $J(n,s)$, с которым нам будет удобно работать. В этом варианте вершинами графа служат все возможные $n/2$-элементные подмножества множества $\mathscr{R}_n=\{1,\ldots,n\}$, а рёбрами две вершины соединяются тогда и только тогда, когда соответствующие подмножества имеют ровно s общих элементов. На рис. 3 показано, почему исходное определение эквивалентно приведённому только что.

§ 3. Нижние оценки хроматического числа

3.1. Две общие оценки

Есть множество разных способов получения нижних оценок для хроматического числа графа. Но наиболее естественными и применимыми являются два из них. О них мы поговорим в этом параграфе.

Во-первых, в графах бывают *клики*. Клика — это просто любой полный подграф. Например, любое ребро в графе — это клика на двух вершинах (2-клика), и даже одна вершина считается 1-кликой, ведь петель у нас не бывает. Обозначим через $\omega(G)$ максимальное число вершин в кликах графа G. Например, $\omega(C_3)=3$, так как цикл на трёх вершинах — это треугольник, т. е. 3-клика, но и сам граф является своим подграфом по определению. В то же время $\omega(C_n)=2$ при всех $n\geqslant 4$. Величина $\omega(G)$ называется *кликовым числом* графа. Очевидно, что на покраску вершин любой клики нужно столько цветов, сколько в этой клике вершин, а стало быть, $\chi(G)\geqslant\omega(G)$. Это первая из обещанных оценок.

Во-вторых, в графах бывают «антиклики». Мы взяли это слово в кавычки, поскольку формально в математике такого термина нет. Но он очень удобен для понимания сути. Речь идёт о множествах вершин, никакие две из которых не соединены ребром. Официально такие множества называются *независимыми*, и именно этот термин мы будем употреблять в дальнейшем. Множество вершин клики в графе G — это независимое множество вершин в графе $\overline{G}$, который получается из графа G удалением всех рёбер этого графа и проведением всех рёбер, которых в этом графе не было. Максимальное число вершин в независимых множествах вершин графа G называется *числом независимости* и обозначается $\alpha(G)$. Понятно, что $\alpha(G)=\omega(\overline{G})$. Обозначения напоминают нам о противоположности числа независимости кликовому числу, ведь α и ω — это первая и последняя буквы греческого алфавита.

Прежде чем обсуждать оценку хроматического числа, которая получается с помощью числа независимости, заметим для примера, что $\alpha(C_n)=[n/2]$. А $\alpha(K_n)=1$: мы считаем каждую вершину одновременно и кликой, и независимым множеством.

Теперь поговорим об оценке. Независимое множество… В нём никакие две вершины не соединены ребром. Так ведь это же типичное множество вершин одного цвета в определении хроматического числа! Представим себе, что вершины графа $G=(V,E)$ покрашены в χ цветов, т. е. $V=V_1\cup\ldots\cup V_\chi$, все множества V_i независимые и попарно не пересекающиеся. Тогда

$$|V|=|V_1|+\ldots+|V_\chi|\leqslant\chi\cdot\alpha(G),$$

откуда следует, что $\chi\geqslant|V|/\alpha(G)$. Поскольку это верно для любого допустимого числа цветов, это же верно и для хроматического числа, а поскольку хроматическое число — это число целое, то в итоге справедливо неравенство

$$\chi(G)\geqslant\left\lceil\frac{|V|}{\alpha(G)}\right\rceil.$$

Это и есть вторая оценка.

Есть огромная и очень интересная литература, которая фактически исследует соотношение между этими двумя оценками. Это связано, например, с так называемой теорией Рамсея. Здесь мы не станем обсуждать какие-либо детали, отсылая заинтересованного читателя к двум брошюрам [2, 3]. Возможно, до чтения этих брошюр читателю будет также интересно самому придумать пример такого графа $G_1=(V_1,E_1)$, что

$$\omega(G_1)>\left\lceil\frac{|V_1|}{\alpha(G_1)}\right\rceil,$$

и, наоборот, пример такого графа $G_2=(V_2,E_2)$, что

$$\omega(G_2)<\left\lceil\frac{|V_2|}{\alpha(G_2)}\right\rceil.$$

Это должно подзадорить читателя.

В следующих параграфах мы обсудим обе оценки применительно к нашему графу $J(n,s)$.

