

Инварианты изображений графов на плоскости

А. Б. Скопенков

Мы приводим упрощённое изложение некоторых классических и современных результатов об изображениях графов на плоскости. Материал подобран так, чтобы продемонстрировать яркие недавние многомерные результаты, находящиеся на стыке геометрии, комбинаторики и топологии. В частности, мы определяем *инвариант самопересечения* изображения графа на плоскости и строим алгоритм распознавания планарности. Формулировки и доказательства доступны неспециалистам. Поэтому большую часть данного обзора можно изучить до учебников по алгебраической топологии и использовать в качестве введения в алгебраическую топологию, мотивированного алгоритмическими, комбинаторными и топологическими задачами.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	75
§ 1. Алгоритмические результаты о планарности графов	80
1.1. Линейная вложимость графов	81
1.2. Кусочно-линейная вложимость графов	82
1.3. Число пересечения для ломаных на плоскости	84
1.4. Инвариант самопересечения изображения графа	87
1.5. Полиномиальный алгоритм распознавания планарности	89
1.6. Алгоритм распознавания изотопности вложений	95
1.7. Приложение: некоторые детали к § 1	98
§ 2. Неотъемлемые пересечения для плоскости	101
2.1. Линейные теоремы о неотъемлемых пересечениях	101
2.2. Топологическая теорема о двукратных пересечениях	103
2.3. Топологическая теорема о многократных пересечениях	105
2.4. Приложение: некоторые детали к § 2	107
§ 3. Дополнение: многомерные обобщения	108
3.1. Линейные теоремы о неотъемлемых пересечениях	108
3.2. Топологические теоремы о двукратных пересечениях	110
3.3. Топологические гипотезы о многократных пересечениях	111
3.4. План доказательства теорем 3.3.2.b и 3.3.5.b	114

3.5. Определения и примеры гиперграфов и комплексов	115
3.6. Симплициальная вложимость гиперграфов и комплексов . .	117
3.7. Кусочно-линейная вложимость гиперграфов и комплексов . .	118
3.8. Алгоритмические результаты о PL-вложимости	120
Список литературы	122

ВВЕДЕНИЕ

ЧЕМ ЭТОТ ОБЗОР МОЖЕТ БЫТЬ ИНТЕРЕСЕН

Мы приводим упрощённое изложение некоторых классических и современных результатов об изображении графов на плоскости (§ 1, § 2). Материал подобран так, чтобы продемонстрировать некоторые яркие недавние многомерные результаты, находящиеся на стыке геометрии, комбинаторики и топологии (§ 3).

Мы демонстрируем связь между непланарностью графа K_5 (полного графа на пяти вершинах) результатами о пересечениях ломаных на плоскости в терминах их *внутренностей по модулю 2* (более конкретно, топологическими теоремами Радона и Тверберга для плоскости 2.2.2 и 2.3.2). Недавние контрпримеры к топологической гипотезе Тверберга 3.3.1 (о кратных пересечениях отображений симплекса в \mathbb{R}^d) используют многомерное r -кратное обобщение этой связи (это связь между r -кратной гипотезой ван Кампена — Флореса 3.3.4 и гипотезой 3.3.1).

Напомним, что инварианты узлов изначально были определены с помощью *представлений фундаментальной группы* в начале двадцатого века. Другие инварианты были определены ещё менее элементарным образом в конце двадцатого века. Элементарное изложение инвариантов узлов с помощью плоских диаграмм (начатое Дж. Конвеем во второй половине двадцатого века) привело к всплеску интереса к теории узлов и сделало её частью комбинаторики, а не только топологии.

Аналогично мы приводим элементарные формулировки и доказательства, не упоминающие конфигурационных пространств и когомологических препятствий. Однако основное содержание этого текста — *введение в алгебраическую топологию, мотивированное алгоритмическими, комбинаторными и геометрическими задачами*. Мы полагаем, что изложение простых приложений топологических методов на элементарном языке сделает эти методы более доступными (несмотря на то, что в [MTW10, § 1] это названо «детопологизацией»). Подобное введение в предмет может быть изучено перед учебниками по алгеб-

раической топологии. Существуют и учебники, написанные в духе данной статьи: см., например, [Sk20, Sk].

Более конкретно, крайне полезно открыть или переосмыслить рассуждения из теории гомотопий в терминах инвариантов, определённых через пересечения или прообразы¹⁾. В данном обзоре мы излагаем в терминах кратных пересечений те рассуждения, которые часто излагаются с использованием менее элементарного языка теории гомотопий.

Никаких предварительных знаний алгебраической топологии от читателя не требуется. Важные идеи вводятся на простых частных случаях, свободных от технических деталей, а затем обобщаются. Рассмотрение первого нетривиального частного случая широко применялось классиками, например, В. И. Арнольдом. Таким образом, данный обзор доступен для старшеклассников, студентов и математиков, не специализирующихся в данной области.

СОДЕРЖАНИЕ ОБЗОРА

Оба раздела § 1 и § 2 подводят читателя к переднему краю науки.

В § 1 мы приводим полиномиальный алгоритм распознавания планарности графа (§ 1.5) вместе со всеми необходимыми определениями, а также некоторыми мотивировками и предварительными сведениями (§§ 1.1–1.4). Этот алгоритм, наряду с соответствующим ему критерием планарности (утверждение 1.5.8) и простым доказательством непланарности графа K_5 (§ 1.4), представляет интерес, поскольку допускает обобщение на высшие размерности и кратные пересечения (теоремы 3.1.2, 3.2.2, 3.8.1, 3.8.3, см. также гипотезы 3.1.4 и 3.3.4).

В § 2 мы излагаем в упрощённом виде результаты о кратных пересечениях ломаных на плоскости в терминах их *внутренностей по модулю 2* (топологические теоремы Радона и Тверберга 2.2.2 и 2.3.2). Есть надежда, что обобщение идей из § 1.4, § 2.2, [ST17, леммы 6 и 7] может дать «количественные» версии теорем Тверберга 2.3.2, 3.1.3, см. [Sk18, § 2.3.3].

В § 3 показано, как элементарные факты из § 1 и § 2 иллюстрируют некоторые яркие недавние результаты в старших размерностях. Подробное описание этих недавних результатов выходит за рамки данного обзора. В § 3.1–3.3 мы формулируем классические и современные результаты и гипотезы о полных гиперграфах (поскольку результа-

¹⁾ Примерами таких определений могут служить определение степени отображения [Ma03, § 2.4], [Sk20, § 8] и определение инварианта Хопфа через зацепление (т. е. через пересечение) [Sk20, § 8].

ты касаются только *полных* гиперграфов, мы приводим упрощённые формулировки, не использующие общего понятия гиперграфа). Эти результаты обобщают непланарность графа K_5 (утверждение 1.1.1.a и теорема 1.4.1) и результаты о пересечениях внутренностей ломаных по модулю 2 (линейные и топологические теоремы Радона и Тверберга на плоскости 2.1.1, 2.1.4, 2.2.2, 2.3.2). В § 3.7 мы формулируем современные алгоритмические результаты о реализуемости произвольных гиперграфов. Эти результаты обобщают утверждение 1.2.2.b.

Главным понятием данного обзора, связывающим § 1 и § 2, являются *инварианты самопересечения* (например, числа ван Кампена и Радона, определённые в § 1.4, § 2.2 и принимающие значения в вычетах по модулю 2). Когомологические препятствия, являющиеся обобщениями этих инвариантов, определяются и используются для получения элементарных формулировок и доказательств упомянутых выше результатов из § 1. Приложения и дальнейшие обобщения см. в [Sk16, § 4], [Sk16', ST17]. Об инвариантах плоских кривых и каустиках см. [Ar95] и ссылки в этой книге.

ЗАМЕЧАНИЕ 0.0.1 (обобщения в пяти различных направлениях). Главные результаты данного обзора могут быть получены из самых простых из них (линейных теорем ван Кампена — Флореса и Радона для плоскости 1.1.1.a и 2.1.1) путём обобщения в пяти различных направлениях. Таким образом, эти результаты могут быть естественным образом помечены векторами длины 5.

Во-первых, результат может гарантировать пересечение симплексов различных размерностей или же одной размерности. (Такова связь § 1 с § 2.) Впрочем, это связь между парами сходных результатов, а не между частным случаем и обобщением.

Во-вторых, «качественный» результат о существовании пересечения обобщается до «количественного» результата о нечётности числа пересечений в общем положении. (Такова связь утверждения 1.1.1.a с утверждением 1.1.1.b и т. д.)

В-третьих, линейный результат обобщается до топологического результата, т. е. — в случае данной статьи — кусочно-линейного результата. (Такова связь утверждения 1.1.1.a,b с теоремой 1.4.1 и леммой 1.4.3 и т. д.)

В-четвёртых, результат о двукратных пересечениях обобщается на многократные пересечения. (Такова связь утверждения 1.1.1.a и теоремы 1.4.1 с теоремами 2.1.4 и 2.3.2 и т. д. Заметим, что версия с r -кратными пересечениями может оказаться неверной, если r не является степенью простого.)

В-пятых, результат для плоскости обобщается на высшие размерности. (Такова связь § 1 и § 2 с § 3.)

См. также [KRR+].

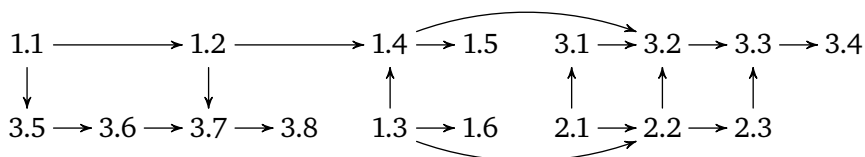
СТРУКТУРА ОБЗОРА

Основные идеи представлены на «олимпиадных» примерах: в размерности 2, на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением к необходимому минимуму алгебраического языка. Более простой материал приводится для того, чтобы сделать естественным и доступным более сложный.

Как правило, мы приводим *формулировку* утверждения перед его *доказательством*²⁾. В таких случаях для доказательства утверждения может потребоваться дальнейший материал. Это всегда явно оговаривается.

Основные результаты называются «теоремами», важные вспомогательные результаты называются «леммами», менее важные результаты, на которые нет ссылок из других разделов, называются «утверждениями». Ещё менее важный или широко известный материал приведён в приложениях. Вы можете рассматривать утверждения как задачи для самостоятельного решения. Освоение материала путём решения задач характерно не только для дзенских монастырей, но и для серьёзного изучения математики.

Мы рекомендуем изучать разделы в любом порядке, согласованном с диаграммой ниже.



ИСТОРИЧЕСКИЕ КОММЕНТАРИИ

Все результаты данного обзора известны.

Исторический обзор, больше мотивировок и доказательств, обсуждение родственных задач и обобщений см. в обзорах [BBZ, Zi11, Sk16,

²⁾ Часто происходит обратное: формулировки красивых результатов и важных проблем, ради которых была придумана теория, приводятся только после продолжительного изучения этой теории (или не приводятся совсем). Это способствует появлению представления о математике как науке, изучающей немотивированные понятия и теории. Такое представление принижает ценность математики.

BZ16, Sh18] (к § 2 и § 3.1-§ 3.3) и [Sk06, Sk14], [MTW, § 1], [Sk, § 5 «Реализуемость гиперграфов и комплексов»] (к § 1 и § 3.7). Обсуждение этих родственных задач и обобщений выходит за рамки данного обзора.

Мы не приводим ссылок на первоисточники по тривиальным или стандартным результатам (таким как утверждения 1.1.1 и 2.3.1), а также по классическим результатам, ссылки на которые есть в упомянутых выше обзорах (например, по теоремам Фари и Радона 1.2.1, 2.1.1, 3.1.1). Мы даём ссылки на современные первоисточники, начиная с [HT74, BV79]. Также мы ссылаемся на простые доказательства (не являющиеся первоисточниками), которые могут быть полезны читателю (например, в связи с данным обзором).

Изложение полиномиального алгоритма распознавания планарности (§ 1.5) новое. Мы приводим элементарную формулировку соответствующего критерия планарности (утверждение 1.5.8). Мы не требуем от читателя знания теории когомологий, но показываем, как некоторые понятия этой теории естественным образом появляются при изучении планарности графов. Ср. с [Fo04], [MTW, приложение D], [Sc13, § 1.4.2].

Элементарная формулировка топологической теоремы Радона (§ 2.2) в духе [Sc04, SZ05], по-видимому, общеизвестна. Элементарная формулировка топологической теоремы Тверберга для плоскости 2.3.2 дана Т. Шенборном и Г. Циглером [Sc04, SZ05].

Статья написана по материалам спецкурсов и докладов на мехмате МГУ, на ФИВТ МФТИ, в НМУ, на матфаке ВШЭ, в летней школе «Современная математика» (до 2015 г.), на Летней конференции Турнира городов и Московской выездной олимпиадной школе. Статья основана на обзоре [Sk18], при переводе которого сделаны сокращения, многочисленные мелкие улучшения в § 1 и в § 2, а также существенные улучшения в § 3.

СОГЛАШЕНИЯ

Под k точками на плоскости (в пространстве) подразумевается k -элементное подмножество плоскости, т. е., считается, что эти k точек различны. Мы часто обозначаем точки просто числами, а не буквами с числовыми индексами.

Для конечного множества S мы обозначаем через $|S|$ количество элементов в множестве S , а через $|S|_2$ чётность количества элементов.

БЛАГОДАРНОСТИ

Благодарю С. Аввакумова, Э. Алкина, П. Благоевича, И. Богданова, У. Вагнера, Р. Живалевича, Т. Зайцева, А. Еннэ, Р. Фулека, Р. Карасева,

Ю. Макарычева, И. Матушека, А. Мирошникова, Е. Морозова, А. Рябичева, М. Скопенкова, Г. Соколова, М. Танцера, Г. Челнокова и М. Шефера за полезные обсуждения. Благодарю Е. Морозова за перевод части текста на русский язык. Благодарю И. Матушека, М. Танцера, У. Вагнера и М. Скопенкова за разрешение использовать рисунки и таблицу из их статей. Компьютерные версии многих рисунков подготовлены издательством МЦНМО.

§ 1. АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О ПЛАНАРНОСТИ ГРАФОВ

Напомним строгие определения некоторых понятий теории графов. (Конечным неориентированным) **графом** (V, E) называется конечное множество V вместе с набором $E \subset \binom{V}{2}$ его двухэлементных подмножеств (т. е. неупорядоченных пар несовпадающих элементов). (Общепринятый термин для этого понятия — *граф без петель и кратных рёбер* или *простой граф*.)

Элементы данного конечного множества называются **вершинами**. Мы считаем, что $V = \{1, 2, \dots, |V|\}$, если не оговорено другое.

Пары вершин из E называются **рёбрами**. Ребро, соединяющее вершины i и j , обозначается через ij (но не через (i, j) , чтобы избежать путаницы с упорядоченной парой вершин).

Граф с n вершинами, любые две из которых соединены ребром, называется *полным* и обозначается K_n . Через $K_{m,n}$ обозначается *полный двудольный граф* с долями из m и из n вершин: в нём соединены рёбрами все пары вершин из разных долей и только они (рис. 1.0.1).

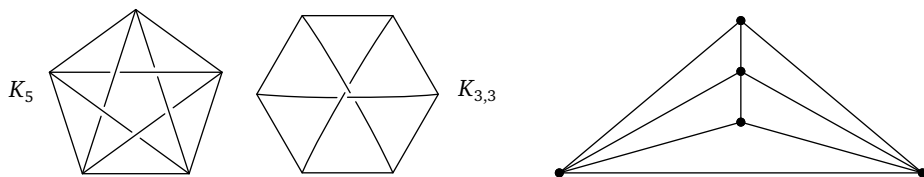


Рис. 1.0.1. Слева: непланарные графы K_5 и $K_{3,3}$.
Справа: изображение графа K_5 без одного из рёбер на плоскости

Говоря нестрого, граф реализуем на плоскости, если его можно «без самопересечений» нарисовать на плоскости. В п. 1.1 и 1.2 мы представим две формализации этого понятия: линейную вложимость и планарность (т. е. кусочно-линейную вложимость). (Они оказываются эк-

вивалентными по теореме Фари 1.2.1; их многомерные версии не эквивалентны, см. [Sk, замечание 5.5.1.a].) Важны обе формализации. Они вводятся независимо друг от друга, поэтому п. 1.1 формально не используется далее (кроме простого утверждения 1.1.1.b, облегчающего доказательство леммы 1.4.3, и замечания 1.1.4). Однако перед более сложным изучением планарности может быть полезно изучить линейную вложимость.

1.1. ЛИНЕЙНАЯ ВЛОЖИМОСТЬ ГРАФОВ

УТВЕРЖДЕНИЕ³⁾ 1.1.1. (a) Из любых 5 точек плоскости можно выбрать две такие непересекающиеся пары точек, что отрезок, соединяющий точки первой пары, пересекает отрезок, соединяющий точки второй пары.

(b) Если среди 5 точек плоскости никакие три не лежат на прямой, то количество точек пересечения внутренностей отрезков, соединяющих данные точки, нечётно.

(c) Для любых 6 точек плоскости, разбитых на две тройки, существуют два пересекающихся отрезка, не имеющих общих вершин, каждый из которых соединяет точки из разных троек.

Утверждения 1.1.1.a,b легко доказываются с помощью рассмотрения выпуклой оболочки точек (см. определение в § 2.1). В п. (c) аналогичный перебор слишком велик, поэтому лучше использовать методы из доказательств лемм 1.4.3 и 1.5.6.

ТЕОРЕМА 1.1.2 (общего положения; см. доказательство в § 1.7). Для любого n существуют такие n точек в трёхмерном пространстве, что отрезки, их соединяющие, не имеют общих внутренних точек.

Граф (V, E) называется **линейно вложимым в плоскость**, если существует $|V|$ точек на плоскости, соответствующих вершинам, таких, что никакой отрезок, соединяющий пару (точек) из E , не пересекает внутренность никакого другого такого отрезка⁴⁾.

Следующие результаты являются классическими.

- Граф K_4 и даже граф K_5 без ребра линейно вложимы в плоскость (рис. 1.0.1 справа).

³⁾ Это «линейные» версии непланарности графов K_5 и $K_{3,3}$. Но доказываются они проще, ибо не требуют леммы о чётности 1.3.2.b.

⁴⁾ Мы не требуем, чтобы никакая изолированная вершина не лежала ни на одном из отрезков, потому что этого всегда можно добиться.

- Ни граф K_5 , ни граф $K_{3,3}$ не вложим линейно в плоскость (утверждение 1.1.1.а,с).
- Любой граф линейно вложим в трёхмерное пространство (теорема общего положения 1.1.2; линейная вложимость в трёхмерное пространство определяется аналогично случаю плоскости).

Критерий линейной вложимости графа в плоскость следует из теоремы Фари 1.2.1 и любого критерия планарности (например, теоремы Куратовского 1.2.3.е).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1.3 [Та, гл. 1 и 6]. *Существует алгоритм распознавания линейной вложимости графов в плоскость, линейный по количеству вершин n .*

Замечание 1.1.4. (а) Строгое определение алгоритма непросто, поэтому мы не приводим его. Этот текст можно изучать, основываясь на интуитивном представлении об алгоритме. Более аккуратно, сформулированное утверждение означает, что существует алгоритм вычисления функции из множества всех графов в множество $\{0, 1\}$, которая сопоставляет графу 0, если он линейно вложим в плоскость, и 1 иначе. Аналогично формализуются другие утверждения об алгоритмах в этом тексте.

(б) Линейность алгоритма означает существование такого числа C , что для любого графа число шагов в алгоритме не превосходит Cn . Поскольку для плоского графа с n вершинами и e рёбрами выполнено $e \leq 3n - 6$ и поскольку существуют графы, линейно вложимые в плоскость, для которых $e = 3n - 6$, «сложность» по количеству рёбер «такая же», как по количеству вершин.

(с) Существование алгоритма из утверждения 1.1.3 следует из того, что для любого n существует алгоритм построения всех n -элементных множеств на плоскости с точностью до *изотопности*. Два подмножества $L, M \subset \mathbb{R}^2$ называются *изотопными*, если существует биекция $f: L \rightarrow M$ такая, что точки $A, B, C, D \in L$ образуют выпуклый четырёхугольник тогда и только тогда, когда точки $f(A), f(B), f(C), f(D) \in M$ образуют выпуклый четырёхугольник.

Существование линейного алгоритма следует из теоремы Фари 1.2.1 и утверждения 1.2.2.

1.2. Кусочно-линейная вложимость графов

Граф (V, E) называется **планарным** (или кусочно-линейно вложимым в плоскость), если на плоскости существует

- набор $|V|$ точек, соответствующих вершинам графа, и

- набор несамопересекающихся ломаных, каждая из которых соединяет принадлежащую E пару точек, причём никакая из ломаных не пересекает внутренность другой ломаной⁵⁾.

Например, графы K_5 и $K_{3,3}$ (рис. 1.0.1) не планарны по теореме 1.4.1 и замечанию 1.4.4.b. Заметим, что обычно приводимый вывод непланарности графа K_5 из формулы Эйлера близок к порочному кругу, см. [Sk20, Замечание в решении задачи 1.3.2.a].

Следующий результат показывает, что любой планарный граф можно нарисовать без самопересечений на плоскости так, что каждое ребро будет отрезком.

ТЕОРЕМА 1.2.1 (Фари). *Если граф планарен, то он линейно вложим в плоскость.*

Историческая справка (включая перечисление математиков, которым приписывается данный результат) и доказательства содержатся в [Та, гл. 6].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2.2. *Существует алгоритм распознавания планарности графов, линейный по количеству вершин n .*

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2.3. (а) Алгоритмы распознавания планарности графов получаются

- из утверждения 1.1.3 и теоремы Фари 1.2.1, или
- из приведённой в (е) теоремы Куратовского (см. детали в [Та, гл. 1 и 6]), или
- при помощи *утолщений* [Sk20, § 1].

Однако эти алгоритмы медленно работают, т. е. являются «экспоненциальными» (при больших n имеют более, чем 2^n шагов для графов с n вершинами) или «галактическими» (см. [Bi21, замечание 1.2b]).

(б) Алгоритм из утверждения 1.2.2 основан на том, что

- граф планарен тогда и только тогда, когда каждый его блок (*компонента трехсвязности*) планарен;
- *трехсвязный* граф допускает не более одного вложения в плоскость.

См. детали в [НТ74] и (более простое изложение) в [ВМ04].

⁵⁾ Тогда любые две ломаные либо не пересекаются, либо пересекаются только по их общей концевой вершине. Мы не требуем, чтобы никакая изолированная вершина не лежала ни на одном из отрезков, потому что этого всегда можно добиться. См. эквивалентное определение планарности в начале п. 1.5.1.

(с) В § 1.5 приводится алгоритм распознавания планарности графов, который (в отличие от алгоритмов из (а, b)) обобщается

- на высшие размерности (ср. с теоремой 3.8.1);
- на *целочисленные и по модулю 2 вложения* графов в поверхности (см. [Sc13, FK19, Bi21]; исторические комментарии см. в [Sc13, замечание после теоремы 1.18] и [Sk18, замечание 1.6.6]);
- на многократные пересечения (см. [MW15, AMS+, MW16, Sk17] и обзор [Sk16]).

Этот алгоритм полиномиален по количеству вершин n . (Полиномиальность означает существование таких чисел C и k , что для любого графа число шагов в алгоритме не превосходит Cn^k .) Построение алгоритма использует эквивалентность планарности и разрешимости некоторой системы линейных уравнений над \mathbb{Z}_2 (предложение 1.5.8 ниже). А для распознавания разрешимости системы N линейных уравнений с коэффициентами в \mathbb{Z}_2 с не более чем N неизвестными существует полиномиальный по N алгоритм (который строится с помощью *исключения неизвестных*, см. детали в [CLR, Vi02]).

(d) Определение гомеоморфности графов приведено, например, в [GDI, § 2.4], [Sk20, п. 5.3 бумажной версии или замечание 5.2.1.a электронной]. Граф планарен тогда и только тогда, когда некоторый граф, гомеоморфный ему, линейно вложим в плоскость⁶⁾.

(е) (ТЕОРЕМА КУРАТОВСКОГО) *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу K_5 или $K_{3,3}$* (рис. 1.0.1).

Историческая справка (включая перечисление математиков, которым приписывается данный результат) и доказательства содержатся в [Th81]. Сравнительно простое доказательство этой теоремы, предложенное Ю. Макарычевым, приведено, например, в [Ma97], [GDI, § 2.9].

1.3. Число ПЕРЕСЕЧЕНИЯ для ломаных на плоскости

Интересные приложения этого пункта приведены далее; приложения к *теореме Жордана* и алгоритмическим вопросам приведены в [Sk20, § 1.4] (теорема Жордана там и сформулирована). Изучение этого пункта можно начать с доказательства утверждений 1.3.4, которые ярко иллюстрируют нетривиальность материала.

⁶⁾ Действительно, если граф планарен, то каждое ребро — это ломаная. Отметив вершины каждой ломаной как вершины нового графа, а звенья каждой ломаной как ребра нового графа, получим требуемое. Доказательство в другую сторону аналогично.

Будем говорить, что несколько точек плоскости **находятся в общем положении**, если никакие три из них не лежат на прямой и никакие три отрезка, их соединяющие, не имеют общей внутренней точки.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3.1. Если вершины двух плоских ломаных находятся в общем положении, то ломаные пересекаются в конечном числе точек.

ЛЕММА 1.3.2 (о чётности). (а) Если 6 вершин двух треугольников на плоскости находятся в общем положении, то контуры этих треугольников пересекаются в чётном числе точек.

(б) Если вершины двух замкнутых плоских ломаных находятся в общем положении, то ломаные пересекаются в чётном числе точек⁷⁾.

Доказательство п. (а). Треугольник разбивает плоскость. (Этот факт, в отличие от кусочно-линейной теоремы Жордана, доказывается без использования леммы о чётности.) Ломаная, составленная из сторон одного треугольника заходит *внутри* другого треугольника столько же раз, сколько выходит *наружу*. (Поэтому если одна из ломаных является треугольником, то п. (б) может быть доказан так же, как п. (а).) \square

Доказательство п. (б). Докажем лемму при помощи индукции по сумме количеств звеньев ломаных. База — п. (а). В доказательстве шага обозначим через $B_1 \dots B_k$ замкнутую ломаную с последовательными вершинами B_1, \dots, B_k . Можно считать, что одна из ломаных не является треугольником. Обозначим её через $A_1 \dots A_n$, а вторую ломаную

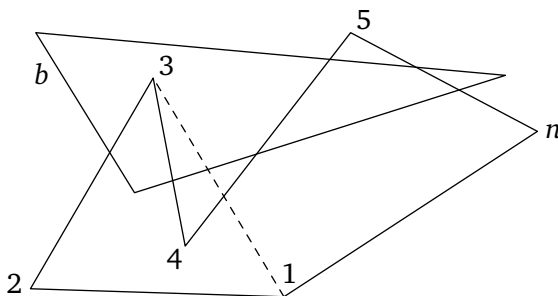


Рис. 1.3.1. Доказательство леммы о чётности 1.3.2.б

⁷⁾ Это нетривиально, поскольку ломаные могут иметь самопересечения и поскольку теорема Жордана нетривиальна. Выводить лемму о чётности из теоремы Жордана или формулы Эйлера неразумно, ибо их доказательства используют лемму о чётности или близкое утверждение.

Будьте осторожны: утверждение [Pr04, задача 1.2] неверно для «восьмёрки» и треугольника, проходящего через точку самопересечения «восьмёрки».

через b . Тогда (рис. 1.3.1)

$$|A_1 A_2 A_3 \dots A_n \cap b| \equiv \frac{|A_1 A_2 A_3 \cap b| + |A_1 A_3 A_4 \dots A_n \cap b|}{2} \equiv 0.$$

Здесь второе сравнение следует из (базы и) предположения индукции. \square

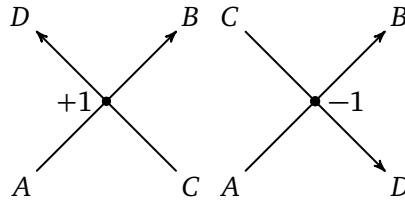


Рис. 1.3.2. Знак точки пересечения

Пусть A, B, C, D — точки на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. **Знаком** точки пересечения ориентированных отрезков \overline{AB} и \overline{CD} на плоскости назовём $+1$, если обход ABC происходит по часовой стрелке, и -1 в противном случае (рис. 1.3.2 и 1.3.3).

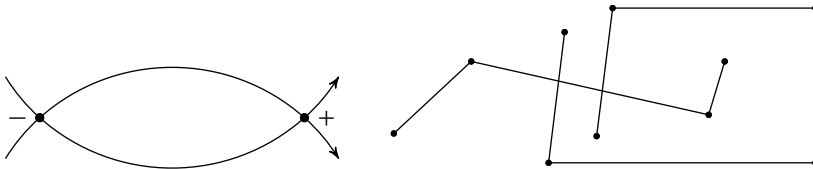


Рис. 1.3.3. Две ломаные на плоскости, пересекающиеся в чётном числе точек, сумма знаков которых равна нулю (слева) и не равна нулю (справа)

Лемма 1.3.3 (о тривиальности). Если вершины двух замкнутых плоских ломаных находятся в общем положении, то сумма знаков точек пересечения ломаных равна нулю.

Эта лемма доказывается аналогично лемме о чётности 1.3.2. Оставшаяся часть этого пункта не используется далее.

1.3.4. (а) На плоскости имеется 14 точек общего положения: 7 красных и 7 жёлтых. Тогда количество всех точек пересечения красных отрезков (т. е. отрезков, соединяющих красные точки) с жёлтыми отрезками чётно.

(б) На плоскости имеется 14 точек общего положения: 7 красных и 7 жёлтых. По красным отрезкам течёт ток. Сумма токов, входящих в любую красную точку, равна сумме токов, из неё выходящих. По жёлтым отрезкам течёт ток с выполнением того же правила Кирхгофа.

Ориентируем каждый красный или жёлтый отрезок направлением тока, текущего по нему. В каждой точке пересечения ориентированных красного и жёлтого отрезков поставим произведение токов, текущих по этим отрезкам, на знак точки пересечения. Тогда сумма всех поставленных чисел (т. е. *поток красного тока через жёлтый*) равна нулю.

Пункт (а) можно доказать напрямую или вывести из замечания 1.3.5.а (которое выводится из леммы о чётности 1.3.2.а). Пункт (б) выводится аналогично п. (а) из того, что для $3 + 3$ точек поток красного тока через жёлтый равен нулю. (Этот частный случай леммы о тривиальности 1.3.3 справедлив, поскольку сила тока на каждом треугольнике постоянна, а знаки точек пересечения чередуются, поэтому сумма равна нулю.)

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3.5 (обобщение на циклы). (а) Верно следующее обобщение леммы о чётности 1.3.2 и предложения 1.3.4.а. Назовём *1-циклом* (по модулю 2) конечный набор отрезков на плоскости, такой, что каждая точка плоскости является концом чётного числа отрезков набора. Тогда любые два 1-цикла, все концы отрезков которых находятся в общем положении, пересекаются в чётном числе точек. Доказательство аналогично вышеприведённому доказательству леммы о чётности 1.3.2; используется индукция по минимальному количеству отрезков в 1-цикле.

(б) Назовём *2-циклом* (по модулю 2) конечный набор треугольников на плоскости, такой, что любой отрезок на плоскости является стороной чётного числа треугольников набора. Тогда если некоторая точка плоскости находится в общем положении с вершинами некоторого 2-цикла, то она принадлежит чётному числу треугольников, образующих 2-цикл.

1.4. ИНВАРИАНТ САМОПЕРЕСЕЧЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ ГРАФА

Будем рассматривать такие изображения графа на плоскости, при которых рёбра изображаются ломаными и допускаются самопересечения. Формализуем это пояснение для графа K_n (формализация для произвольных графов приведена в начале п. 1.5.1).

Кусочно-линейным (PL-)отображением $f: K_n \rightarrow \mathbb{R}^2$ графа K_n в плоскость назовём набор $\binom{n}{2}$ (незамкнутых) ломаных, попарно соединяющих некоторые n точек на плоскости. **Образом** $f(\sigma)$ **ребра** σ назовём ломаную, соответствующую ребру σ . **Образом набора рёбер** назовём объединение образов всех рёбер этого набора.

ТЕОРЕМА 1.4.1 (ср. с утверждением 1.1.1.а). *Для любого PL-отображения графа K_5 в плоскость найдутся два несмежных ребра, образы которых пересекаются.*

Эта теорема выводится из её «количественной версии»: при «почти любом» изображении графа K_5 на плоскости количество точек пересечения несмежных рёбер нечётно. Подумайте, как формализовать «почти любом», и сравните с нижеприведённой формализацией (лемма 1.4.3). Формально, теорема 1.4.1 выводится из леммы 1.4.3 с помощью одной из версий результата [Sk20, лемма 1.4.6b об аппроксимации], ср. с замечанием 3.2.3.b.

Пусть $f: K_n \rightarrow \mathbb{R}^2$ — некоторое PL-отображение. Оно называется PL-отображением **общего положения**, если все вершины ломаных находятся в общем положении. Тогда по утверждению 1.3.1 образы любых двух несмежных рёбер пересекаются в конечном числе точек. Назовём **числом ван Кампена** (или инвариантом самопересечения) $v(f)$ чётность числа точек пересечения образов несмежных рёбер.

ПРИМЕР 1.4.2. Выпуклый пятиугольник и его диагонали образуют такое PL-отображение общего положения $f: K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$, что $v(f) = 1$. Выпуклый четырёхугольник и его диагонали образуют такое отображение $f: K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, что $v(f) = 1$. Треугольник и точка внутри него образуют такое отображение $f: K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, что $v(f) = 0$. Ср. с теоремой 2.1.1 и утверждением 2.1.2.