3.2. Кликовое число

Давайте считать, что s фиксировано, а n принимает разные значения. Это согласуется с исходной олимпиадной задачей. Там величина s равнялась двум, а n было весьма велико. Пусть, для примера, s и будет двойкой. Пусть, тоже для примера, $n=8$, т. е. n совсем маленькое. Тогда легко построить треугольник, т. е. 3-клику в графе $J(n,s)$, беря в качестве вершин четырёхэлементные подмножества в $\mathscr{R}_8$ вида $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,5,6\}$, $\{1,2,7,8\}$. Пусть теперь $n=10$. Такой, как в первом примере, треугольник уже не получится. В нём числа 1 и 2 общие для всех вершин, но на оставшихся восьми числах уже нельзя построить три попарно непересекающихся подмножества мощности три. Однако можно действовать экономнее. Треугольник $\{1,2,3,4,5\}$, $\{1,2,6,7,8\}$, $\{3,4,6,7,9\}$ отлично умещается в $\mathscr{R}_{10}$. Аналогичная конструкция есть и при $n=12$. Но там она уже впритык задействует все 12 чисел из $\mathscr{R}_{12}$. Понятно, что при $n=14$ треугольников вовсе нет, и то же самое верно при всех $n>14$. Это катастрофа! Получается, что первая оценка хроматического числа при всех сравнительно больших n порождает «мышь», т. е. тривиальное неравенство $\chi(J(n,2))\geqslant 2$.

Это был пример с $s=2$. Но понятно, что при любом фиксированном s найдётся n, начиная с которого в $J(n,s)$ нет треугольников. Достаточно просто посмотреть на конструкцию с рис. 4. Из неё видно, что в множестве размера s должны уместиться $\frac{n}{2}-2s$ элементов третьей вершины, если мы хотим, чтобы вместе с первыми двумя она образовывала треугольник. И это возможно лишь при $\frac{n}{2}-2s\leqslant s$, т. е. $n\leqslant 6s$. Таким образом, оценка кликовым числом совсем не работает.

Читатель в этом месте может выразить изумление: «Как же так? Получается, в графах $J(n,s)$ в большинстве случаев даже треугольников нет! Откуда же могут возникнуть трудности с покраской? Неужели граф без треугольников может иметь большое хроматическое число?» Ещё как может! Бывают даже графы, в которых длина самого короткого простого цикла больше (например) 1000 и у которых, тем не менее,

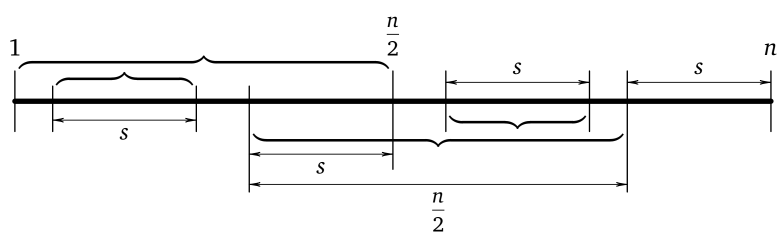

Рис. 4

хроматические числа больше, чем 10^{1000}. И числа 1000, 10^{1000} можно заменить на что угодно большее. Всё равно бывают такие графы. Прочитать об этом можно, например, в статье [4], а мы попробуем в следующем разделе обратиться ко второй оценке хроматического числа.

3.3. Число независимости

С числом независимости всё намного-намного хитрее. Какой наиболее простой способ построить независимое множество вершин в графе $J(n,s)$? Кажется, что проще всего зафиксировать какие-нибудь $s+1$ элементов множества $\mathscr{R}_n$ и рассмотреть все вершины, которые отвечают подмножествам мощности $n/2$, целиком содержащим фиксированные $s+1$ элементов. Тогда рёбер, конечно, не будет, ведь попарные пересечения имеют размеры не меньше $s+1$, т. е. уж точно нет ни одного пересечения по ровно s элементам. К сожалению, во многих случаях бывают ещё бóльшие независимые множества. Приведём лишь один пример. Пусть $n=8$, $s=1$. Тогда только что описанная конструкция состоит из $C_6^2=15$ вершин. Это вершины, отвечающие, скажем, всем 4-элементным подмножествам множества $\mathscr{R}_8$, в каждое из которых входят элементы 1 и 2. Рассмотрим иную конструкцию. Возьмём все 4-элементные подмножества $\mathscr{R}_8$, которые содержат не менее трёх элементов из множества $\mathscr{R}_4$. Любые два таких подмножества уже внутри $\mathscr{R}_4$ имеют не менее двух общих элементов, т. е. соответствующие вершины образуют независимое множество. Но мощность этого множества равна $C_4^3\cdot C_4^1+C_4^4\cdot C_4^0=17$. В статье [5] мы подробно писали о том, как в целом всё устроено в аналогичных задачах о пересечениях множеств. Здесь мы не будем воспроизводить эти подробности. Покажем лишь, что всё опять плохо с оценками хроматических чисел.