ЛЕММА 1.4.3 (ср. с утверждением 1.1.1.b). *Для любого PL-отображения общего положения графа K_5 в плоскость число ван Кампена нечётно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду утверждения 1.1.1.b достаточно доказать, что $v(f) = v(f')$ для любых двух PL-отображений общего положения $f, f': K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$, отличающихся только на внутренности одного ребра σ , причём $f\sigma$ — отрезок (рис. 1.4.1). Рёбра графа K_5 , несмежные с σ , образуют цикл (именно это свойство графа K_5 необходимо для доказательства). Обозначим этот цикл через Δ . Тогда

$$v(f) - v(f') = \sum_{\tau: \sigma \cap \tau = \emptyset} (|f\sigma \cap f\tau|_2 - |f'\sigma \cap f'\tau|_2) = |(f\sigma \cup f'\sigma) \cap f\Delta|_2 = 0.$$

Здесь последнее равенство справедливо по лемме о чётности 1.3.2.b. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.4. (а) Пусть $N \subset \mathbb{R}^m$ и $Y \subset \mathbb{R}^n$. Отображение $f: N \rightarrow Y$ называется **непрерывным**, если для любых $x \in N$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любых $y \in N$, удовлетворяющих условию $|x - y| < \delta$,

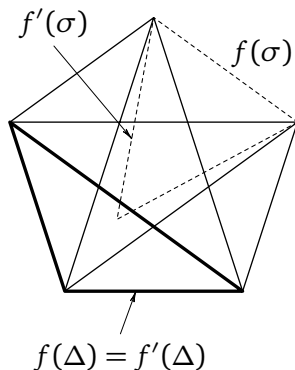


Рис. 1.4.1. Независимость $\nu(f)$ от f

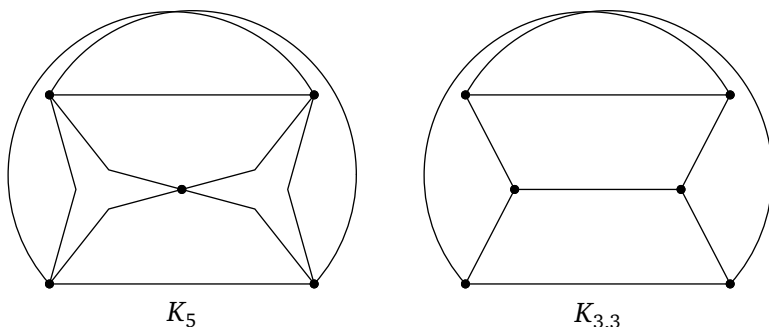


Рис. 1.4.2. «Почти-вложение» $K_5 \rightarrow K_{3,3}$

выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Как правило, мы пропускаем слово «непрерывный» для отображений.

Верен аналог теоремы 1.4.1, полученный заменой «PL» на «непрерывного».

(b) Верны аналоги теоремы 1.4.1 и леммы 1.4.3, полученные заменой графа K_5 на граф $K_{3,3}$, ср. с замечанием 1.7.3.

(c) Непланарность графа $K_{3,3}$ вытекает также из теоремы 1.4.1 и рис. 1.4.2 [Sk03].

1.5. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РАСПОЗНАВАНИЯ ПЛАНАРНОСТИ

1.5.1. РАССТАНОВКА ПЕРЕСЕЧЕНИЙ

Полиномиальный алгоритм распознавания планарности получается из критерия ван Кампена — Ханани — Татта планарности графов (утверждение 1.5.8). Его формулировка формально независима от предыдущего материала. Однако мы показываем, как придумать

этот критерий. Мы рассмотрим естественный объект (расстановку пересечений) для любого «хорошего» (*PL-общего положения*) отображения графа в плоскость (п. 1.5.1). Далее мы исследуем, как этот объект зависит от отображения (утверждение 1.5.4). Так мы получим из этого объекта препятствие к планарности, уже не зависящее от отображения. Линейно-алгебраическая (=кохомологическая) интерпретация этого препятствия и даёт нужный критерий планарности.

Линейным отображением $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ графа $K = (V, E)$ в плоскость назовём отображение $f: V \rightarrow \mathbb{R}^2$. *Образом* $f(AB)$ ребра AB графа назовём отрезок $f(A)f(B)$. Назовём **PL-отображением** $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ графа K в плоскость набор (незамкнутых) ломаных, концы которых соответствуют вершинам графа и при этом сами ломаные — рёбрам графа. (PL-отображение графа K в плоскость — «то же самое», что линейное отображение в плоскость некоторого графа, гомеоморфного графу K .) Образ ребра и набора рёбер определяется аналогично случаю $K = K_n$ (п. 1.4). На этом языке граф планарен, если существует его PL-отображение в плоскость, для которого образы вершин попарно различны, образы рёбер (=ломаные) несамопересекающиеся и никакой образ ребра не пересекает внутренности никакого другого образа ребра.

Линейное отображение графа в плоскость называется *линейным отображением общего положения*, если образы вершин находятся в общем положении; PL-отображение $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ графа K называется PL-отображением **общего положения**, если существует граф H , гомеоморфный графу K , и линейное отображение общего положения графа H в плоскость, «соответствующее» отображению f .

Граф называется \mathbb{Z}_2 -**планарным**, если существует такое его PL-отображение общего положения в плоскость, при котором образы любых двух несмежных рёбер пересекаются в чётном числе точек.

Например, из леммы 1.4.3 следует, что граф K_5 не является \mathbb{Z}_2 -планарным. Аналогично граф $K_{3,3}$ не является \mathbb{Z}_2 -планарным (см. замечание 1.4.4.b). Поэтому и никакой граф K , гомеоморфный K_5 или $K_{3,3}$, не является \mathbb{Z}_2 -планарным (ибо любое PL отображение $K \rightarrow \mathbb{R}^2$ соответствует некоторому PL-отображению $K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ или $K_{3,3} \rightarrow \mathbb{R}^2$). Из этого факта и теоремы Куратовского 1.2.3.e вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.5.1 (Ханани — Татта; ср. с [Sk18, теоремы 2.4.2a и 3.3.4]).
*Граф планарен тогда и только тогда, когда он \mathbb{Z}_2 -планарен*⁸⁾.

⁸⁾ Прямой вывод планарности из \mathbb{Z}_2 -планарности см. в [Sc13]. Прямой вывод \mathbb{Z}_2 -планарности из отсутствия подграфов, гомеоморфных K_5 и $K_{3,3}$, см. в [Sa91].

Итак, осталось построить алгоритм распознавания \mathbb{Z}_2 -планарности.

Пример 1.5.2. Пусть дан граф и произвольное упорядочение его вершин. Расставим его вершины на окружности в заданном порядке. Каждому ребру поставим в соответствие хорду. Получим линейное отображение общего положения графа в плоскость. Для любых несмежных рёбер σ, τ графа количество точек пересечения их образов имеет ту же чётность, что и количество концов ребра σ , лежащих между концами ребра τ .

Пусть $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ — некоторое PL-отображение общего положения графа K . Возьмём любые два несмежных ребра σ, τ . По утверждению 1.3.1 пересечение $f\sigma \cap f\tau$ состоит из конечного числа точек. Поставим в соответствие паре $\{\sigma, \tau\}$ вычет $|f\sigma \cap f\tau|_2$. Обозначим через K^* множество неупорядоченных пар несмежных рёбер графа K . Назовём полученное отображение $K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$ **расстановкой (или коциклом) пересечений** (по модулю 2). Мы называем его расстановкой, чтобы не путать с отображением f . Отображение $K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$ будем отождествлять с подмножеством в K^* (состоящим из пар, переходящих в единицу)⁹⁾.

Замечание 1.5.3. (а) Если граф \mathbb{Z}_2 -планарен, то расстановка пересечений нулевая для некоторого PL-отображения общего положения этого графа в плоскость.

(б) (Ср. с примером 1.5.2) Возьмём линейное отображение $f: K_n \rightarrow \mathbb{R}^2$, для которого $f(1)f(2) \dots f(n)$ — выпуклый n -угольник. Для $n=4$ и $n=5$ расстановки пересечений соответствуют подмножествам $\{\{13, 24\}\}$ и $\{\{13, 24\}, \{24, 35\}, \{35, 41\}, \{41, 52\}, \{52, 13\}\}$. Получаются следующие частичные матрицы (рёбра упорядочены лексикографически).

$$\begin{pmatrix} - & - & - & - & - & 0 \\ - & - & - & - & 1 & - \\ - & - & 0 & - & - & - \\ - & - & 0 & - & - & - \\ - & 1 & - & - & - & - \\ 0 & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} - & - & - & - & - & - & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & 1 & 1 & - & - & 0 \\ - & - & - & - & 0 & - & 1 & - & 1 & - \\ - & - & - & - & 0 & 0 & - & 0 & - & - \\ - & - & 0 & 0 & - & - & - & - & - & 0 \\ - & 1 & - & 0 & - & - & - & - & 1 & - \\ - & 1 & 1 & - & - & - & - & 0 & - & - \\ 0 & - & - & 0 & - & - & 0 & - & - & - \\ 0 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & - & 0 & - & - & - & - & - \end{pmatrix}.$$

⁹⁾ Отображение $K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$ можно также понимать как «частичную матрицу», т. е. симметричную расстановку нулей и единиц в тех клетках таблицы размера $e \times e$, которые отвечают парам несмежных рёбер, где e — количество рёбер графа K .

1.5.2. РАССТАНОВКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ДЛЯ РАЗНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Расстановки $K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$ можно складывать поточечно (покомпонентно): складываются по модулю 2 образы каждой пары. Это соответствует сложению по модулю 2 (т. е. симметрической разности) подмножеств множества K^* .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.5.4. (а) *Расстановка пересечений не меняется при преобразованиях Райдемайстера на рис. 1.5.1.I–IV. (Отображение графа изменяется в круге, как на рисунках, а вне этого круга остаётся без изменений. В п. (а) никакие образы рёбер, кроме изображённых, этот круг не пересекают.)*

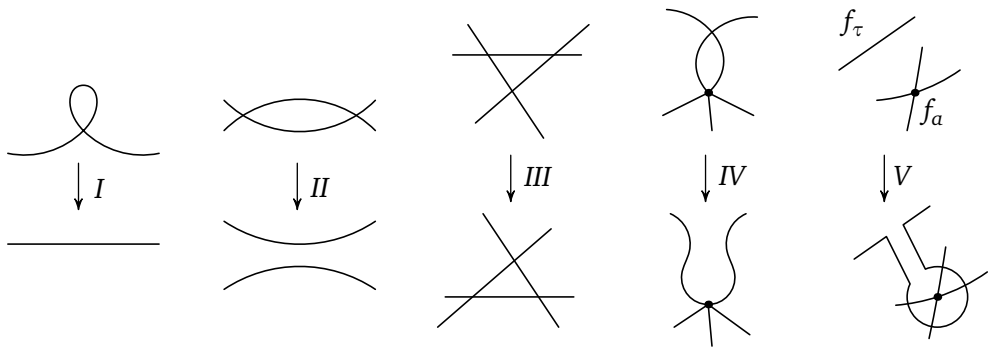


Рис. 1.5.1. Преобразования Райдемайстера для графов в плоскости

(b) Пусть K — граф и вершина A не является концом ребра σ . **Элементарной кограницей** пары (A, σ) называется подмножество $\delta_K(A, \sigma) = \delta(A, \sigma) \subset K^*$, состоящее из всех пар $\{\sigma, \tau\}$ с $\tau \ni A$. Тогда при преобразовании Райдемайстера на рис. 1.5.1. V к расстановке пересечений добавляется $\delta(A, \sigma)$. (В п. (b) образы рёбер, кроме изображённых, могут пересекать круг, в котором делается преобразование. Зато «параллельные» отрезочки проходят «очень близко» друг к другу.)

ПРИМЕР 1.5.5. (а) Имеем

$$\delta_{K_4}(1, 24) = \delta_{K_4}(2, 13) = \delta_{K_4}(3, 24) = \delta_{K_4}(4, 13) = \{\{13, 24\}\}.$$

Итак, расстановка пересечений из замечания 1.5.3.b для $n = 4$ является элементарной кограницей.

(b) Имеем $\delta_{K_5}(3, 12) = \{\{12, 34\}, \{12, 35\}\}$. Поэтому расстановка пересечений из замечания 1.5.3.b для $n = 5$ не является суммой нескольких элементарных кограниц. Действительно, прибавление элементарной кограницы не меняет чётность количества единиц, коих пять.

Назовём расстановки $\nu_1, \nu_2: K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$ (или $\nu_1, \nu_2 \subset K^*$) **КОГОМОЛОГИЧНЫМИ**, если

$$\nu_1 - \nu_2 = \delta(A_1, \sigma_1) + \dots + \delta(A_k, \sigma_k)$$

для некоторых вершин A_1, \dots, A_k и рёбер $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ (не обязательно различных).

Утверждение 1.5.4.b и следующая лемма 1.5.6 показывают, что когомولوجичность — это то отношение эквивалентности на расстановках, которое порождают изменения отображения графа в плоскость.

ЛЕММА 1.5.6. *Расстановки пересечений разных PL-отображений общего положения одного графа в плоскость когомولوجичны¹⁰⁾.*

Доказательство леммы 1.5.6, приведённое ниже, является нетривиальным обобщением доказательства леммы 1.4.3.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.5.7. *Граф \mathbb{Z}_2 -планарен тогда и только тогда, когда расстановка пересечений некоторого (или, эквивалентно, любого) его PL-отображения общего положения в плоскость когомولوجична нулевой расстановке.*

Это следует из леммы 1.5.6 и утверждения 1.5.4.b.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.5.8. *Пусть дан граф и произвольная нумерация его вершин. Этот граф планарен тогда и только тогда, когда следующая система линейных уравнений над \mathbb{Z}_2 разрешима.*

Каждой паре (A, e) , состоящей из вершины и ребра таких, что $A \notin e$, сопоставим переменную $x_{A,e}$. Для каждой неупорядоченной пары несмежных рёбер σ, τ обозначим через $b_{\sigma,\tau} \in \mathbb{Z}_2$ чётность количества концов ребра σ , номера которых лежат между номерами концов ребра τ . Для любых таких пар (A, e) и $\{\sigma, \tau\}$ положим

$$a_{A,e,\sigma,\tau} = \begin{cases} 1, & \text{если } (A \in \sigma \text{ и } e = \tau) \text{ или } (A \in \tau \text{ и } e = \sigma), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для каждой такой пары $\{\sigma, \tau\}$ выпишем уравнение

$$\sum_{A \notin e} a_{A,e,\sigma,\tau} x_{A,e} = b_{\sigma,\tau}.$$

Это следует из теоремы 1.5.1 Ханани — Татта, примера 1.5.2 и утверждения 1.5.7.

¹⁰⁾ Эта лемма вытекает из следующего факта: любые два отображения общего положения одного графа в плоскость можно перевести друг в друга преобразованиями Райдемайстера на рис. 1.5.1. Впрочем, доказать лемму проще, чем этот факт.

1.5.3. Доказательство леммы 1.5.6

Пусть даны граф K и PL-отображения $f, f': K \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения.

Доказательство для частного случая, когда отображения f и f' отличаются только на внутренности одного ребра σ , причём $f\sigma$ — отрезок. Возьмём точку O на плоскости, находящуюся в общем положении относительно множества всех вершин всех ломаных $f\alpha$ и $f'\alpha$ (для всех рёбер α). Для ломаной X в общем положении с циклом $f\sigma \cup f'\sigma$ обозначим

$$X^* := |(f\sigma \cup f'\sigma) \cap X|_2.$$

Докажем, что разность расстановок пересечений $\nu(f)$ для f и $\nu(f')$ для f' равна

$$\nu(f) - \nu(f') = \sum_{B \notin \sigma} Of(B)^* \delta(B, \sigma) = \delta(B_1, \sigma) + \dots + \delta(B_k, \sigma),$$

где B_1, \dots, B_k — все те вершины $B \notin \sigma$, для которых отрезок $Of(B)$ пересекает цикл $f\sigma \cup f'\sigma$ в нечётном числе точек. (Сравните с утверждениями 2.2.1.ab. Набор вершин B_1, \dots, B_k зависит от выбора точки O , но формула справедлива при любом выборе.)

Для любых рёбер α и β , каждое из которых отлично от σ , значения расстановок пересечений $\nu(f)$ и $\nu(f')$ на паре $\{\alpha, \beta\}$ равны.

Для любого ребра PQ , несмежного с σ , значение на паре $\{\sigma, PQ\}$ разности $\nu(f) - \nu(f')$ равно

$$\begin{aligned} (\nu(f) - \nu(f'))_{\{\sigma, PQ\}} &= \\ &= f(PQ)^* \stackrel{(2)}{=} Of(P)^* + Of(Q)^* = \left(\sum_{B \notin \sigma} Of(B)^* \delta(B, \sigma) \right)_{\{\sigma, PQ\}}. \end{aligned}$$

Здесь равенство (2) справедливо, ибо по лемме о чётности 1.3.2.b

$$0 = (Of(P) \cup Of(Q) \cup f(PQ))^* = Of(P)^* + Of(Q)^* + f(PQ)^*.$$

Сведение общего случая к частному (предложено Р. Карасевым). Достаточно доказать лемму для отображения f , отличающегося от f' только на множестве рёбер, выходящих из одной вершины A . Соединим $f(A)$ с $f'(A)$ ломаной общего положения.

Для рёбер σ , не выходящих из A , «подтащим образы $f\sigma = f'\sigma$ к $f'(A)$ вдоль ломаной» так, что

- эта ломаная не пересекает модифицированных образов ребра σ и
- точки пересечения образов таких рёбер σ остаются прежними.

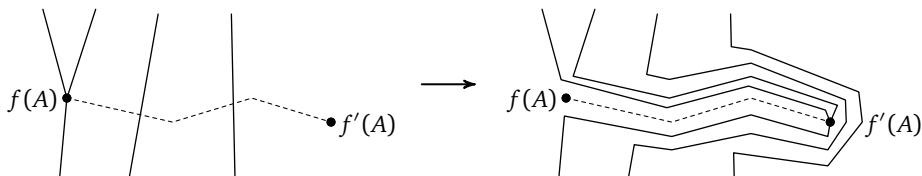


Рис. 1.5.2. Модификация отображения общего положения

Обозначим через

- \bar{f} и \bar{f}' отображения, полученные из f и f' таким «подтаскиванием»;
- f'' отображение, полученное из \bar{f} «подтаскиванием окрестности вершины $f(A) = \bar{f}(A)$ к $f'(A) = \bar{f}'(A)$ вдоль ломаной».

См. рис. 1.5.2. Тогда $\nu(f) = \nu(\bar{f}) = \nu(f'') \stackrel{(1)}{\sim} \nu(\bar{f}') = \nu(f')$. Здесь ко-гомологичность (1) справедлива по рассмотренному частному случаю.

1.6. АЛГОРИТМ РАСПОЗНАВАНИЯ ИЗОТОПНОСТИ ВЛОЖЕНИЙ

В этом пункте мы сокращаем слова «PL-вложение» до «вложение». (Результаты и построения этого пункта справедливы и для топологических вложений, определение которых известно некоторым читателям.)

PL-вложением графа в плоскость называется набор вершин и ломаных из определения планарности, для которого никакая изолированная вершина не лежит ни на одной из ломаных. Точки называются образами вершин, а ломаные — образами ребер. Образом набора рёбер называется объединение образов рёбер набора.

Два вложения $f, g: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ (одного и того же) графа в плоскость называются *изотопными*, если одно можно непрерывно продеформировать в другое так, чтобы в процессе деформации отображение оставалось вложением. Вот строгая формулировка этого условия: существует семейство вложений $f_t: K \rightarrow \mathbb{R}^2$, непрерывно зависящее от параметра $t \in [0, 1]$, для которого $f_0 = f$ и $f_1 = g$.

Например, пары вложений на каждом из рис. 1.6.1.a,b,c не изотопны.

Определение изотопности в трёхмерном и многомерном пространствах см., например, в [Sk20u, § 1], [Is].

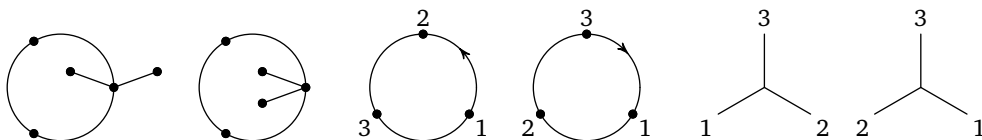


Рис. 1.6.1. Различные вложения в плоскость (а) некоторого графа, (б) окружности и (с) триода

ТЕОРЕМА 1.6.1. *Два вложения связного графа в плоскость изотопны тогда и только тогда, когда их сужения на любой триод и на любой несамопересекающийся цикл изотопны (т. е. не таковы, как на рис. 1.6.1.b,c).*

Эту теорему можно сначала доказать для деревьев, а потом свести общий случай к случаю деревьев путём выделения максимального дерева. Детали технически непросто (как это часто бывает для базовых результатов топологии плоскости)¹¹⁾.

Аналог теоремы 1.6.1 без утверждения в скобках справедлив для вложений в сферу, тор и другие сферы с ручками. Доказательство аналогично.

Мы приведём более сложный критерий изотопности. Он интересен тем, что даёт полиномиальный алгоритм распознавания изотопности, а также обобщается на высшие размерности [Sk06, § 4].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.6.2. *Вложения графа в плоскость изотопны тогда и только тогда, когда их расстановки вращений кохомологичны.*

Чтобы определить расстановку вращений и кохомологичность расстановок, зададим ориентацию на плоскости и направления на рёбрах графа K . Пусть $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ — вложение. Возьмём ребро bc и вершину $a \notin \{b, c\}$.

Пусть сначала образы вершин графа лежат на одной прямой. Тогда определим полуцелое число $\omega(f)_{a \times bc}$ как количество оборотов вектора с началом в вершине $f(a)$ и концом, пробегающим ребро $f(bc)$ в заданном направлении. Это число не будет целым тогда и только тогда, когда $f(a)$ лежит на отрезке $f(b)f(c)$.

Пусть теперь f — произвольное вложение. Возьмём любую ориентированную прямую l на плоскости, не параллельную ни одной прямой, соединяющей образы вершин графа. Рассмотрим вектор с началом в вершине $f(a)$ и концом, пробегающим ребро $f(bc)$ в заданном направлении. Обозначим через $\omega(f, l)_{a \times bc}$ полуразность количеств положительных и отрицательных прохождений этого направления. Определим

$$\omega(f, l)_{bc \times a} := \omega(f, l)_{a \times bc}.$$

¹¹⁾ Теорема 1.6.1 сформулирована в книге [Wu65] со ссылкой на статью Маклейна — Эддисона, которую не удалось найти в указанном там сборнике. Специалисты по топологической теории графов подтверждают, что эта теорема известна (и верна). В книге [Wu65] теорема 1.6.1 сформулирована для вложений даже локально связного континуума (в частности, полиэдра).

1.6.3. Для любых несмежных рёбер ab и cd имеем

$$\omega(f, l)_{a \times cd} + \omega(f, l)_{ab \times d} + \omega(f, l)_{b \times dc} + \omega(f, l)_{ba \times c} = 0.$$

Говоря неформально, обозначим через $\tilde{K}^{(1)}$ множество упорядоченных пар (x, y) точек графа K , одна из которых является вершиной, а другая лежит на стороне, не смежной с этой вершиной. Множество $\tilde{K}^{(1)}$ является объединением конечного числа отрезков, т. е. графом. Вот строгое определение. Вершины графа $\tilde{K}^{(1)}$ — упорядоченные пары $a \times b = (a, b)$, где a и b — различные вершины графа K . Вершина $a \times b$ соединена ребром с вершиной $a \times c$, если b и c соединены ребром в графе K . Аналогично $b \times a$ и $c \times a$ соединены ребром, если b и c соединены ребром. Других рёбер в графе $\tilde{K}^{(1)}$ нет.

1.6.4 (Загадка). Какие графы $\tilde{K}^{(1)}$ получатся, если

- (а) $K = K_{2,1}$ — путь с тремя вершинами;
- (б) $K = K_3$ — цикл с тремя вершинами;
- (с) $K = K_{3,1}$ — триод;
- (д) $K = K_4$?

См. подробнее [ADN+, § 2].

1.6.5 (а–д). Расставьте числа $\omega(f, l)_e$ на рёбрах e графа $\tilde{K}^{(1)}$ (для какой-нибудь прямой l на ваш выбор) для каждого из четырёх вложений f на рис. 1.6.1.б,с.

(е–h) То же для прямой $l' \perp l$.

(i) Если вершины $a \times b$ и $b \times a$ соединены путём в графе $\tilde{K}^{(1)}$, то сумма полуцелых чисел $\omega(f, l)_e$ на рёбрах e этого пути не является целой.

Возьмём на ребре $(a \times b, a \times c) = a \times bc$ направление, соответствующее направлению на ребре bc . Построенную расстановку чисел $\omega(f, l)_{a \times bc}$ и $\omega(f, l)_{bc \times a}$ на ориентированных рёбрах графа $\tilde{K}^{(1)}$ назовём **расстановкой вращений** и обозначим через $\omega(f, l)$.

Определим *элементарную кограницу* $\delta(a \times b)$ вершины $a \times b$ как расстановку чисел $+1/2$ на рёбрах графа $\tilde{K}^{(1)}$, входящих в $a \times b$, чисел $-1/2$ на рёбрах, выходящих из $a \times b$, и 0 на остальных рёбрах. Определим *элементарную симметричную кограницу* вершины $a \times b$ как $\delta_s(a \times b) := \delta(a \times b) + \delta(b \times a)$. Расстановки ω_1 и ω_2 полуцелых чисел на ориентированных рёбрах графа $\tilde{K}^{(1)}$ называются **когомологичными**, если $\omega_1 - \omega_2$ является суммой элементарных симметричных кограниц с целыми коэффициентами.

1.6.6. (а) Расстановки вращений, построенные вами для двух вложений на рис. 1.6.1.б, не когомологичны.

(b) То же для рис. 1.6.1.с.

(c) Для вложения $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ и прямых l, l' расстановки вращений $\omega(f, l), \omega(f, l')$ когомологичны.

(d) Для изотопных вложений $f, f': K \rightarrow \mathbb{R}^2$ и прямой l расстановки вращений $\omega(f, l), \omega(f', l)$ когомологичны.

Осмысленность критерия в утверждении 1.6.2 (т. е. независимость когомологичности расстановок вращений от выбора прямой l) вытекает из утверждения 1.6.6.с. Достаточность в утверждении 1.6.2 вытекает из теоремы 1.6.1 и утверждений 1.6.6.a,b. Необходимость вытекает из утверждения 1.6.6.d.

Ответы к 1.6.4.b,c. Оказывается, что $\tilde{K}_3^{(1)}$ — цикл с шестью вершинами и $\tilde{K}_{3,1}^{(1)}$ — цикл с двенадцатью вершинами.

1.7. ПРИЛОЖЕНИЕ: НЕКОТОРЫЕ ДЕТАЛИ К § 1

1.1.2. Доказательство. Набор точек в пространстве называется набором *общего положения*, если никакие четыре из них не лежат в одной плоскости. В этом абзаце мы докажем, что для каждого n существует n точек общего положения в пространстве. Используем индукцию по n . База $n = 1$ очевидна. Для доказательства шага индукции предположим, что есть $n \geq 1$ точек общего положения в пространстве. Тогда существует конечное число плоскостей, проходящих через тройки из этих n точек. Значит, в пространстве существует точка, не принадлежащая никакой из этих плоскостей. Добавим эту точку к нашему n -точечному множеству. Так как «новая» точка не лежит в одной плоскости ни с какой тройкой из n «старых» точек, в рассматриваемом множестве из $n + 1$ точки все точки находятся в общем положении. Шаг индукции обоснован.

Выберем n точек общего положения в пространстве. Если какие-то два отрезка, соединяющие эти точки, не имеют общих концов, но пересекаются, то четыре конца этих отрезков лежат в одной плоскости. Если какие-то два отрезка, соединяющие эти точки, имеют общий конец и другую общую точку, то три конца этих двух отрезков лежат на одной прямой. Противоречие. \square

Идея алгебраического доказательства.

Возьмём точки $A(t) = (t, t^2, t^3)$ для $t = 1, \dots, n$.

Другое доказательство (кусочно-линейного аналога). Нарисуем данный граф (возможно, с самопересечениями) на плоскости так, чтобы рёбра не самопересекались. Если образовались точки пересечения

(кроме вершин) более чем двух рёбер, то подвинем некоторые рёбра так, чтобы остались только двукратные точки пересечения. «Поднимем» одно из каждых двух пересекающихся рёбер в пространство так, чтобы каждое пересечение пропало. \square

Следующие утверждения 1.7.1 и 1.7.2 иллюстрируют некоторые идеи теоремы 3.8.3 об NP-трудности. Ср. с [Sk, предложения 4.1.6 и 4.8.2].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.7.1. Пусть среди 5 точек 1, 2, 3, 4, 5 на плоскости никакие 3 не лежат на прямой. Если отрезки

(а) jk , $1 \leq j < k \leq 5$, $(j, k) \neq (1, 2)$, имеют непересекающиеся внутренности, то точки 1 и 2 находятся по разные стороны от треугольника 345, ср. с рис. 1.0.1 справа;

(б) jk , $1 \leq j < k \leq 5$, $(j, k) \notin \{(1, 2), (1, 3)\}$, имеют непересекающиеся внутренности, то

- либо точки 1 и 2 находятся по разные стороны от треугольника 345,
- либо точки 1 и 3 находятся по разные стороны от треугольника 245.

(с) jk , $1 \leq j < k \leq 5$, $(j, k) \notin \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$, имеют непересекающиеся внутренности, то

- либо точки 1 и 2 находятся по разные стороны от треугольника 345,
- либо точки 1 и 3 находятся по разные стороны от треугольника 245,
- либо точки 1 и 4 находятся по разные стороны от треугольника 235.

(д) Вы уже догадались, как формулируется это утверждение и вообще как при изучении вложенности возникают булевы функции.

Доказательство. (а) Пять точек можно привести в общее положение, не изменяя ни одного из рассматриваемых свойств. По условию количество точек пересечения отрезка 12 с контуром треугольника 345 равно количеству точек пересечения внутренностей отрезков, соединяющих данные пять точек. Оно нечётно по утверждению 1.1.1.б.

(б, с, д) Эти утверждения аналогичным образом следуют из утверждения 1.1.1.б. \square

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.7.2. Удалим из K_5 ребро, соединяющее вершины 1 и 2. При любом PL-вложении полученного графа в плоскость любая ломаная, соединяющая образы вершин 1 и 2, пересекает образ цикла 345 (т. е. образы вершин 1 и 2 находятся по разные стороны от образа цикла 345).

Это доказывается аналогично утверждению 1.7.1. Вместо утверждения 1.1.1.b нужно использовать лемму 1.4.3. Аналогично формулируются и доказываются PL-аналоги утверждений 1.7.1.b,c,d.

Набросок другого доказательства леммы о чётности 1.3.2. Это доказательство обобщается на высшие размерности [Sk, § 4], [Sk14, § 3].

(а) Пересечение части плоскости, ограниченной первым треугольником, и контура второго является объединением конечного числа невырожденных ломаных. Точки пересечения контуров суть концы этих ломаных. Их число чётно.

(б) Это доказательство использует идею *сингулярного конуса*, которая является короткой формализацией идеи *непрерывного передвижения ломаной на бесконечность* [BE82, § 5].

Пусть сначала одна из ломаных b является треугольником. Обозначим другую ломаную через a . Возьмём такую точку A , что $\partial(AMN)$ и b находятся в общем положении для каждого ребра MN ломаной a . Контур треугольника T будем обозначать через ∂T . Тогда (рис. 1.7.1)

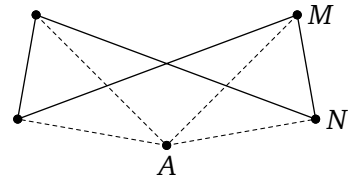


Рис. 1.7.1. Идея сингулярного конуса

$$|a \cap b| = \sum_{MN} |MN \cap b| \equiv_2 \sum_{MN} |\partial(AMN) \cap b| \equiv_2 0.$$

Здесь суммирование идёт по всем рёбрам MN ломаной a ; второе равенство следует из частного случая двух треугольников.

Общий случай сводится к частному аналогично доказательству из п. 1.3. Утверждение 1.3.5 доказывается аналогично с заменой ломаных на 1-циклы. \square

Замечание 1.7.3. Число ван Кампена PL-отображения общего положения $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ графа K определяется аналогично случаю $K = K_n$ (п. 1.4).

(а) Ясно, что если граф K планарен, то $v(f) = 0$ для некоторого PL-отображения общего положения $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$.

(б) Два отрезка на плоскости, имеющие общую внутреннюю точку, дают планарный граф K и его PL-отображение общего положения $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$, для которого $v(f) \neq 0$.

(с) Если K — несвязное объединение двух треугольников, то лемма о чётности 1.3.2.b означает, что $v(f) = 0$ для любого отображения общего положения $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$.

(d) Для любого PL-отображения общего положения $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ графа K число ван Кампена равно сумме значений коцикла пересечений на всевозможных неупорядоченных парах несмежных рёбер.

§ 2. НЕОТЪЕМЛЕМЫЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ

2.1. ЛИНЕЙНЫЕ ТЕОРЕМЫ О НЕОТЪЕМЛЕМЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ

ТЕОРЕМА 2.1.1 (теорема Радона для плоскости). *Для любых 4 точек на плоскости либо одна из них лежит внутри треугольника, образованного оставшимися точками, либо их можно разбить на две пары так, что отрезок, соединяющий точки в первой паре, пересекает отрезок, соединяющий точки во второй паре.* (Ср. с утверждением 1.1.1.а.)

Следующие простые примеры показывают, что данный результат является «наилучшим».

- На плоскости возьмём треугольник и точку внутри него. Для любого разбиения этих четырёх точек на две пары отрезок, соединяющий точки в первой паре, не пересекает отрезок, соединяющий точки во второй паре.
- На плоскости возьмём вершины квадрата. Ни одна из этих четырёх точек не лежит внутри треугольника, образованного оставшимися точками.

Выпуклой оболочкой $\langle X \rangle$ конечного набора X точек плоскости называется наименьший (по включению, или по площади) выпуклый многоугольник, их содержащий. Ср. с определением в п. 3.1.

Теорема Радона для плоскости переформулируется так: *любые 4 точки на плоскости можно разбить на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.* У этой теоремы есть следующая более сильная «количественная» версия.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1.2 (ср. с утверждением 1.1.1.b; см. доказательство в п. 2.4). *Если никакие три из четырёх точек на плоскости не лежат на прямой, то существует ровно одно их разбиение на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.*

Рассмотрим теперь разбиения подмножеств плоскости более чем на два непересекающихся множества.

ПРИМЕР 2.1.3. На плоскости возьмём по $r - 1$ точке в каждой вершине треугольника (или близкий набор различных точек). При любом разбиении этих $3r - 3$ точек на r множеств выпуклые оболочки этих множеств не имеют общей точки. (Докажите, начав с $r = 3$.)