Пусть, для примера, $s=6$, а $n=2000$. Заметим, что оценка из олимпиадной задачи имеет величину $2C_{13}^6=1716$. Построим независимое множество вершин в графе $J(2000,6)$, используя идею из предыдущего абзаца. А именно, рассмотрим все подмножества мощности 1000 (вершины) в множестве $\mathscr{R}_{2000}$, которые пересекают множество $\mathscr{R}_{999}$

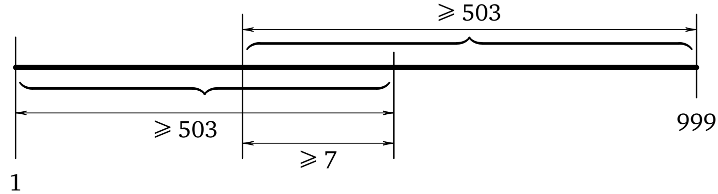

Рис. 5

по не менее, чем 503, элементам. Сложно, да? Ну нет, всё просто. Глядя на рис. 5, сразу ясно, что уже внутри $\mathcal{R}_{999}$ любые два рассмотренных множества пересекаются по хотя бы семи элементам, т. е. соответствующие вершины не образуют рёбер. Сколько же вершин в этом независимом множестве? Понятно, что их

$$C_{999}^{503}\cdot C_{1001}^{497}+C_{999}^{504}\cdot C_{1001}^{496}+\ldots+C_{999}^{999}\cdot C_{1001}^{1}.$$

Значит, $\alpha(J(2000,6))$ точно не меньше этой величины, а оценка

$$\chi(G)\geqslant\left\lceil\frac{|V|}{\alpha(G)}\right\rceil$$

не может быть лучше, чем оценка величиной

$$\left\lceil\frac{C_{2000}^{1000}}{C_{999}^{503}\cdot C_{1001}^{497}+C_{999}^{504}\cdot C_{1001}^{496}+\ldots+C_{999}^{999}\cdot C_{1001}^{1}}\right\rceil.$$

Простая программка позволяет посчитать страшноватую дробь, и оказывается, что гора снова родила мышь: верхняя целая часть страшноватой дроби равна трём. При этом мы только можем утверждать, что ничего лучшего получить нельзя. Вполне возможно, что реальное значение $\alpha(J(2000,6))$ ещё больше, и тогда тройка превратится в двойку…

Мы не хотим перегружать заметку сложными выкладками. Если хорошо владеть инструментами математического анализа, то можно показать, что для любого s существует n, начиная с которого $\lceil|V|/\alpha(G)\rceil$ не превосходит трёх (см. [6]). Это означает, что в большинстве случаев вторая оценка хроматического числа так же или почти так же беспомощна, как и первая.

Что же делать? Может, олимпиадная оценка слишком завышена? Конечно, есть смешной случай $s=0$. В нём олимпиадная оценка имеет величину 2, т. е. совпадает с нижней оценкой через кликовое число. Но граф $J(n,0)$ устроен тривиально. У каждой его вершины есть ровно одна «соседка», т. е. этот граф представляет собой *паросочетание* — набор попарно не смежных рёбер. Разумеется, такой граф двудолен.

И тем не менее, кое-что «смешной случай» подсказывает. Обсудим это в следующем параграфе.

3.4. Кнезеровские графы

Про эти графы мы и раньше писали много. Есть брошюра [7], есть и популярные статьи [8, 9]. Кнезеровским графом называется обобщение графа $J(n,0)$, т. е. как раз «смешного случая» из предыдущего параграфа. Его вершины — это r-элементные подмножества множества $\mathcal{R}_n$, где $r \leqslant n/2$, а рёбра — пары вершин, отвечающих непересекающимся подмножествам. Обозначается кнезеровский граф $KG_{n,r}$. В частности, $KG_{n,1} = K_n$, а $KG_{n,n/2} = J(n, 0)$. Очень легко показать, что $\chi(KG_{n,r}) \leqslant n - 2r + 2$ (можете попробовать доказать сами или подсмотреть в статье [8]). И была гипотеза, сформулированная Кнезером в 1955 году, о том, что $\chi(KG_{n,r}) = n - 2r + 2$. Как и в нашем случае, ни одна из стандартных нижних оценок и близко не давала гипотетическую величину. А в 1977 году Ловас доказал гипотезу с помощью… топологического метода! Рассказ об этом можно найти в брошюре [7] и статье [8], и здесь мы лишь воспользуемся этим удивительным результатом.

Рассмотрим в графе $J(n, s)$ подграф G, который образован вершинами, содержащими числа $1, 2, \ldots, s$. Разумеется, $\chi(J(n, s)) \geqslant \chi(G)$. Теперь рассмотрим граф H, у которого вершины отвечают подмножествам мощности $\frac{n}{2} - s$ множества $\{s + 1, \ldots, n\}$, а рёбрами соединяются две вершины тогда и только тогда, когда соответствующие множества не пересекаются. Очевидно, вершины A и B графа G соединены ребром в том и только том случае, когда вершины $A \setminus \{1, \ldots, s\}$ и $B \setminus \{1, \ldots, s\}$ графа H соединены ребром. Таким образом, G и H изоморфны, т. е., в частности, у них одинаковые хроматические числа. В то же время $H = KG_{n-s, \frac{n}{2}-s}$. Значит,

$$\chi(J(n, s)) \geqslant \chi(G) = \chi(H) = \\ = \chi(KG_{n-s, \frac{n}{2}-s}) = (n-s) - 2\Big(\frac{n}{2} - s\Big) + 2 = s + 2.$$

Ура! Нам удалось оторваться от тривиальности! Если комбинаторные неравенства давали совсем нелепые оценки двойкой или (и то не факт) тройкой, то отныне при всех s и n имеем оценку величиной $s + 2$. Конечно, пришлось использовать бронебойную топологию, и всё равно зазор между оценками кошмарен. Но это уже серьёзное продвижение.

Кстати, насчёт зазора. Как растёт «олимпиадная» величина $2C_{2s+1}^s$? Давайте её тоже оценим. Хорошо известно тождество

$$C_{2s+1}^0 + C_{2s+1}^1 + \ldots + C_{2s+1}^s + C_{2s+1}^{s+1} + \ldots + C_{2s+1}^{2s+1} = 2^{2s+1}.$$

Более того, слагаемые сперва растут, а потом убывают. Наша величина — одна из двух наибольших в сумме. Значит,

$$C_{2s+1}^s \geqslant \frac{2^{2s+1}}{2s+2}.$$

Можно посчитать и точнее с помощью формулы Стирлинга. В любом случае получится, что известная нам сейчас верхняя оценка растёт примерно как экспонента, в то время как нижняя оценка линейна.

Оказывается, чудовищный зазор можно очень мощно сократить, улучшив… верхнюю оценку. В следующем разделе мы свяжем нашу задачу с ещё одним очень красивым разделом комбинаторики раскрасок. Это позволит нам показать, что олимпиадная оценка невероятно завышена и вместо неё справедлива оценка порядка s^2, которая уже совсем не так ужасно смотрится при сравнении с нижней оценкой $s+2$.

§ 4. Задача об уклонении и значительное уточнение олимпиадной оценки

4.1. Гиперграфы и их раскраски

Классическое понятие графа допускает очень естественное обобщение. По сути, что такое граф? Это множество объектов, на которых введены парные отношения (скажем, множество людей и отношение знакомства или множество последовательностей и отношение совместимости). Но ведь на множестве можно и более сложные соотношения рассматривать. Например, есть 30 школьников, из которых пятеро очень любят комбинаторику, ещё пятеро очень любят геометрию, ещё четверо — теорию графов, шестеро — теорию чисел, и т. д. Множества любителей могут и пересекаться. Получается объект, который называется *гиперграфом*. У него, как и у графа, есть вершины (в данном примере это 30 школьников) и есть рёбра (в данном примере это подмножества множества вершин, имеющие мощности 5, 5, 4, 6 и т. д.). В общем случае пишут прямо так же, как и в теории графов: $H = (V, E)$. Только теперь E — это совокупность некоторых подмножеств множества V, и эти подмножества не обязательно двухэлементные и даже не обязательно одинаковой мощности. Для дальнейшего удобства мы будем считать, что одноэлементными или пустыми рёбра всё-таки не бывают. При этом, как и раньше, мы считаем, что в гиперграфе нет кратных рёбер, у рёбер нет ориентации (т. е. они являются сочетаниями) и нет совпадающих вершин (это сочетания без повторений). Отметим, что отсутствие кратных рёбер — это удобное нам сейчас соглашение, хотя в примере со школьниками вполне могли быть и совпадающие множества.

Конечно, графы имеют неоспоримое преимущество перед гиперграфами: их гораздо удобнее рисовать. Типичный «портрет» гиперграфа изображён на рис. 6. Рёбра напоминают эдакие сардельки, и я постоянно упоминаю в лекциях этот аппетитный факт. Смотреть приятно, но понимать, что там за варево, труднее.

Гиперграфы тоже можно красить. Давайте, как и прежде, красить вершины, причём только в два цвета. Условно назовём эти цвета красным и синим. Какая раскраска «лучше»? Ну, например, та, в которой в каждом ребре примерно поровну красных и синих вершин. Разумеется, далеко не всегда такого удаётся добиться. Очень красивая и нетривиальная теорема звучит следующим образом.

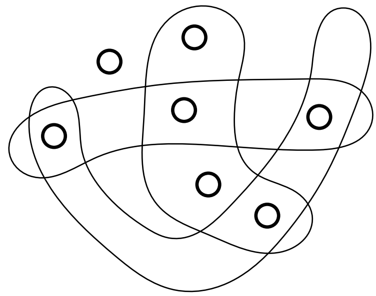

Рис. 6

Теорема 1. *Для любого натурального k существуют $m \in [k, 8k]$ и гиперграф $H = (V, E)$ со следующими свойствами*: (i) $|V| = |E| = m$; (ii) *при любой раскраске множества V в красный и синий цвета найдётся ребро $e \in E$, в котором разность числа красных и синих вершин по модулю не меньше, чем $\sqrt{m}/2$.*

Теорема говорит о том, что для произвольного гиперграфа не только не получится добиться того, чтобы в каждом ребре было поровну (или почти поровну) вершин красного и синего цветов, но и не получится сделать так, чтобы в каждом ребре числа вершин разного цвета отличались меньше, чем на величину порядка корня от количества вершин и рёбер. Иными словами, бывают гиперграфы, на которых *уклонение* любой раскраски от разбиения каждого ребра на две почти равные части весьма велико. Доказательство теоремы 1 и множество других интересных сведений про *задачу об уклонении* можно найти в моих брошюрах [10, 11], в книге [12], а также в статье [13]. В частности, там доказано, что в некотором смысле теорема 1 неулучшаема. Ещё была очень близкая по теме заметка [14], но там до задач об уклонении дело не дошло.