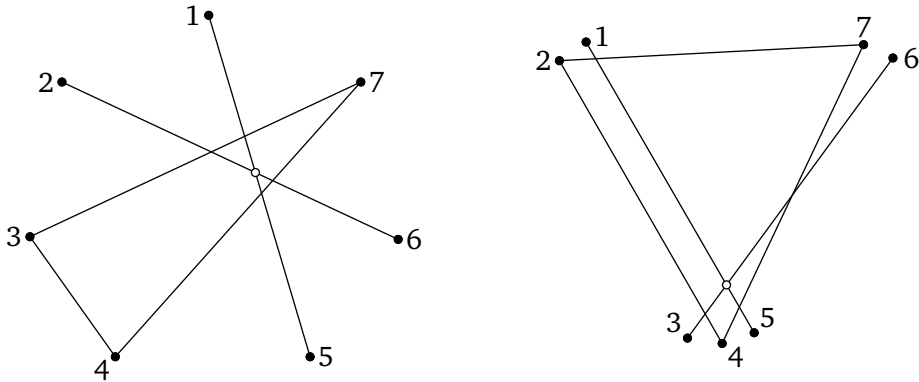


Рис. 2.1.1.1. К теореме 2.1.4: общая точка выпуклых оболочек

ТЕОРЕМА 2.1.4 (теорема Тверберга для плоскости). *Для любого r любые $3r - 2$ точки плоскости можно разбить на r множеств, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.*

Следующие простые примеры показывают, что данный результат является «наилучшим» для $r = 3$.

- На плоскости возьмём вершины выпуклого семиугольника. Тогда ни одна из вершин не лежит ни в одном из треугольников, образованных оставшимися точками.
- На плоскости отметим вершины правильного треугольника и его центр. Отметим также середины отрезков, соединяющих вершины с центром. Возьмём любые два отрезка, соединяющие две непесекающиеся пары отмеченных точек. Тогда либо эти отрезки не пересекаются, либо их точка пересечения не лежит в треугольнике, образованном тремя оставшимися отмеченными точками.

Мотивированное изложение широко известного алгебраического доказательства теоремы 2.1.4 см. в [RRS].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.5. Было бы интересно найти геометрическое доказательство теоремы 2.1.4, хотя бы для $r = 3$. Доказательство её аналога для $r = 3$ и вершин выпуклого восьмиугольника иллюстрируется рис. 2.1.2. Из этого аналога несложно вывести её аналог для $r = 3$ и 11 точек.

ПРИМЕР 2.1.6 (ср. с утверждениями 1.1.1.b и 2.1.2). Для множества вершин правильного семиугольника количество разбиений из теоремы 2.1.4 равно 7. Каждое такое разбиение получается поворотом из разбиения на рис. 2.1.1 слева.

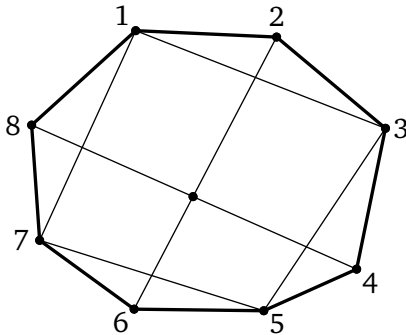


Рис. 2.1.2. Выпуклый восьмиугольник

Для множества точек, изображённого на рис. 2.1.1 справа, количество разбиений из теоремы 2.1.4 равно 4.

(Это следует из того, что в любом таком разбиении одна из выпуклых оболочек должна быть треугольником, одна из вершин которого 4, другая 1 или 2, а третья 6 или 7.)

Таким образом, следующая сумма имеет разную чётность для двух рассмотренных выше 7-элементных множеств M_1 и M_2

$$v(M_i) := \sum_{\{R_1, R_2, R_3\}: M_i = R_1 \sqcup R_2 \sqcup R_3} |\langle R_1 \rangle \cap \langle R_2 \rangle \cap \langle R_3 \rangle|.$$

Однако этот пример подсказывает, что количество разбиений из теоремы 2.1.4 есть число вида $3k + 1$. Это верно, только если в приведённой сумме удачно расставить знаки \pm перед слагаемыми.

2.2. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА О ДВУКРАТНЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ

2.2.1. Возьмём замкнутую плоскую ломаную L , вершины которой находятся в общем положении.

(а) Дополнение до L допускает шахматную раскраску (такую, что соседние области покрашены в разные цвета, см. рис. 2.2.1 и доказательство в п. 2.4).

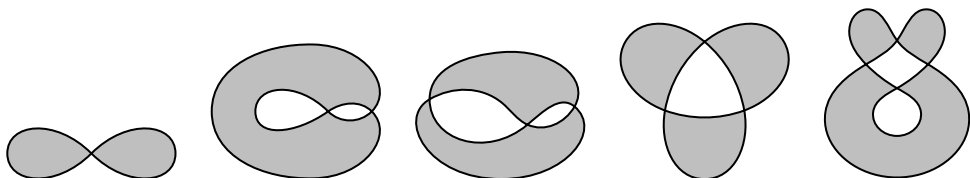


Рис. 2.2.1. Внутренности по модулю 2 ломаных

(b) Концы ломаной P , вершины которой находятся в общем положении с вершинами ломаной L , имеют одинаковый цвет тогда и только тогда, когда $|P \cap L|$ чётно.

Внутренностью по модулю 2 плоской ломаной, вершины которой находятся в общем положении, называется объединение чёрных областей шахматной раскраски (при условии, что «бесконечная» область белая).

Кусочно-линейные (PL-)отображения и PL-отображения общего положения $K_n \rightarrow \mathbb{R}^2$ определены в § 1.4.

ТЕОРЕМА 2.2.2 (топологическая теорема Радона для плоскости [BV79], ср. с теоремами 1.4.1, 2.1.1). (a) Для любого PL-отображения общего положения $f: K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$

- либо образы некоторых несмежных рёбер пересекаются,
- либо образ некоторой вершины лежит во внутренней по модулю 2 образа цикла из трёх рёбер, не содержащих эту вершину.

(b) Для любого непрерывного (или PL-)отображения тетраэдра в плоскость

- либо образы некоторых противоположных рёбер пересекаются,
- либо образ некоторой вершины лежит в образе противоположной грани.

Пункт (a) выводится из своей «количественной» версии (лемма 2.2.3) с помощью одной из версий [Sk20, лемма 1.4.6b об аппроксимации], ср. с замечанием 3.2.3.b.

Пункт (b) для PL-отображений общего положения следует из п. (a), поскольку образ $f(\Delta)$ грани Δ содержит внутренность по модулю 2 образа границы $\partial\Delta$ этой грани. (Это следует из того, что для отображения $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения общая точка внутренней по модулю 2 ломаной $f(\partial\Delta)$ имеет нечётное число прообразов.) Пункт (b) выводится из п. (b) для PL-отображений общего положения с помощью одной из версий [Sk20, лемма 1.4.6b об аппроксимации], ср. с замечанием 3.2.3.b.

Заметим также, что п. (b) эквивалентен п. (a), см. [Sc04, SZ05].

Верен аналог теоремы 2.2.2, полученный заменой «PL» на «непрерывного».

Для любого PL-отображения общего положения $f: K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ назовём **числом Радона** $\rho(f) \in \mathbb{Z}_2$ сумму четностей

- числа точек пересечения образов несмежных рёбер и

- числа тех вершин графа K_4 , образы которых лежат во внутренности по модулю 2 образа цикла из трёх рёбер, не содержащих эту вершину.

ЛЕММА 2.2.3 (ср. с леммой 1.4.3 и утверждением 2.1.2). Для любого PL-отображения общего положения графа K_4 в плоскость число Радона нечётно.

Доказательство. Ввиду утверждения 2.1.2 достаточно доказать, что $\rho(f) = \rho(f')$ для любых двух PL-отображений общего положения $f, f' : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, отличающихся только на внутренности одного ребра σ , причём $f|_\sigma$ линейно. Обозначим через τ ребро графа K_4 , несмежное с σ , а через S — внутренность по модулю 2 ломаной $\partial S := f\sigma \cup f'\sigma$. Тогда

$$\rho(f) - \rho(f') = |\partial S \cap f\tau|_2 + |S \cap f(\partial\tau)|_2 = 0.$$

Здесь второе равенство следует из утверждения 2.2.1.b. □

2.3. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА О МНОГОКРАТНЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ

Топологическая теорема Тверберга для плоскости обобщает как теорему Тверберга для плоскости 2.1.4, так и топологическую теорему Радона для плоскости 2.2.2. Для формулировки нам понадобится следующее определение. **Числом оборотов** замкнутой ориентированной плоской ломаной $A_1 \dots A_n$ вокруг не лежащей на ней точки O называется следующая сумма ориентированных углов, делённая на 2π :

$$A_1 \dots A_n \cdot O := \frac{\angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \dots + \angle A_{n-1}OA_n + \angle A_nOA_1}{2\pi}.$$

2.3.1. (а) Число оборотов (произвольно ориентированного) многоугольника вокруг точки вне него равно 0, а вокруг точки внутри него равно ± 1 .

(б) Для любой замкнутой ориентированной ломаной её внутренность по модулю 2 состоит из всех тех точек, вокруг которых число оборотов нечётно.

(с) (Ср. с утверждением 2.2.1.b.) Возьмём замкнутую и незамкнутую ориентированные ломаные L и P на плоскости, вершины которых находятся в общем положении. Пусть P_0 и P_1 — начальная и конечная точки ломаной P соответственно. Тогда¹²⁾ $L \cdot P = L \cdot \partial P := L \cdot P_1 - L \cdot P_0$.

¹²⁾ Целочисленное число пересечений $L \cdot P$ определено в [Sk18, § 1.5.4]. Эта версия теоремы Стокса показывает, что дополнение до L имеет нумерацию Мёбиуса — Александера, т. е. «шахматную раскраску числами» (цвета

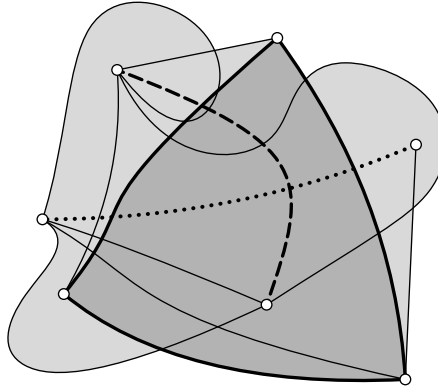


Рис. 2.3.1. Топологическая теорема Тверберга для плоскости для $r = 3$. Чёрный треугольник обходит вокруг точки пересечения пунктирного и штрихового отрезков

(d) Для каждой ломаной (с произвольной ориентацией) на рис. 2.2.1 и точки на ваш выбор (в любой из ограниченных областей) найдите число оборотов ломаной вокруг точки.

ТЕОРЕМА 2.3.2 (топологическая теорема Тверберга для плоскости [BSS, Oz, Vo96]; ср. с теоремами 2.1.4, 2.2.2 и гипотезой 3.3.1). *Если r — степень простого, то для любого PL-отображения $f: K_{3r-2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (рис. 2.3.1)*

- либо образы $r - 1$ треугольников обходят вокруг образа одной вершины,
- либо образы $r - 2$ треугольников обходят вокруг некоторой точки пересечения образов двух рёбер,

Точнее, можно так занумеровать вершины числами $1, \dots, 3r - 2$, что

- либо число оборотов образа каждого из циклов $3t - 1, 3t, 3t + 1$ ($t = 1, 2, 3, \dots, r - 1$) вокруг образа точки 1 не равно нулю,
- либо число оборотов образа каждого из циклов $3t - 1, 3t, 3t + 1$ ($t = 2, 3, \dots, r - 1$) вокруг некоторой точки пересечения образов рёбер 12 и 34 не равно нулю.

(Условие «число оборотов не равно нулю» не зависит от ориентации цикла $f(ijk)$.)

Теорема 2.3.2 эквивалентна ([Sc04, Теорема 3.3.1], [SZ05, Теорема 5.8]) её стандартной формулировке — теореме 3.3.2.a для $d = 2$.

соседних областей отличаются на ± 1 в зависимости от ориентации; концы ломаной P имеют одинаковый цвет тогда и только тогда, когда $L \cdot P = 0$). См. подробности в [Wn].

О её доказательстве и удивительном появлении теоретико-числового условия на размерность в этом топологическом результате см. замечание 3.3.7. *Нерешённая задача: верен ли аналог теоремы 2.3.2, если r — не степень простого?*

2.4. ПРИЛОЖЕНИЕ: НЕКОТОРЫЕ ДЕТАЛИ К § 2

2.1.2. Так как точки — общего положения, их выпуклая оболочка — или треугольник, или четырёхугольник. Если выпуклая оболочка данных 4 точек — четырёхугольник, то нужная («радоновская») точка — точка пересечения диагоналей. Если же выпуклая оболочка — треугольник, то нужная точка — та точка множества, которая не является вершиной его выпуклой оболочки.

Доказательство теоремы 2.1.4 для $r = 3$ и вершин выпуклого 7-угольника¹³⁾. Обозначим вершины семиугольника в порядке обхода через 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (рис. 2.4.1).

Если $X := 37 \cap 26 \in \Delta 145$, то разбиение 37, 26, 145 — искомое («тверберговское»).

Если $X \notin \Delta 145$, то не умаляя общности можно считать, что X лежит внутри четырёхугольника 1567. Поскольку X не лежит внутри пятиугольника 12345, получаем, что $Y := 15 \cap 37$ не лежит внутри четырёхугольника 1267. Так как $15 \cap \Delta 234 = \emptyset$, получаем, что $Y \notin \Delta 234$. Так как $37 \cap \Delta 456 = \emptyset$, мы получаем $Y \notin \Delta 456$. Поэтому $Y \in \Delta 246$. Значит, разбиение 15, 37, 246 — искомое. \square

2.2.1. (а) Доказательство. Возьмём точку $A \notin L$ и покрасим точку A в цвет 0. Далее, каждую точку $P \notin L$ покрасим в цвет 0 или 1, совпадающий по чётности с числом точек пересечения с L пути *общего положения* (дайте определение самостоятельно), соединяющего P и A . Такая раскраска корректно определена.

При переходе в соседнюю область число точек пересечения из п. (а) увеличивается на 1, поэтому соседние области покрашены в разные цвета. \square

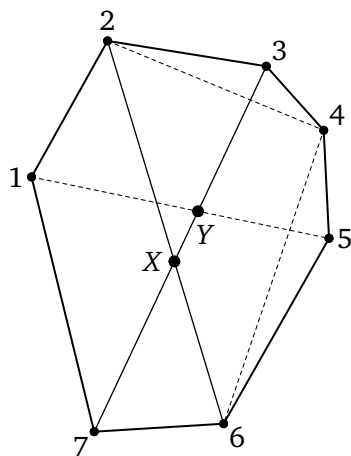


Рис. 2.4.1. Выпуклый семиугольник

¹³⁾ Предварительная версия написана А. Львовым и Т. Ковалевым в процессе их участия в Летней конференции Турнира городов 2017 г. Аналогичное решение придумано В. Кулишовым. Ср. с замечанием 2.1.5.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4.1. Пусть K — граф. Пусть $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторое PL-отображение общего положения, т. е. отображение, переводящее вершины графа K в различные точки прямой, отличные от «точек возврата» рёбер.

(а) *Топологическая теорема Радона для прямой.* Для любого непрерывного отображения треугольника в прямую образ некоторой вершины лежит на образе противоположного ребра.

Образ одной из вершин треугольника лежит нестрого между образами двух других. Так как отображение непрерывно, образ этой вершины и лежит на образе противоположного ребра.

(б) Граф G называется *k -реализуемым на прямой*, если его вершины можно расположить на плоскости так, чтобы любая прямая, перпендикулярная некоторой фиксированной прямой, пересекала объединение отрезков, соответствующих рёбрам графа, не более чем в k точках. Другими словами, существует отображение графа G в прямую без $(k + 1)$ -кратных точек (т. е. такое, что любая точка прямой имеет не более k прообразов).

Ясно, что связный граф 1-реализуем на прямой тогда и только тогда, когда он является путём. О критерии 2-реализуемости деревьев см. [Kho] и ссылки в этой статье. Было бы интересно найти критерий и эффективный алгоритм распознавания k -реализуемости.

§ 3. ДОПОЛНЕНИЕ: МНОГОМЕРНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

3.1. ЛИНЕЙНЫЕ ТЕОРЕМЫ О НЕОТЪЕМЛЕМЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ

В этом параграфе слова «для любых целых $d, r, N, k > 0$ » в начале формулировок пропускаются.

Подмножество в \mathbb{R}^d называется *выпуклым*, если для любых двух его точек соединяющий их отрезок содержится в этом подмножестве. **Выпуклой оболочкой** $\langle X \rangle$ подмножества $X \subset \mathbb{R}^d$ называется наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее X . **Выпуклой оболочкой** конечного набора точек $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^d$ является множество

$$\{\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_n p_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0, \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1\}.$$

Вершины d -мерного симплекса образуют множество из $d + 1$ точки в \mathbb{R}^d , при любом разбиении которого на два множества выпуклые оболочки множеств не пересекаются.

ТЕОРЕМА 3.1.1 (Радон, ср. с теоремой 2.1.1). *Любые $d + 2$ точки в \mathbb{R}^d можно разбить на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.*

См. геометрические индуктивные доказательства в [Pe72, Ko18, RRS] и стандартное алгебраическое доказательство, например, в [BZ16, RRS].

Разбиение из теоремы Радона единственно, ср. с утверждением 2.1.2.

Вершины $2k$ -мерного симплекса и его центр образуют $2k + 2$ точки в \mathbb{R}^{2k} , при любом разбиении которых на два $(k + 1)$ -элементных множества выпуклые оболочки множеств не пересекаются.

ТЕОРЕМА 3.1.2 (линейная теорема ван Кампена — Флореса, ср. с утверждением 1.1.1a). *Из любых $2k + 3$ точек в \mathbb{R}^{2k} можно выбрать два непересекающихся $(k + 1)$ -элементных множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.*

Версия теоремы ван Кампена — Флореса в нечётных размерностях (теорема Конвея — Гордона — Закса — Сегала — Спеша — Ловаса — Шрайвера — Таниямы) приведена, например, в [Sk14, Теорема 1.6] или в [Sk16, § 4], см. (VKF_d) для d нечётного. Геометрическое индуктивное доказательство теоремы 3.1.2 (включая версию в нечётных размерностях) аналогично доказательству для маломерных случаев, изложенному в обзоре [Sk14]. Алгебраическое доказательство см. в [BM15].

Теорема 3.1.2 имеет «количественную версию», аналогичную утверждению 1.1.1.b.

Либо возьмём вершины d -мерного симплекса, каждую с кратностью $r - 1$, либо для каждой из вершин возьмём $r - 1$ близких точек, лежащих в общем положении, либо возьмём любые $(d + 1)(r - 1)$ точек общего положения в \mathbb{R}^d . Получим $(d + 1)(r - 1)$ точек в \mathbb{R}^d , при любом разбиении которых на r множеств выпуклые оболочки этих множеств не имеют общей точки.

ТЕОРЕМА 3.1.3 (Тверберг, ср. с теоремой 2.1.4). *Любое множество $(d + 1)(r - 1) + 1$ точек в \mathbb{R}^d можно разбить на r множеств, все r выпуклых оболочек которых имеют общую точку.*

Мотивированное изложение известного доказательства см. в [RRS].

Рассмотрим в \mathbb{R}^{kr} вершины kr -мерного симплекса и его центр. Либо возьмём эти $kr + 2$ точки, каждую с кратностью $r - 1$, либо для каждой из этих точек возьмём $r - 1$ близких точек, лежащих в общем положении. Получим $(r - 1)(kr + 2)$ точек в \mathbb{R}^{kr} такие, что для любых r попарно непересекающихся наборов из $k(r - 1) + 1$ точек все r выпуклых оболочек этих наборов не имеют общей точки.

ГИПОТЕЗА 3.1.4 (линейная r -кратная гипотеза ван Кампена — Флореса). *Из любых $(r - 1)(kr + 2) + 1$ точек в \mathbb{R}^{kr} можно выбрать r попар-*

но непересекающихся подмножеств по $(k(r - 1) + 1)$ точек в каждом, все r выпуклых оболочек которых имеют общую точку.

Это верно для r простого [Sa91g] и даже для r степени простого [Vo96v], но является открытой проблемой для других r [Fr17, начало § 2].

3.2. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ О ДВУКРАТНЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ

Обозначим через Δ_N симплекс размерности N .

ТЕОРЕМА 3.2.1 (топологическая теорема Радона, [BB79], ср. с теоремой 2.2.2). *Для любого отображения $\Delta_{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ образы некоторых несмежных граней пересекаются.*

Это доказывается с использованием числа Радона или знаменитой теоремы Борсука — Улама [Ma03], [Sk20, § 8] (аналогично случаю $d = 2$ в п. 2.2 и [Sk, § 7.1]). Теорема 3.2.1 интересна как «симплициальный» аналог теоремы Борсука — Улама.

ТЕОРЕМА 3.2.2 (ван Кампен — Флорес, ср. с теоремой 1.4.1 и утверждением 3.7.1.а). *Для любого отображения $\Delta_{2k+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$ образы некоторых несмежных k -мерных граней пересекаются.*

Это следует из [Sk, лемма 5.7.3], а также доказывается с использованием либо индукции по k (аналогично случаю $k = 2$ в [Sk14]), либо теоремы Борсука — Улама (см. [Ma03, §5]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2.3. (а) Теоремы 3.2.1 и 3.2.2 обобщают теоремы 3.1.1 и 3.1.2, соответственно. Аналогичные замечания для нижеследующих теорем и гипотез справедливы и пропускаются.

(б) Отображение $f: \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ называется **линейным**, если

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

для любых $\lambda \in [0, 1]$, $x, y \in \Delta$. Отображение $\Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ называется **кусочно-линейным (PL)**, если оно линейно на каждой грани некоторой триангуляции симплекса Δ_N .

Свойство «образы несмежных граней не пересекаются» устойчиво, т. е. сохраняется при достаточно малом шевелении отображения. Поэтому если в теореме 3.2.1 заменить (пропущенное) «непрерывное» на «PL» или на «PL общего положения», то получатся равносильные утверждения. Аналогичные замечания для нижеследующих теорем и гипотез этого пункта справедливы и пропускаются.

(с) Теоремы 3.2.1 и 3.2.2 имеют «количественные версии», аналогичные леммам 1.4.3 и 2.2.3, см., например, [Sk16, § 4]. Прямые до-

казательства некоторых связей между этими результатами см. в п. (d) и [Sk16, § 4].

(d) Приведем вывод теоремы 1.4.1 (т. е. теоремы 3.2.2 для $k = 1$) из топологической теоремы Радона 3.2.1 для $d = 3$. Аналогично теорема 3.2.2 выводится из теоремы 3.2.1 для $d = 2k + 1$.

Пусть, напротив, $f: K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — отображение, для которого образы несмежных рёбер не имеют общей точки. Продолжим f произвольно на Δ_4 (см. [Sk20, § 3.4]; объединение рёбер симплекса Δ_4 есть граф K_5). Обозначим через $\rho(x)$ расстояние от точки $x \in \Delta_4$ до объединения рёбер симплекса. Докажем, что $f \times \rho: \Delta_4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ является контрпримером к теореме 3.2.1 для $d = 3$.

Пусть, напротив, некоторые две точки $x_1, x_2 \in \Delta_4$ лежат в несмежных гранях и отобразились при $f \times \rho$ в одну точку в \mathbb{R}^3 . Размерность одной из этих граней (не умаляя общности, первой) не больше $\frac{5}{2} - 1$, поэтому она не превосходит 1. Значит, $\rho(x_1) = 0$. Тогда $\rho(x_2) = \rho(x_1) = 0$. Поэтому условие $f(x_1) = f(x_2)$ противоречит тому, что f -образы несмежных рёбер не имеют общей точки.

3.3. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ О МНОГОКРАТНЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ

Напомним, что **комплексом** называется набор некоторых граней симплекса. Объединение этих граней будем также называть комплексом (точнее, оно называется *телом* комплекса). См. подробнее § 3.6.

Отображение $f: K \rightarrow \mathbb{R}^d$ комплекса K называется **почти r -вложением**, если образы любых r попарно несмежных граней $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ не имеют общей точки:

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) = \emptyset.$$

Теоремы 3.2.1 и 3.2.2 утверждают, что не существует почти 2-вложенный $\Delta_{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ и объединения k -мерных граней симплекса Δ_{2k+2} в \mathbb{R}^{2k} .

Гипотеза 3.3.1 (топологическая гипотеза Тверберга). *Не существует почти r -вложения $\Delta_{(d+1)(r-1)} \rightarrow \mathbb{R}^d$.*

Иными словами, для любого отображения $\Delta_{(d+1)(r-1)} \rightarrow \mathbb{R}^d$ образы некоторых r попарно несмежных граней имеют общую точку.

Эта гипотеза обобщает вышеприведённые теорему Тверберга 3.1.3 и топологическую теорему Радона 3.2.1. Гипотеза выдвинута Э. Баймочем, И. Баранем [BV79] и Х. Твербергом [GS79, задача 84]. Она считалась центральной нерешённой проблемой топологической комбинаторики. По моему мнению, одна из причин для этого следующая.

Её исследование — один из первых примеров в топологической комбинаторике, для которого действия группы \mathbb{Z}_2 недостаточны и нужно рассматривать более сложные группы.

Эта гипотеза верна, если r — степень простого, и неверна иначе.

ТЕОРЕМА 3.3.2. (a) [BSS, Oz, Vo96] Если r — степень простого, то не существует почти r -вложения $\Delta_{(d+1)(r-1)} \rightarrow \mathbb{R}^d$.

(b) (см. [Oz, Gr10, BFZ14, Fr15, MW15] и сноску 14) Если r — не степень простого и $d \geq 2r + 1$, то существует почти r -вложение $\Delta_{(d+1)(r-1)} \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Часть (a) для простого r доказана в [BSS], см. обзор [Sk16, § 2.2]. Более простое доказательство приведено в [Sk18, § 2.3.4], [Sk, § 7.4]. Часть (a) для r степени простого доказана в [Oz, Vo96], см. обзор [Sk16, § 2.3].

Для первых контрпримеров к топологической гипотезе Тверберга 3.3.1 (теорема 3.3.2.b для $d = 3r + 1$) важны работы [Oz, Gr10, Fr15, BFZ14, MW15] М. Озайдына, М. Громова, Ф. Фрика, П. Благоевича, Г. Циглера, И. Мабийяра и У. Вагнера¹⁴). Контрпример с наименьшей (из известных) размерностью d — почти 6-вложение $\Delta_{70} \rightarrow \mathbb{R}^{13}$. Для $d \leq 2r$ и r не степени простого (например, для $d = 2$ и $r = 6$) топологическая гипотеза Тверберга 3.3.1 всё ещё открыта.

ТЕОРЕМА 3.3.3. (a) [FS20] Если r — степень простого, то не существует почти r -вложения $\Delta_{(d+1)r-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$.

(b) [AKS] Если r — не степень простого и $N := (d+1)r - r \left\lceil \frac{d+2}{r+1} \right\rceil - 2$, то существует почти r -вложение $\Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Более простой подход, приводящий к более слабым результатам, см. в замечании 3.4.1.c.

ГИПОТЕЗА 3.3.4 (r -кратная гипотеза ван Кампена — Флореса). Не существует почти r -вложения объединения $k(r-1)$ -мерных граней симплекса $\Delta_{(kr+2)(r-1)}$ в \mathbb{R}^{kr} .

Иными словами, для любого отображения $f: \Delta_{(kr+2)(r-1)} \rightarrow \mathbb{R}^{kr}$ существуют r попарно несмежных $k(r-1)$ -мерных граней, образы которых имеют общую точку.

Эта гипотеза верна, если r — степень простого, и неверна иначе.

¹⁴ Здесь не обсуждается соотношение вкладов разных авторов, см. [Sk16, замечание 1.9 и § 5]. Приведённое там обсуждение интересно неспециалисту, поскольку затрагивает важные общие принципы научных обсуждений. При этом в § 3.4 и [Sk16, § 1.2, § 3.1] приводятся точные ссылки на каждый шаг доказательства, чтобы читатель мог составить собственное мнение.

ТЕОРЕМА 3.3.5. (а) Если r — степень простого, то не существует почти r -вложения объединения $k(r-1)$ -мерных граней симплекса $\Delta_{(kr+2)(r-1)}$ в \mathbb{R}^{kr} .

(б) Если r — не степень простого и $k \geq 2$, то существует почти r -вложение объединения $k(r-1)$ -мерных граней симплекса $\Delta_{(kr+2)(r-1)}$ в \mathbb{R}^{kr} .

Часть (а) доказана в [Sa91g, Vo96v] аналогично теореме 3.3.2.а. Этот результат также следует из теоремы 3.3.2.а и нижеприведённой леммы о принуждении 3.4.2. План доказательства части (б) приведён в § 3.4 и [Sk16, § 3.1]. Для $k = 1$ и r не степени простого r -кратная гипотеза ван Кампена — Флореса всё ещё открыта.

ТЕОРЕМА 3.3.6 [AKS]. Если r не степень простого, то объединение k -мерных граней любого симплекса допускает почти r -вложение в $\mathbb{R}^{k+\lceil(k+3)/r\rceil}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3.7. Доказательства результатов этого пункта основаны на красивом и плодотворном взаимодействии комбинаторики, алгебры и топологии. На это указывает, в частности, удивительное появление теоретико-числовых условий на размерность в топологических результатах. См., например, теоремы 3.3.2.а,б и теоремы о реализуемости многообразий [Sk20, § 12.1]. Такие условия показывают, что за красивой топологической формулировкой скрывается нетривиальная алгебра.

Более конкретно, доказательства положительных результатов используют эквивариантную алгебраическую топологию конфигурационных пространств, см. обзоры [Sk18, § 2.3.4] и [Sk16, § 2]. Условие на r из теоремы 3.3.2.а необходимо для свойств (свободности или хотя бы эффективности) действия группы \mathbb{Z}_r на конфигурационных пространствах.

Доказательства контрпримеров используют, кроме этого, элементарную комбинаторику и геометрическую топологию (устранение многократных пересечений при помощи аналога трюка Уитни). Условие на r из теоремы 3.3.2.б появляется на более простом шаге доказательства — теореме Озайдына [Sk16, теорема 3.3]. Она утверждает, что алгебраическое препятствие $\nu(\Sigma_r)$ к почти r -вложимости (являющееся аналогом чисел ван Кампена и Радона) является нулевым элементом некоторой абелевой группы (когомологий конфигурационного пространства). Обозначим через a_p частное от деления числа $a \in \mathbb{Z}$ на степень числа p , входящую в каноническое разложение числа a . Тогда доказываются соотношения $r!_p \nu(\Sigma_r) = 0$ для любого простого p

и любого $r \neq p^\alpha$. Например, для $r = 2$ имеем $2\nu(\Sigma_2) = 0$ [Sk18, утверждение 1.5.13], а для $r = 3$ имеем $3\nu(\Sigma_3) = 0$. Только если r не является степенью простого, из этих соотношений вытекает, что $\nu(\Sigma_r) = 0$.

3.4. План доказательства теорем 3.3.2.b и 3.3.5.b

Вот план доказательства теорем 3.3.2.b и 3.3.5.b:

- теорема 3.3.2.b для $d = 2r + 1$ (контрпример к топологической гипотезе Тверберга) следует из теоремы 3.3.5.b (контрпримера к r -кратной гипотезе ван Кампена — Флореса) и леммы о принуждении 3.4.2 (которая утверждает, что топологическая гипотеза Тверберга влечёт r -кратную гипотезу ван Кампена — Флореса);
- лемма о принуждении 3.4.2 доказана Громовым и позже переоткрыта Благоевичем — Фриком — Циглером [Sk16, замечание 1.9.a];
- теорема 3.3.5.b следует из теорем [Sk16, теоремы 3.1 и 3.2], принадлежащих Мабийяру — Вагнеру и Озайдыну;
- теорема 3.3.2.b для $d > 2r + 1$ вытекает из случая $d = 2r + 1$ и замечания 3.4.1.b (этот шаг не нужен для первых контрпримеров).

Замечание 3.4.1 (использование джойна). (а) Для двух отображений $f: \Delta_a \rightarrow B^p$ и $g: \Delta_b \rightarrow B^q$ определим их *джойн*

$$f * g: \Delta_{a+b+1} = \Delta_a * \Delta_b \rightarrow B^p * B^q = B^{p+q+1}$$

формулой

$$(f * g)(\lambda x \oplus \mu y) := \lambda f(x) \oplus \mu g(y).$$

Джойн почти r -вложений является почти r -вложением.

(б) Если существует почти r -вложение $\Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$, то существует почти r -вложение $\Delta_{N+r-1} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ [Lo, предложение 2.5].

Действительно, пусть $f: \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ — почти r -вложение. Отображение g из Δ_{r-2} в точку B^0 является почти r -вложением. По п. (а), джойн

$$f * g: \Delta_{N+r-1} = \Delta_N * \Delta_{r-2} \rightarrow B^d * B^0 = B^{d+1}$$

является почти r -вложением.

(с) Если для некоторых целых $r, a, d > 0$ существует почти r -вложение $\Delta_a \rightarrow \mathbb{R}^d$, то для любого целого $k > 0$ существует почти r -вложение $\Delta_{k(a+1)-1} \rightarrow \mathbb{R}^{k(d+1)-1}$ [BFZ, лемма 5.2].

Действительно, по п. (а) k -кратный джойн почти r -вложения $\Delta_a \rightarrow B^d$ является почти r -вложением $\Delta_{k(a+1)-1} \rightarrow B^{k(d+1)-1}$.

Лемма 3.4.2 (о принуждении; Громов — Благоевич — Фрик — Циглер; [Gr10, 2.9.c], [BFZ14, леммы 4.1.iii и 4.2], [Fr15, доказательство

теоремы 4]¹⁵⁾). Если существует почти r -вложение объединения $k(r-1)$ -мерных граней симплекса $\Delta_{(kr+2)(r-1)}$ в \mathbb{R}^{kr} , то существует почти r -вложение $\Delta_{(kr+2)(r-1)} \rightarrow \mathbb{R}^{kr+1}$.

Доказательство. Чтобы сделать это рассуждение более доступным, рассмотрим частный случай $r = 6$ и $k = 3$: если существует почти 6-вложение $\Delta_{100}^{15} \rightarrow \mathbb{R}^{18}$ объединения 15-мерных граней 100-мерного симплекса в \mathbb{R}^{18} , то существует почти 6-вложение самого 100-мерного симплекса в \mathbb{R}^{19} . Общий случай аналогичен.

Возьмём почти 6-вложение $\Delta_{100}^{15} \rightarrow \mathbb{R}^{18}$. Произвольно продолжим его до отображения $f: \Delta_{100} \rightarrow \mathbb{R}^{18}$. Обозначим через $\rho(x)$ расстояние от точки симплекса Δ_{100} до его 15-мерного остова Δ_{100}^{15} . Достаточно доказать, что $f \times \rho: \Delta_{100} \rightarrow \mathbb{R}^{19}$ является почти 6-вложением.