Прежде чем двигаться дальше, дадим небольшие пояснения для тех, кто станет искать доказательство теоремы 1 в только что приведённых источниках. Дело в том, что гиперграф из теоремы 1 удобно строить с помощью так называемых матриц Адамара. Это матрицы размера $m \times m$, состоящие из -1 и 1, причём каждые две строчки ортогональны. Легко видеть, что при $m > 2$ необходимое условие существования матрицы Адамара состоит в том, что m делится на 4 (в книге [10] даны подробные комментарии). Знаменитая гипотеза

Адамара утверждает, что это условие является также достаточным. К сожалению, проблема до сих пор не решена. Найдено множество значений m, для которых матрицу удаётся сконструировать (см., например, [15]), но для очень многих m существование матрицы — всё ещё открытый вопрос. В частности, известна конструкция Пэли, в которой для простых чисел p вида $4k+3$ порядок матрицы равен $p+1$, а для простых чисел p вида $4k+1$ порядок равен $2(p+1)$. Фигурирующий в теореме 1 отрезок $[k, 8k]$ — это просто очень грубая оценка, гарантирующая существование матрицы Адамара порядка $m \in [k, 8k]$. Мы сперва выбираем $p \in [k, 2k]$ согласно постулату Бертрана, а затем получаем m, равное $p+1$ или $2(p+1)$, которое в любом случае с запасом попадает на отрезок до $8k$. Разумеется, можно оценить гораздо точнее, но это в итоге повлияет лишь на константу в оценке, а мы не хотим здесь искать оптимальные константы, нагромождая страшные формулы и рискуя лишить читателя *катарсиса*[1)].

Вероятно, читатель остаётся в недоумении: как по матрице строить гиперграф? Что ж, это как раз совсем легко. Вершины гиперграфа — это номера столбцов матрицы, а каждое ребро — это набор номеров, на которых в данной строчке стоят единицы. Так и получается, что $|V| = |E| = m$.

4.2. Катарсис

Олимпиадная оценка допускает следующее феерическое усиление.

Теорема 2. *Пусть* $32(s+1)^2 \leqslant n$. *Тогда* $\chi(J(n,s)) \leqslant 64(s+1)^2$.

Это действительно очень мощный ход. Вместо экспоненциальной оценки получаем квадратичную! Конечно, зазор между $s+2$ (нижняя оценка) и $64(s+1)^2$ выглядит намного приличнее, чем зазор между $s+2$ и $2C_{2s+1}^{s}$. Однако зазор по-прежнему есть, и, как я обещал в начале статьи, мы выходим здесь на передний край науки: устранение этого зазора — открытая проблема! Сомножитель 64 не оптимален. Его

---

1) Катарсис — это слово, которое я часто употребляю в лекциях, имея в виду восторг, который после долгого и, казалось бы, трудного доказательства должен испытать слушатель, неожиданно осознавший в конце, что же случилось. Ударение правильно ставить на любую из букв «а», хотя считается, что на первую — лучше. Лично я почему-то люблю говорить «катáрсис». Определение из википедии: «катарсис (др.-греч. — возвышение, очищение, оздоровление) — процесс высвобождения эмоций, разрешения внутренних конфликтов и нравственного возвышения, возникающий в ходе самовыражения (в том числе через искусство) или сопереживания при восприятии произведений искусства.» А математика — это искусство!

можно уменьшить. Но это и всё, что мы сейчас умеем. Придумали эту оценку Черкашин, Киселёв и Балог примерно в 2018 году. По факту, их рассуждение — это обобщение идеи из решения олимпиадной задачи. Ну, скоро всё увидим.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 2, заметим ещё, что в ней есть ограничение на s, которое отсутствует в случае олимпиадной оценки. На самом деле, при бо́льших значениях s есть ещё нетривиальные подходы (совсем другие!), которые также позволяют значительно уточнить олимпиадное неравенство. В пятом разделе мы поговорим об одном из них — пожалуй, самом красивом и показательном.

Доказательство теоремы 2. Теорема 1 верна для любого k. Рассмотрим $k = 4(s+1)^2$, возьмём соответствующее $m \in [4(s+1)^2, 32(s+1)^2]$ и соответствующий гиперграф $H = (V, E)$. Поскольку $32(s+1)^2 \leqslant n$, получаем, что $m \leqslant n$. У нас есть множество $\mathcal{R}_n$, из которого формируются вершины графа $J(n,s)$. Давайте отождествим вершины гиперграфа H с первыми m числами из множества $\mathcal{R}_n$ (фактически просто занумеруем вершины гиперграфа). Тогда $V = \mathcal{R}_m$ и каждое ребро $e \in E$ — подмножество в $\mathcal{R}_m \subset \mathcal{R}_n$. При этом каждая вершина A графа $J(n,s)$ — это тоже подмножество в $\mathcal{R}_n$ мощности $n/2$. Таким образом, мы вполне можем пересекать между собою рёбра гиперграфа и вершины графа. Забавно? Ну, вот так.