Пусть, напротив, некоторые 6 точек $x_1, \dots, x_6 \in \Delta_{100}$ лежат в попарно несмежных гранях и переходят в одну и ту же точку при $f \times \rho$. Размерность одной из этих граней (не умаляя общности, первой) не превосходит $\frac{101}{6} - 1$, поэтому она не превосходит 15. Значит, $\rho(x_1) = 0$. Тогда $\rho(x_2) = \dots = \rho(x_6) = \rho(x_1) = 0$, т. е. $x_1, \dots, x_6 \in \Delta_{100}^{15}$. Поэтому условие $f(x_1) = \dots = f(x_6)$ противоречит тому, что $f|_{\Delta_{100}^{15}}$ — почти 6-вложение. \square

3.5. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИМЕРЫ ГИПЕРГРАФОВ И КОМПЛЕКСОВ

Определим k -гиперграф (более точно, k -мерный или $(k+1)$ -одно-родный гиперграф) (V, F) как конечное множество V вместе с некоторым набором $F \subset \binom{V}{k+1}$, состоящим из $(k+1)$ -элементных подмножеств этого множества. В топологии больше принято (потому что иногда так удобнее) работать не с гиперграфами, а с комплексами (мы не будем использовать более громоздкий термин «абстрактный конечный симплициальный комплекс»). Результаты ниже сформулированы для комплексов, хотя некоторые из них справедливы и для гиперграфов.

Комплекс $K = (V, F)$ — это конечное множество $V = V(K)$ вместе с набором $F = F(K) \subset 2^V$ подмножеств множества V таким, что если подмножество σ содержится в этом наборе, то и каждое подмножество множества σ содержится в этом наборе. (Следовательно, $F \notin \emptyset$.) На эквивалентном геометрическом языке комплекс является набором

¹⁵⁾ Эта лемма обобщает замечание 3.2.3.d, в которое лемма превращается при $r = 2$.

замкнутых граней некоторого симплекса. Назовём k -**комплексом** комплекс, содержащий только не более чем $(k + 1)$ -элементные множества, т. е. не более чем k -мерные симплексы.

Элементы множеств V и F называются **вершинами** и **гранями** соответственно. **Ребром** называется двухэлементная (т. е. одномерная) грань.

Полный k -комплекс на n вершинах (или k -мерный остов $(n - 1)$ -мерного симплекса)

$$\Delta_{n-1}^k := \left([n], \left(\binom{[n]}{\leq k+1} \right) \right)$$

— это n -элементное множество $[n]$ вместе с набором $\left(\binom{[n]}{\leq k+1} \right)$ всех его не более чем $(k + 1)$ -элементных подмножеств (рис. 3.5.1 справа). Для $k = 2$ это полный граф K_n . Для $k = 0$ мы обозначаем этот комплекс через $[n]$, для $n = k + 1$ — через D^k (это k -мерный симплекс или k -мерный диск), и для $n = k + 2$ — через S^k (это k -мерная сфера).

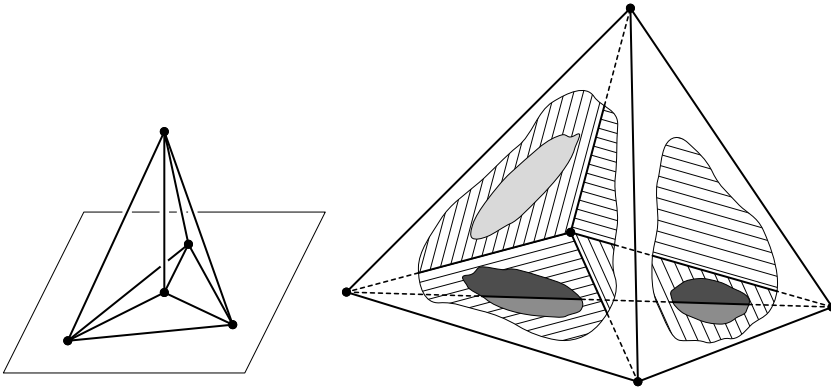


Рис. 3.5.1. Слева: реализация в \mathbb{R}^3 конуса над K_4 . Справа: реализация в \mathbb{R}^3 объединения двумерных граней четырёхмерного симплекса

Конусом $\text{con } K$ над графом $K = (V, E)$ называется 2-комплекс с множеством вершин $V \cup \{c\}$, $c \notin V$, и гранями $\{c, i, j\}$, где $\{i, j\} \in E$ (рис. 3.5.1 слева). Название «конус» принято потому, что конус над циклом «выглядит» как боковая поверхность «обычного» конуса. Конус над комплексом определяется аналогично.

Кнопкой называется 2-комплекс с вершинами $c, 0, 1, 2, 3$, грани которого — $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 2, 3\}$, все их двухэлементные подмножества и $\{c, 0\}$; см. рис. 3.5.2, K_{VI} . См. другие примеры на рис. 3.5.2. Примеры комплексов фактически приведены в [Sk20, п. 5.2].

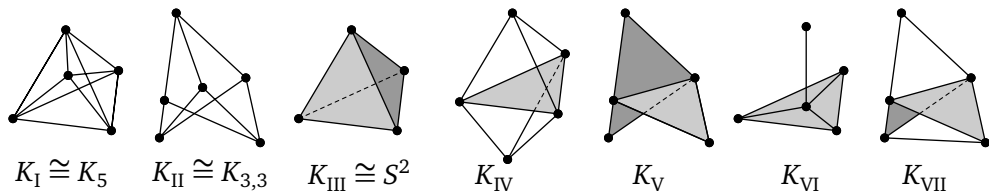


Рис. 3.5.2. Двумерные комплексы, не реализуемые в плоскости

3.6. Симплициальная вложимость ГИПЕРГРАФОВ И КОМПЛЕКСОВ

Определение реализуемости гиперграфов и комплексов в \mathbb{R}^d похоже на определение реализуемости графов на плоскости. Например, в случае 2-комплекса каждому трёхэлементному подмножеству соответствует «изображение» треугольника в \mathbb{R}^d . Существуют разные формализации идеи реализуемости.

Комплекс (V, F) **симплициально** (или линейно) **вложим** в \mathbb{R}^d , если существует биекция $V \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^d$ со следующими свойствами:

- для любого подмножества $\sigma \subset V'$, соответствующего грани, его выпуклая оболочка $\langle \sigma \rangle$ является симплексом размерности $|\sigma| - 1$;
- для выпуклых оболочек любых подмножеств $\sigma, \tau \subset V'$, соответствующих граням, выполнено равенство $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle = \langle \sigma \cap \tau \rangle$.

Пример¹⁶⁾ 3.6.1. (а) Каждый из 2-комплексов, изображённых на рис. 3.5.2, симплициально вложим в \mathbb{R}^3 (что показывает сам рисунок), но не в \mathbb{R}^2 .

(б) Полный 2-комплекс с 4 вершинами симплициально вложим в \mathbb{R}^3 , но не в \mathbb{R}^2 .

(с) Полный 2-комплекс с 5 вершинами симплициально вложим в \mathbb{R}^3 (рис. 3.5.1 справа).

(д) Комплекс, полученный из полного 2-комплекса с 6 вершинами удалением двух граней, не имеющих общих вершин, симплициально вложим в \mathbb{R}^3 [Sk, пример 5.2.1с'].

(е) Объединение полного 2-комплекса с 5 вершинами и конуса над множеством его вершин не является симплициально вложимым в \mathbb{R}^3 [Sk, пример 5.2.1с''].

(ф) Конус над любым планарным графом симплициально вложим в \mathbb{R}^3 (рис. 3.5.1 слева).

¹⁶⁾ Утверждения, приведенные в этом примере без ссылок, доказываются несложно.

(g) Полный 2-комплекс с 6 вершинами симплициально вложим в \mathbb{R}^4 (аналогично рис. 3.5.1 справа), но не в \mathbb{R}^3 (поскольку он содержит $\text{cop } K_5$).

(h) Полный 2-комплекс с 7 вершинами симплициально вложим в \mathbb{R}^5 (по теореме 3.6.2 ниже), но не в \mathbb{R}^4 (по линейной теореме ван Кампена — Флореса 3.1.2).

(i) Комплекс, полученный из полного 2-комплекса с 7 вершинами удалением грани, симплициально вложим в \mathbb{R}^4 [Sk, пример 5.2.1f].

(j) Конус над любым непланарным графом симплициально вложим в \mathbb{R}^4 (аналогично рис. 3.5.1 слева), но не в \mathbb{R}^3 .

(k) Склейка двух конусов над любым комплексом K по их общему основанию (т. е. *надстройкой* $\Sigma K = K * [2]$) симплициально вложима в \mathbb{R}^{d+1} тогда и только тогда, когда K симплициально вложим в \mathbb{R}^d [AKM, утверждение 13].

(l)* Верно ли, что если конус над комплексом K , не гомеоморфным S^d , симплициально вложим в \mathbb{R}^{d+1} , то K симплициально вложим в \mathbb{R}^d ? (Ответ мне неизвестен. Два комплекса называются *гомеоморфными*, если один можно получить из другого операциями подразделения ребра на рис. 3.7.1 слева и обратными к ним.)

ТЕОРЕМА 3.6.2 (общего положения). *Любой k -комплекс симплициально вложим в \mathbb{R}^{2k+1} .*

Ещё на заре топологии математики поняли, что в теореме общего положения 3.6.2 число $2k + 1$ нельзя уменьшить. См. линейную теорему ван Кампена — Флореса 3.1.2; ср. с теоремой ван Кампена — Флореса 3.2.2 и утверждением 3.7.1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.6.3 (ср. с утверждением 1.1.3). *Для любых фиксированных d, k существует алгоритм распознавания симплициальной вложимости k -комплексов в \mathbb{R}^d .*

О сложности симплициальной вложимости см. [AKM] и [Sk, конец п. 5.4].

3.7. Кусочно-линейная вложимость ГИПЕРГРАФОВ И КОМПЛЕКСОВ

Операция *подразделения ребра* изображена на рис. 3.7.1 слева (упражнение: выразите операцию *подразделения грани* на рис. 3.7.1 справа через операцию *подразделения ребра* и обратную к ней). **Подразделением** комплекса K называется любой комплекс, полученный из K путём нескольких операций *подразделения ребра*.

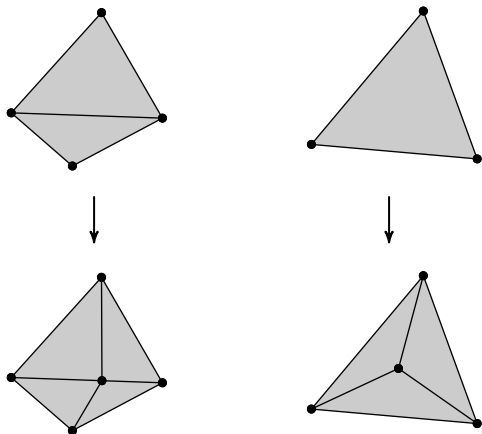


Рис. 3.7.1. Подразделения ребра и грани гиперграфа

Комплекс **PL** (кусочно-линейно) **вложим**¹⁷⁾ в \mathbb{R}^d , если некоторое его подразделение симплициально вложимо в \mathbb{R}^d .

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.7.1. Для любого k никакой из следующих k -комплексов *PL*- (и, как следствие, симплициально) не вложим в \mathbb{R}^{2k} :

- (а) Полный k -комплекс с $2k + 3$ вершинами;
- (б) k -комплекс с $3(k + 1)$ вершинами, разбитыми на $k + 1$ троек, в котором на любую $k + 1$ вершину из разных троек натянута грань (это граф $K_{3,3}$ при $k = 1$ и $(k + 1)$ -кратный джойн $[3]^{*(k+1)}$ трюеточия $[3]$ при произвольном k);
- (с) k -я декартова степень произвольного непланарного графа (см. определение в [Sk, § 5.14]).

Это утверждение — один из ранних результатов комбинаторной топологии (сейчас она называется алгебраической топологией) и топологической комбинаторики (которая также является областью активных исследований).

Пункты (а) и (б) выведены Эгбертом ван Кампеном в 1933 г. [vK32] из [Sk, лемма 5.7.3] (и её аналога для $[3]^{*(k+1)}$) при помощи аппроксимации. (Фактически выведена теорема ван Кампена 3.2.2, поскольку

¹⁷⁾ Родственное, но отличное от данного понятие топологической вложимости не используется в данном тексте. Вложимость (симплициальную, PL- или топологическую) комплекса в \mathbb{R}^d можно также определить через существование инъективного (симплициального, PL- или непрерывного) отображения тела комплекса в \mathbb{R}^d . Доказательства утверждения 3.7.1 дают его аналоги для несуществования почти 2-вложения (определённого в начале п. 3.3) и, как следствие, для несуществования топологического вложения.

ку любое отображение в \mathbb{R}^{2k} из k -мерного остова симплекса произвольной размерности продолжается на весь симплекс, см., например, [Sk20, § 3.4].) Эти пункты также выведены Алехандро Флоресом в 1934 г. [Fl34] из теоремы Борсука-Улама, см. [Sk06, § 5], [Sk, § 5.5 «Кусочно-линейная вложимость комплексов»]. Пункт (с) сформулирован в качестве гипотезы Карлом Менгером в 1929 г., однако доказан только Брайаном Уммелем в 1978 г. для $k = 2$ [Um78] и Михаилом Скопенковым в 2003 г. для произвольного k [Sk03], см. изложение идеи в обзоре [Sk14].

3.8. АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О PL-ВЛОЖИМОСТИ

ТЕОРЕМА 3.8.1 (ср. с утверждением 1.2.2). *Для любых фиксированных d, k таких, что $k = 2 \neq d - 2$ или $d \geq (3k + 3)/2$, существует алгоритм распознавания PL-вложимости k -комплексов в \mathbb{R}^d .*

В [MTW, приложение А] объясняется, что теорема 3.8.1 для $k = d = 2$ (даже с линейным алгоритмом) следует из критерия типа Куратовского планарности 2-комплексов. Этот критерий доказан Р. Халином и Х. А. Юнгом в 1964 г., см. [MTW, приложение А]. Теорема 3.8.1 для $k = d - 1 = 2$ доказана в [MST+]. В [СКВ, текст после теоремы 1.4], [ST17, § 1] объясняется, что теорема 3.8.1 для $d \geq (3k + 3)/2$ (даже с полиномиальным алгоритмом) следует из [СКВ, теорема 1.1] и критерия вложимости комплексов в терминах конфигурационных пространств. Этот критерий доказан Андре Хефлигером и Клодом Вебером, см. [СКВ, ST17] или обзор [Sk06, теорема 5.5].

Предположения теоремы 3.8.1 выполнены при $d = 2k \geq 6$. Идея доказательства для $d = 2k \geq 6$ обобщает случай $d = 2k = 2$ (§ 1.5), см. [Sk, § 5.8, 5.9 «Распознавание (\mathbb{Z}_2 -)вложимости k -комплексов в \mathbb{R}^{2k} »].

ТЕОРЕМА 3.8.2. *Для любых фиксированных d, k таких, что $5 \leq d \in \{k, k + 1\}$, не существует алгоритма распознавания PL-вложимости k -комплексов в \mathbb{R}^d .*

В [MTW, теорема 1.1] это выводится из теоремы Сергея Петровича Новикова о нераспознаваемости сферы. Аналог теоремы 3.8.2 для $8 \leq d \leq (3k + 1)/2$ анонсирован в статье [FWZ], содержащей ошибку [Sk20e, § 3] (см. также [KS20]).

Алгоритмическая задача принадлежит классу NP, если её ответ можно проверить за полиномиальное (относительно параметров задачи) число шагов. Задача называется NP-трудной, если любая задача класса NP сводится к ней за полиномиальное число шагов. Приведём

детальное определение на эквивалентном языке. Назовём 3-КНФ-формулой формулу, являющуюся конъюнкцией дизъюнкций, в которой каждая дизъюнкция содержит три переменных или их отрицания (например, $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4)$). Алгоритмическая задача распознавания свойства $\alpha(K)$ «объекта» K называется NP-трудной, если существует полиномиальный по количеству конъюнкций в 3-КНФ-формуле Φ алгоритм, строящий по Φ объект $K(\Phi)$, такой, что $\alpha(K(\Phi))$ выполнено тогда и только тогда, когда формула Φ не задаёт тождественный нуль (ср. с [ST17, Theorem 2]).

ТЕОРЕМА 3.8.3. *Для любых фиксированных d, k таких, что $3 \leq d \leq 3k/2 + 1$, алгоритмическая задача распознавания PL-вложимости k -комплексов в \mathbb{R}^d является NP-трудной.*

Это доказано для $d \geq 4$ и $d = 3$ Иржи Матушеком, Мартином Танцером и Ульрихом Вагнером в 2008 г. [MTW] и Арно де Месмэ, Йоавом Риком, Эриком Сегдвиком и Мартином Танцером в 2017 г. [MRS+] соответственно. См. более простое изложение для случая $d \geq 4$ в [ST17] (где также доказано обобщение). Доказательство для случая $d \geq 4$ использует построение [SS92, FKT, SSS] контрпримеров к аналогу упомянутому выше критерию вложимости комплексов в терминах конфигурационных пространств (при отсутствии размерностного ограничения, имеющегося в критерии). Объяснение идей этого доказательства на маломерных примерах содержится в утверждениях 1.7.1, 1.7.2 и в [Sk, § 5.10, § 5.11 «NP-трудность проблемы вложимости комплексов»].

Следующая таблица подытоживает упомянутые выше результаты по алгоритмической задаче распознавания PL-вложимости k -комплексов в \mathbb{R}^d (+ = комплекс всегда вложим, P = задача алгоритмически разрешима за полиномиальное время, D = задача алгоритмически разрешима, NPh = задача NP-трудная, UD = задача алгоритмически неразрешима).