Зафиксируем произвольное ребро $e \in E$. Если вершина A графа $J(n,s)$ такова, что

$$|A \cap e| \geqslant \frac{|e| + s + 1}{2},$$

то красим вершину A в цвет, который обозначим $\chi_1(e)$. Пусть $\bar{A} = \mathcal{R}_n \setminus A$. Если вершина A графа $J(n,s)$ такова, что

$$|\bar{A} \cap e| \geqslant \frac{|e| + s + 1}{2},$$

то красим вершину A в цвет, который обозначим $\chi_2(e)$. Конечно, никакая вершина не может оказаться покрашенной сразу в оба цвета $\chi_1(e)$, $\chi_2(e)$, ведь иначе получилось бы, что ребро e пересекает и вершину A, и её дополнение $\bar{A}$ по строго более чем половине своих элементов, что, очевидно, невозможно. Однако остаётся ещё три вопроса, ответы на которые завершат доказательство теоремы. Приведём ниже эти вопросы.

1. Всё-таки одна и та же вершина может оказаться покрашенной сразу в несколько цветов. Только эти цвета будут соответствовать разным рёбрам гиперграфа, т. е. вполне может случиться так, что

вершина A покрашена в цвета $\chi_1(e_1)$ и $\chi_2(e_2)$ или в цвета $\chi_1(e_1)$ и $\chi_1(e_2)$. Что делать?

2. Вполне могло бы случиться так, что какая-то вершина A вовсе не покрашена. Это произойдёт, если для каждого $e \in E$ одновременно выполнены неравенства

$$|A \cap e| < \frac{|e|+s+1}{2} \quad \text{и} \quad |\bar{A} \cap e| < \frac{|e|+s+1}{2}.$$

Но так ли это?

3. Если всё-таки две разные вершины покрашены в один и тот же цвет, то почему между ними нет ребра?

Давайте снимем вопросы. Сперва ответим на вопрос 1, потом — на вопрос 3, а в самом конце — на вопрос 2.

Ответ на вопрос 1. Тут всё совсем просто. Если какая-то вершина покрашена в несколько цветов, то выберем любой один из них. Как говорится, «рандомно».

Ответ на вопрос 3. Понятно, что если какие-то две вершины A, B покрашены в один и тот же цвет $\chi_1(e)$, то уже внутри ребра e они пересекаются по, как минимум, $s+1$ элементам (рис. 7), а значит, ребра в $J(n,s)$ между A и B нет. Таким образом, покраска в цвет $\chi_1(e)$ корректна. Если же A и B покрашены в цвет $\chi_2(e)$, то аналогично получаем, что $|\bar{A} \cap \bar{B}| \geqslant s+1$. Но

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = n - |A \cup B| = n - |A| - |B| + |A \cap B| = n - \frac{n}{2} - \frac{n}{2} + |A \cap B| = |A \cap B|,$$

так что $|A \cap B| \geqslant s+1$, и снова покраска корректна.

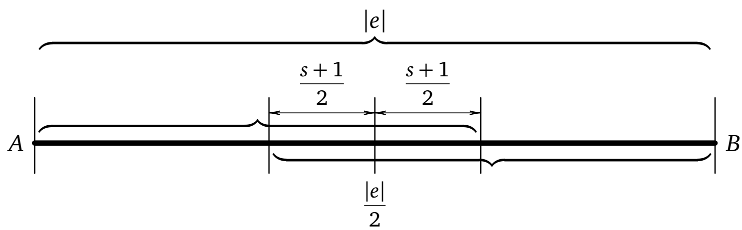

Рис. 7

Ответ на вопрос 2. Давайте убедимся, что все вершины графа $J(n,s)$ покрашены. Пусть A — произвольная вершина. Нам нужно найти такое ребро $e \in E$, что

$$\text{либо} \quad |A \cap e| \geqslant \frac{|e|+s+1}{2}, \quad \text{либо} \quad |\bar{A} \cap e| \geqslant \frac{|e|+s+1}{2}.$$

Для этого мы покрасим... гиперграф! А именно, покрасим вершины гиперграфа H, т. е. элементы множества $\mathscr{R}_m$ в два цвета: элементы, попадающие в множество A, покрасим в синий цвет, а элементы, попадающие в $\overline{A}$, сделаем красными. Мы знаем (по теореме 1), что при любой раскраске вершин гиперграфа H найдётся ребро $e \in E$ с большим уклонением, т. е.

$$||e \cap A| - |e \cap \overline{A}|| \geqslant \frac{\sqrt{m}}{2},$$

где $|e \cap A|$ — число синих вершин в ребре e, а $|e \cap \overline{A}|$ — число красных вершин в том же ребре. Поскольку $m \geqslant k = 4(s+1)^2$, имеем $\sqrt{m}/2 \geqslant s+1$.

Докажем, что найденное ребро и есть то, что мы ищем. Предположим противное:

$$|A \cap e| < \frac{|e|+s+1}{2}, \quad |\overline{A} \cap e| < \frac{|e|+s+1}{2}.$$

Если мы придём к противоречию, то A будет покрашена, а стало быть, и все вершины графа $J(n,s)$ будут покрашены по аналогии. Итак, во-первых, $|A \cap e| < \frac{|e|+s+1}{2}$. Значит, $|\overline{A} \cap e| > \frac{|e|-s-1}{2}$, откуда

$$|A \cap e| - |\overline{A} \cap e| < \frac{|e|+s+1}{2} - \frac{|e|-s-1}{2} = s+1.$$

Во-вторых, $|\overline{A} \cap e| < \frac{|e|+s+1}{2}$. Значит, $|A \cap e| > \frac{|e|-s-1}{2}$, откуда

$$|A \cap e| - |\overline{A} \cap e| > \frac{|e|-s-1}{2} - \frac{|e|+s+1}{2} = -s-1.$$

В итоге получаем, что

$$\Big||A \cap e| - |\overline{A} \cap e|\Big| < s+1,$$

и это противоречит неравенству

$$\Big||e \cap A| - |e \cap \overline{A}|\Big| \geqslant \frac{\sqrt{m}}{2} \geqslant s+1.$$

Итак, мы покрасили все вершины графа $J(n,s)$. Сколько цветов мы использовали? Точно не больше, чем $2|E| = 2m < 16k = 64(s+1)^2$. Это катарсис. $\square$

Как мы говорили выше, теорема 1 неулучшаема, разве что константу в ней можно улучшить. Поэтому трудно ожидать, что аналогичными методами удастся серьёзно продвинуться в вопросе получения верхних оценок хроматического числа.

§ 5. Ещё об оценке с участием числа независимости

Мы знаем, что для любого графа справедливо неравенство

$$\chi(G) \geqslant \left\lceil \frac{|V|}{\alpha(G)} \right\rceil.$$

Очень красивая и несложная вероятностная техника позволяет показать, что для графа $J(n,s) = (V,E)$ верна и очень близкая верхняя оценка, а именно,

$$\chi(J(n,s)) \leqslant \left\lceil \frac{|V|}{\alpha} \cdot (\ln|V| + 1) \right\rceil, \quad \alpha = \alpha(J(n,s)).$$

Что ж, давайте докажем эту оценку. Заметим, что $|V| = C_n^{n/2}$, и положим

$$m = \left\lceil \frac{C_n^{n/2}}{\alpha} \cdot (\ln C_n^{n/2} + 1) \right\rceil.$$

Рассмотрим произвольное независимое множество W вершин графа $J(n,s)$, имеющее мощность α. Пусть σ — случайная перестановка на множестве $\mathcal{R}_n$, подмножествами которого служат все вершины графа $J(n,s)$. Под действием перестановки σ каждая вершина из множества W перейдёт в какую-то новую, вообще говоря, вершину графа $J(n,s)$. Совокупность этих вершин обозначим $\sigma(W)$. Очевидно, $\sigma(W)$ — это тоже независимое множество вершин мощности α. Пусть $A \in V$, т. е. $A \subset \mathcal{R}_n$ и $|A| = n/2$. Какова вероятность того, что $A \in \sigma(W)$? Ясно, что каждая отдельная вершина $B \in W$ переходит в A под действием $((n/2)!)^2$ различных перестановок (мы можем как угодно переставлять между собой элементы множества A и можем как угодно переставлять между собой элементы множества $\overline{A}$). Значит, есть ровно $\alpha \cdot ((n/2)!)^2$ различных перестановок, под действием которых множество $\sigma(W)$ «ловит» вершину A, и, стало быть, искомая вероятность равна

$$\frac{\alpha \cdot ((n/2)!)^2}{n!} = \frac{\alpha}{C_n^{n/2}}.$$

А вероятность, того, что, наоборот, $A \notin \sigma(W)$, равна $1 - \alpha/C_n^{n/2}$. Сделаем m независимых друг от друга (в вероятностном смысле слова) случайных перестановок $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$. Вероятность того, что A не попадёт ни в одно из множеств $\sigma_i(W)$, равна

$$\left(1 - \frac{\alpha}{C_n^{n/2}}\right)^m.$$

Наконец, вероятность того, что *найдётся* вершина $A \in V$, которая не попадёт ни в одно из множеств $\sigma_i(W)$, не превосходит величины

$$C_n^{n/2} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{C_n^{n/2}}\right)^m.$$

Воспользуемся простым фактом из математического анализа:

$$1 - x = e^{\ln(1-x)} \leqslant e^{-x}.$$

Тогда

$$C_n^{n/2} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{C_n^{n/2}}\right)^m \leqslant C_n^{n/2} \cdot e^{-m\alpha/C_n^{n/2}} \leqslant$$
$$\leqslant C_n^{n/2} \cdot \exp\left(-\frac{C_n^{n/2}}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{C_n^{n/2}} \cdot (\ln C_n^{n/2} + 1)\right) = C_n^{n/2} \cdot e^{-(\ln C_n^{n/2}+1)} < 1.$$

Получается, что с положительной вероятностью m случайных перестановок независимого множества W «ловят» все вершины графа, а следовательно, все вершины корректно покрашены в некоторые m цветов. Всё!