$k \setminus d$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	P	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	P	D,NPh	NPh	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
3		D,NPh	NPh	NPh	P	+	+	+	+	+	+	+	+
4			NPh	UD	NPh	NPh	P	+	+	+	+	+	+
5				UD	UD	NPh	NPh	P	P	+	+	+	+
6					UD	UD	NPh	NPh	NPh	P	P	+	+
7						UD	UD	NPh	NPh	NPh	P	P	P

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

В этом списке звёздочками отмечены книги, обзоры и популярные статьи.

- [AKM] *Abrahamsen M., Kleist L., Miltzow T.* Geometric Embeddability of Complexes is $\exists\mathbb{R}$ -complete. arXiv:2108.02585.
- [AKS] *Avvakumov S., Karasev R., Skopenkov A.* Stronger counterexamples to the topological Tverberg conjecture // *Combinatorica*, to appear. arXiv:1908.08731.
- [Al22] *Alkin E.* Hardness of almost embedding simplicial complexes in \mathbb{R}^d , II. arXiv:2206.13486.
- [AMS+] *Avvakumov S., Mabillard I., Skopenkov A., Wagner U.* Eliminating Higher-Multiplicity Intersections, III. Codimension 2 // *Israel J. Math.* 2021. Vol. 245. P. 501–534. arxiv:1511.03501.
- [ADN+] * *Циклы в графах и в гиперграфах // Летняя конференция Турнира Городов, 2023. Представляют Э. Алкин, А. Воропаев, С. Дженжер, О. Никитенко и А. Скопенков, https://www.mccme.ru/circles/oim/cycles-in-graphs_rus.pdf [с августа 2023 г.].*
- [Ar95] * *Arnold V. I.* Topological invariants of plane curves and caustics. Providence, RI: AMS, 1995. (University Lecture Series; Vol. 5).
- [BB79] *Bajmóczy E. G., Bárány I.* On a common generalization of Borsuk's and Radon's theorem // *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 1979. Vol. 34, № 3. P. 347–350.
- [BBZ] * *Bárány I., Blagojević P. V. M., Ziegler G. M.* Tverberg's Theorem at 50: Extensions and Counterexamples // *Notices of the AMS.* 2016. Vol. 63, № 7. P. 732–739.
- [BE82] * *Boltyansky V. G., Efremovich V. A.* Intuitive Combinatorial Topology. Springer, 2001.
- [BFZ14] *Blagojević P. V. M., Frick F., Ziegler G. M.* Tverberg plus constraints // *Bull. Lond. Math. Soc.* 2014. Vol. 46, № 5. P. 953–967. arXiv:1401.0690.
- [BFZ] *Blagojević P. V. M., Frick F., Ziegler G. M.* Barycenters of Polytope Skeleta and Counterexamples to the Topological Tverberg Conjecture, via Constraints // *J. Eur. Math. Soc.* 2019. Vol. 21, № 7. P. 2107–2116. arXiv:1510.07984.
- [Bi21] *Bikeev A. I.* Criteria for integer and modulo 2 embeddability of graphs to surfaces. arXiv:2012.12070v2.
- [BM04] *Boyer J. M., Myrvold W. J.* On the cutting edge: simplified $O(n)$ planarity by edge addition, *Journal of Graph Algorithms and Applications.* 2004. Vol. 8, № 3. P. 241–273.

- [BM15] *Bogdanov I., Matushkin A.* Algebraic proofs of linear versions of the Conway — Gordon — Sachs theorem and the van Kampen — Flores theorem. arXiv:1508.03185.
- [BMZ09] *Blagojević P. V. M., Matschke B., Ziegler G. M.* Optimal bounds for a colorful Tverberg — Vrećica type problem // *Advances in Math.* 2011. Vol. 226, № 4. P. 5198–5215. arXiv:0911.2692.
- [BS17] * *Bárány I., Soberón P.* Tverberg’s theorem is 50 years old: a survey // *Bull. AMS (N. S.)* 2018. Vol. 55, № 4. P. 459–492. arXiv:1712.06119.
- [BSS] *Bárány I., Shlosman S. B., Szűcs A.* On a topological generalization of a theorem of Tverberg // *J. London Math. Soc. (2)*. 1981. Vol. 23, № 1. P. 158–164.
- [BZ16] * *Blagojević P. V. M., Ziegler G. M.* Beyond the Borsuk — Ulam theorem: The topological Tverberg story // *A Journey Through Discrete Mathematics*. Eds. M. Loeb, J. Nešetřil, R. Thomas. Cham: Springer, 2017, P. 273–341. arXiv:1605.07321v3.
- [CKV] *Čadek M., Krčál M., Vokřínek L.* Algorithmic solvability of the lifting-extension problem // *Discrete. Comput. Geom.* 2017. Vol. 57, № 4. P. 915–965. arXiv:1307.6444.
- [CLR] * *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.* Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 1999.
- [FKT] *Freedman M. H., Krushkal V. S., Teichner P.* Van Kampen’s embedding obstruction is incomplete for 2-complexes in \mathbb{R}^4 // *Math. Res. Lett.* 1994. Vol. 1, № 2. P. 167–176.
- [FK19] *Fulek R., Kynčl J.* \mathbb{Z}_2 -genus of graphs and minimum rank of partial symmetric matrices // *35th International Symposium on Computational Geometry*. Wadern: Schloss Dagstuhl. Leibniz — Zent. Inform., 2019. (LIPIcs. Leibniz Int. Proc. Inform.; Vol. 129). Article N 39. P. 1–16. <https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2019/10443/pdf/LIPIcs-SocG-2019-39.pdf>. arXiv:1903.08637.
- [Fl34] *Flores A.* Über n -dimensionale Komplexe die im E^{2n+1} absolut selbstverschlungen sind // *Ergeb. Math. Koll.* 1934. Vol. 6. S. 4–7.
- [Fo04] * *Fokink R.* A forgotten mathematician // *Eur. Math. Soc. Newsletter*. 2004. Vol. 52. P. 9–14.
- [Fr15] *Frick F.* Counterexamples to the topological Tverberg conjecture // *Oberwolfach reports*. 2015. Vol. 12, № 1. P. 318–321. arXiv:1502.00947.
- [Fr17] *Frick F.* On affine Tverberg-type results without continuous generalization. arXiv:1702.05466.
- [FS20] *Frick F., Soberón P.* The topological Tverberg problem beyond prime powers. arXiv:2005.05251.
- [FWZ] *Filakovský M., Wagner U., Zhechev S.* Embeddability of simplicial complexes is undecidable // *Proceedings of the 2020 ACM-SIAM*

- Symposium on Discrete Algorithms. <https://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/1.9781611975994.47>.
- [GDI] * Глибичук А. А., Дайняк А. Б., Ильинский Д. Г., Купавский А. Б., Райгородский А. М., Скопенков А. Б., Чернов А. А. Элементы дискретной математики в задачах. М.: МЦНМО, 2016. <http://www.mccme.ru/circles/oim/discrbook.pdf>
- [Gr10] Gromov M. Singularities, expanders and topology of maps. Part 2: From combinatorics to topology via algebraic isoperimetry // Geometric and Functional Analysis. 2010. Vol. 20, № 2. P. 416–526.
- [GS79] Gruber P. M., Schneider R. Problems in geometric convexity // Contributions to geometry (Proc. Geom. Sympos., Siegen, 1978). Basel — Boston, Mass.: Birkhäuser, 1979. P. 255–278.
- [Ha] * Harary F. Graph theory. (Русс. пер.: Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.)
- [HT74] Hopcroft J., Tarjan R. E. Efficient planarity testing // J. Assoc. Comput. Mach. 1974. Vol. 21, № 4. P. 549–568.
- [Is] * <http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Isotopy>.
- [JVZ] Jojić D., Vrećica S. T., Živaljević R. T. Topology and combinatorics of “unavoidable complexes”. arXiv:1603.08472v1.
- [Kho] Khoroshavkina N. A simple characterization of graphs of cutwidth 2. arXiv:1811.06716.
- [Ko18] * Колпаков Е. С. Доказательство теоремы Радона при помощи понижения размерности // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 23. М.: МЦНМО, 2018. С. 130–133. arXiv:1903.11055.
- [KRR+] * Kogan E., Retinskiy V., Riabov E., Skopenkov A. Towards higher-dimensional combinatorial geometry. <https://www.mccme.ru/circles/oim/multicomb.pdf>.
- [KS20] Karasev R., Skopenkov A. Some “converses” to intrinsic linking theorems // Discr. Comp. Geom., to appear. arXiv:2008.02523.
- [Lo] Longueville M. de. Notes on the topological Tverberg theorem // Discrete Math. 2002. Vol. 247, № 1–3. P. 271–297. (The paper first appeared in Discrete Math., 2001, vol. 241, pp. 207–233, but the original version suffered from serious publisher’s typesetting errors.)
- [Ma97] Makarychev Yu. A short proof of Kuratowski’s graph planarity criterion // J. Graph Theory. 1997. Vol. 25, № 2. P. 129–131.
- [Ma03] * Matoušek J. Using the Borsuk — Ulam theorem: Lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Berlin: Springer Verlag, 2003. (Universitext).
- [MRS+] Mesmay A. de, Rieck Y., Sedgwick E., Tancer M. Embeddability in \mathbb{R}^3 is NP-hard. arXiv:1708.07734.

- [MST+] *Matoušek J., Sedgwick E., Tancer M., Wagner U.* Embeddability in the 3-sphere is decidable // *J. ACM.* 2018. Vol. 65, № 1. P. 1–49. arXiv:1402.0815.
- [MT01] * *Mohar B., Thomassen C.* *Graphs on Surfaces.* Baltimore, MD: John Hopkins University Press, 2001. (Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences).
- [MTW10] *Matoušek J., Tancer M., Wagner U.* A geometric proof of the colored Tverberg theorem // *Discr. Comp. Geom.* 2012. Vol. 47, № 2. P. 245–265. arXiv:1008.5275.
- [MTW] *Matoušek J., Tancer M., Wagner U.* Hardness of embedding simplicial complexes in \mathbb{R}^d // *J. Eur. Math. Soc.* 2011. Vol. 13, № 2. P. 259–295. arXiv:0807.0336.
- [MW15] *Mabillard I., Wagner U.* Eliminating Higher-Multiplicity Intersections, I. A Whitney Trick for Tverberg-Type Problems. arXiv:1508.02349.
- [MW16] *Mabillard I., Wagner U.* Eliminating Higher-Multiplicity Intersections, II. The Deleted Product Criterion in the r -Metastable Range. arXiv:1601.00876v2.
- [Oz] *Özaydin M.* Equivariant maps for the symmetric group, unpublished. <http://minds.wisconsin.edu/handle/1793/63829>.
- [Pe72] * *Peterson B. B.* The Geometry of Radon's Theorem // *Amer. Math. Monthly.* 1972. Vol. 79. P. 949–963.
- [Pr04] * *Прасолов В. В.* *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии.* М.: МЦНМО, 2004. <http://www.mccme.ru/prasolov>.
- [RRS] * *Ретинский В. И., Рябичев А. Д., Скопенков А. Б.* Мотивированное изложение доказательства теоремы Тверберга // *Математическое просвещение.* Сер. 3. Вып. 27. М.: МЦНМО, 2021. С. 166–169. arXiv:2008.08361.
- [Sa91] *Sarkaria K. S.* A one-dimensional Whitney trick and Kuratowski's graph planarity criterion // *Israel J. Math.* 1991. Vol. 73, № 1. P. 79–89. <http://kssarkaria.org/docs/One-dimensional.pdf>.
- [Sa91g] *Sarkaria K. S.* A generalized van Kampen — Flores theorem // *Proc. AMS.* 1991. Vol. 111, № 2. P. 559–565.
- [Sc04] *Schöneborn T.* On the Topological Tverberg Theorem. arXiv:math/0405393.
- [Sc13] * *Schaefer M.* Hanani — Tutte and related results // *Geometry — intuitive, discrete, and convex.* Budapest: János Bolyai Math. Soc., 2013. (Bolyai Soc. Math. Stud.; Vol. 24). P. 259–299. <http://ovid.cs.depaul.edu/documents/htsurvey.pdf>.
- [Sh18] * *Shlosman S.* Topological Tverberg Theorem: the proofs and the counterexamples // *Russian Math. Surveys.* 2018. Vol. 73, № 2. P. 175–182. arXiv:1804.03120.

- [Si16] *Simon S.* Average-value Tverberg partitions via finite Fourier analysis // *Israel J. Math.* 2016. Vol. 216, № 1. P. 891–904. arXiv:1501.04612.
- [Sk03] *Skopenkov M.* Embedding products of graphs into Euclidean spaces // *Fund. Math.* 2003. Vol. 179, № 3. P. 191–198. arXiv:0808.1199.
- [Sk05] * *Скопенков А. Б.* Вокруг критерия Куратовского планарности графов // *Математическое просвещение Сер. 3. Вып. 9.* М.: МЦНМО, 2005. С. 116–128. arXiv:0802.3820.
- [Sk06] * *Skopenkov A.* Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces // *Surveys in contemporary mathematics.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; Vol. 347). P. 248–342. arXiv:math/0604045.
- [Sk14] * *Скопенков А. Б.* Реализуемость гиперграфов и неотъемлемая зацепленность // *Математическое просвещение, в печати.* arXiv:1402.0658.
- [Sk16] * *Skopenkov A.* User’s guide to the topological Tverberg Conjecture. arXiv:1605.05141v4. (Ранее опубликован сокращённый вариант: *Russian Math. Surveys.* 2018. Vol. 73, № 2. P. 323–353.)
- [Sk16’] * *Skopenkov A.* Stability of intersections of graphs in the plane and the van Kampen obstruction // *Topology Appl.* 2018. Vol. 240. P. 259–269. arXiv:1609.03727.
- [Sk17] *Skopenkov A.* Eliminating higher-multiplicity intersections in the metastable dimension range. arXiv:1704.00143.
- [Sk18] * *Skopenkov A.* Invariants of graph drawings in the plane // *Arnold Math. J.* 2020. Vol. 6, № 1. P. 21–55. Full version: arXiv:1805.10237.
- [Sk20] * *Skopenkov A.* Algebraic Topology From Geometric Viewpoint (in Russian) / 2nd ed. Moscow: MCCME, 2020. Part of the book: <http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf>. Part of the English translation: <https://www.mccme.ru/circles/oim/obstructeng.pdf>.
- [Sk20e] * *Skopenkov A.* Extendability of simplicial maps is undecidable // *Discr. Comp. Geom.* 2022. Vol. 69, № 1. P. 1–10. arXiv:2008.00492.
- [Sk] * *Скопенков А.* Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения. <http://www.mccme.ru/circles/oim/algorg.pdf>.
- [Sk20u] * *Скопенков А. Б.* Основы теории узлов и зацеплений для пользователя // *Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 27.* М.: МЦНМО, 2021. С. 128–165. (English version published in: *Topology, Geometry, and Dynamics.* Providence, RI: AMS, 2021. (Contemporary Mathematics; Vol. 772). P. 281–309. arXiv:2001.01472.)
- [SS92] *Segal J., Spież S.* Quasi embeddings and embeddings of polyhedra in \mathbb{R}^m // *Topology Appl.* 1992. Vol. 45, № 3. P. 275–282.

- [SSS] *Segal J., Skopenkov A., Spieź S.* Embeddings of polyhedra in \mathbb{R}^m and the deleted product obstruction // *Topology Appl.* 1998. Vol. 85, № 1–3. P. 335–344.
- [ST07] * *Скопенков А. Б., Телишев А. С.* И вновь о критерии Куратовского планарности графов // *Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 11.* М.: МЦНМО, 2007. С. 159–160.
- [ST17] *Skopenkov A., Tancer M.* Hardness of almost embedding simplicial complexes in \mathbb{R}^d // *Discr. Comp. Geom.* 2019. Vol. 61, № 2. P. 452–463. arXiv:1703.06305.
- [SZ05] *Schöneborn T., Ziegler G.* The Topological Tverberg Theorem and Winding Numbers // *J. Comb. Theory. Ser. A.* 2005. Vol. 112, № 1. P. 82–104. arXiv:math/0409081.
- [Ta] * *Handbook of Graph Drawing and Visualization / Ed. by R. Tamassia.* CRC Press, 2016.
- [Th81] * *Thomassen C.* Kuratowski’s theorem // *J. Graph. Theory.* 1981. Vol. 5, № 3. P. 225–241.
- [Um78] *Ummel B.* The product of nonplanar complexes does not imbed in 4-space // *Trans. AMS.* 1978. Vol. 242. P. 319–328.
- [Vi02] * *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. М.: Факториал Пресс, 2002.
- [vK32] *Kampen E. R. van.* Komplexe in euklidischen Räumen // *Abh. Math. Sem. Hamburg.* 1933. Vol. 9. S. 72–78; Berichtigung dazu. S. 152–153. (English translation by Tu Tâm Nguyễn-Phan: https://sites.google.com/site/tutamnguyenphan/van_Kampen.pdf.)
- [Vo96] *Воловиков А. Ю.* К топологическому обобщению теоремы Тверберга // *Матем. заметки.* 1996. Т. 59, вып. 3. С. 454–465.
- [Vo96v] *Воловиков А. Ю.* К теореме ван Кампена — Флореса // *Матем. заметки.* 1996. Т. 59, вып. 5. С. 663–670.
- [Wn] * https://en.wikipedia.org/wiki/Winding_number.
- [Wu65] * *Wu W. T.* A Theory of Embedding, Immersion and Isotopy of Polytopes in an Euclidean Space. Peking: Science Press, 1965.
- [Zi11] * *Ziegler G. M.* 3N Colored Points in a Plane // *Notices of the AMS.* 2011. Vol. 58, № 4. P. 550–557.