Попробуем понять, что же даёт нам доказанное неравенство. Мы помним, что если s достаточно маленькое по сравнению с n, то, по-видимому, дробь $|V|/\alpha$ — это нечто, не превосходящее трёх. В то же время очевидно, что $C_n^{n/2} < 2^n$, откуда $\ln C_n^{n/2} + 1 < n$. Таким образом, при малых s получаем оценку хроматического числа величиной порядка n. В условиях теоремы 2, доказательство которой привело нас к катарсису, это почти всегда хуже, чем результат теоремы 2, ведь при s, сильно меньших корня из n, величина порядка s^2 сильно меньше, чем величина порядка n. С другой стороны, новый результат тоже служит во многих случаях усилением олимпиадного. В самом деле, мы помним, что $2C_{2s+1}^s > 2^{2s+1}/(2s+2)$. Пусть, например, $s > \log_2 n$. Тогда ввиду монотонности роста дроби $2^{2s+1}/(2s+2)$ имеем

$$\frac{2^{2s+1}}{2s+2} > \frac{2n^2}{2\log_2 n + 2} = \frac{n^2}{\log_2 n + 1},$$

и это куда как больше, нежели $3n$ или типа того. Конечно, мы нигде не доказывали, что s порядка логарифма n является «достаточно маленьким» по сравнению с n в том смысле, в каком это нужно было в начале текущего абзаца, но тут уж читателю предлагается просто поверить.

Если s больше, чем граница из теоремы 2, т. е. s растёт по порядку быстрее корня из n, то теорема 2 перестаёт работать, а величина $|V|/\alpha$

становится заметно большей. Мы не будем здесь приводить какие-либо подробности, отсылая заинтересованного читателя к оригинальной статье [16]. Скажем лишь, что оценка из нынешнего раздела в этом режиме очень существенно улучшает олимпиадную.

Завершая заметку, скажем, что изучение графов $J(n, s)$ и их различных обобщений глубоко мотивировано вопросами теории кодирования, теории Рамсея, комбинаторной геометрии и др. Например, хроматические числа этих графов связаны со знаменитой задачей о хроматическом числе пространства (см. [17, 18]), с не менее знаменитой проблемой Борсука (см. [10, 19]) и др.

Список литературы

[1] LXXXV Московская математическая олимпиада. Задачи и решения. М.: МЦНМО, 2022.

[2] *Райгородский А. М.* Вероятность и алгебра в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2015.

[3] *Райгородский А. М.* Модели случайных графов. М.: МЦНМО, 2016.

[4] *Райгородский А. М.* Графы с большим хроматическим числом и большим обхватом // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 20. М.: МЦНМО, 2016. С. 228–237.

[5] *Райгородский А. М.* Задачи о пересечениях множеств // Квант. 2016. № 5–6. С. 2–5.

[6] *Бобу А. В., Куприянов А. Э.* О хроматических числах дистанционных графов, близких к кнезеровским // Проблемы передачи информации. 2016. Т. 52, № 4. С. 64–83.

[7] *Райгородский А. М.* Гипотеза Кнезера и топологические методы в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2011.

[8] *Райгородский А. М.* Гипотеза Кнезера и топологические методы в комбинаторике // Квант. 2011. № 1. С. 7–16.

[9] *Райгородский А. М.* Об одной «олимпиадной» задаче про графы // Квант. 2017. № 2. С. 2–8.

[10] *Райгородский А. М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2015.

[11] *Райгородский А. М.* Задачи о раскрасках. М.: МЦНМО, 2020.

[12] *Алон Н., Спенсер Дж.* Вероятностный метод. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007.

[13] *Райгородский А. М.* Математика раскрасок // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 27. М.: МЦНМО, 2021. С. 99–127.

[14] *Райгородский А. М.* Одна задача о раскраске // Квант. 2019. № 8. С. 15–22.

[15] *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

[16] *Balogh J., Cherkashin D., Kiselev S.* Coloring general Kneser graphs and hypergraphs via high-discrepancy hypergraphs // European J. Combin. 2019. Vol. 79. P. 228–236.

[17] *Райгородский А. М.* Хроматические числа. М.: МЦНМО, 2015.

[18] *Райгородский А., Воронов В., Савватеев А.* Прорыв в задаче о раскраске плоскости // Квант. 2018. № 11. С. 2–9.

[19] *Райгородский А. М.* Проблема Борсука. М.: МЦНМО, 2015.

Андрей Михайлович Райгородский, МФТИ

`mraigor@yandex.ru`