Вокруг правильного многоугольника

С. Б. Гашков

В статье предлагаются несколько задач и теорем (в основном малоизвестных), связанных с правильными многоугольниками (и комплексными числами). Экстремальные свойства многоугольников рассматриваться не будут, как и теория их построения циркулем и линейкой, так как они требуют специальных публикаций, которые к тому же не раз появлялись в «Математическом просвещении».

Некоторые неравенства

Широко известно, что для правильного треугольника сумма расстояний от произвольной точки до его вершин достигает минимума только в его центре и это утверждение можно сформулировать в виде неравенства: если ABC — правильный треугольник с единичной стороной и O — произвольная точка, то

$$AO + BO + CO \geqslant \sqrt{3}$$

и это неравенство обращается в равенство только для центра треугольника.

Из неравенства $3(x^2+y^2+z^2) \geqslant (x+y+z)^2$ легко следует, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки до вершин правильного треугольника достигает минимума только в его центре.

Естественно возникает такая задача: найти минимум

$$|AO||BO| + |CO||BO| + |CO||AO|$$

для данного правильного треугольника ABC. Но решить её ни алгебраически, ни геометрически оказалось не просто, хотя обе предыдущие задачи имеют красивые геометрические и алгебраические решения даже в более общей постановке. Возможно, причина в том, что в этой задаче не одна, а четыре экстремальные точки.

Первую из указанных выше задач (о минимуме суммы расстояний от точки до вершин правильного треугольника) можно сформулировать и для произвольного треугольника или даже для произвольной системы точек пространства. Функция, равная расстоянию от произвольной точки X до данной точки A_i является выпуклой, сумма таких функций также выпукла, поэтому точка минимума единственна[1)], и можно доказать, что сумма единичных векторов, направленных из неё в точки A_i, будет равна нулю, если точка с этим свойством существует (см. [5]). Например, в случае выпуклого четырёхугольника $A_1A_2A_3A_4$ это точка пересечения диагоналей (тогда утверждение легко доказывается и без использования сформулированного выше свойства), в случае треугольника с углами, меньшими 120 градусов, такой точкой является точка, из которой стороны треугольника видны под равными углами (она называется точкой Торричелли)[2)], а в случае произвольного тетраэдра такой точкой также является точка, из которой все его стороны видны под равными углами, если такая точка есть (тогда указанные углы будут равны $\arccos(-1/3)$).

Вторую из приведённых выше задач также можно сформулировать для произвольного треугольника или даже для произвольной системы точек пространства. Функция, равная квадрату расстояния от произвольной точки X до данной точки A_i является выпуклой, сумма таких функций также выпукла, точка минимума единственна, и можно доказать, что она совпадает с центром тяжести данной системы точек (это теорема Лейбница), см. например, [4].

В случае, когда система точек образует правильный многоугольник, обе задачи имеют общую экстремальную точку — центр этого многоугольника, вторая задача легко следует из первой с помощью известного неравенства

$$n(x_1^2 + \ldots + x_n^2) \geqslant (x_1 + \ldots + x_n)^2,$$

а первая задача имеет несколько элементарных решений (см., например, [6]).

Задачу о сумме попарных произведений расстояний до вершин правильного треугольника можно обобщить на случай правильного n-угольника разными способами.

Обозначим

$$\sigma_k = \sigma_k(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$$

---

1) Механическое приспособление для нахождения этой точки описано в книге [12].

2) Problems.ru, задача 57541, а также [8, 9].

— элементарный симметрический многочлен от переменных $a_1, \ldots, a_n$, и положим

$$p_k(a_1, \ldots, a_n) = \frac{\sigma_k}{\binom{n}{k}},$$

где $\binom{n}{k}$ — биномиальный коэффициент. Очевидно, что $p_k(a, \ldots, a) = a^k$, $k = 1, \ldots, n$. Далее понадобится неравенство Ньютона — Маклорена (см. [1]), уточняющее (или, как говорят, интерполирующее) неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим: для любых положительных $a_1, \ldots, a_n$

$$p_1(a_1, \ldots, a_n) \geqslant p_2(a_1, \ldots, a_n)^{1/2} \geqslant \ldots \geqslant p_n(a_1, \ldots, a_n)^{1/n}.$$

Задача 1. *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — вершины правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом R, и P — произвольная точка. Пусть*

$$P_k = p_k(|PA_1|, \ldots, |PA_n|), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Докажите, что

$$P_1 \geqslant P_2^{1/2} \geqslant \ldots \geqslant P_{n-1}^{1/(n-1)} \geqslant R.$$

Последнее неравенство обращается в равенство только когда P совпадает с одной из вершин A_i этого n-угольника или с его центром. Остальные неравенства обращаются в равенство только когда P совпадает с его центром.

В частности, сумма расстояний от произвольной точки до вершин правильного n-угольника принимает минимальное значение только в его центре, сумма попарных произведений этих расстояний тоже принимает минимальное значение только в его центре и т. д., но сумма произведений всех расстояний, кроме одного, принимает минимальное значение и в его центре, и в его вершинах. Указанную в задаче 1 цепочку неравенств можно продолжить, заменив R на $P_n^{1/n}$, однако минимальное значение произведения P_n всех расстояний очевидно равно нулю.

Для решения задачи понадобится полезная и в других обстоятельствах

Задача 2. *Докажите, что для многочлена $p(z)$ степени не выше $n-1$ справедлива следующая интерполяционная формула*:

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} p(\varepsilon^k) \frac{\varepsilon^k}{n} \prod_{j, j \neq k} (z - \varepsilon^j), \quad \text{где } \varepsilon = e^{2\pi i/n}.$$

Задача 3. *В дополнение к задаче 1 докажите, что при выполнении условия $|PO| = r \neq R$, где O — центр описанной вокруг правильного n-угольника $A_1 \ldots A_n$ окружности, справедливо неравенство*

$$R^n + r^n \geqslant P_n \geqslant |R^n - r^n|.$$

Указания и решения

2. *Решение.* Согласно интерполяционной формуле Лагранжа

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} p(\varepsilon^k) \frac{\prod_{j, j\neq k}(z - \varepsilon^j)}{\prod_{j, j\neq k}(\varepsilon^k - \varepsilon^j)},$$

далее, дифференцируя

$$z^n - 1 = \prod_{j=1}^{n} (z - \varepsilon^j),$$

имеем

$$nz^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{j, j\neq k} (z - \varepsilon^j),$$

откуда

$$n\varepsilon^{-m} = n\varepsilon^{m(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{j, j\neq k} (\varepsilon^m - \varepsilon^j) = \prod_{j, j\neq m} (\varepsilon^m - \varepsilon^j),$$

значит,

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} p(\varepsilon^k) \frac{\varepsilon^k}{n} \prod_{j, j\neq k} (z - \varepsilon^j).$$

1. *Решение.* В силу неравенства Ньютона — Маклорена достаточно доказать, что $P_{n-1} \geqslant R^{n-1}$. Без ограничения общности считаем, что $R = 1$ и точкам A_k соответствуют числа ε^k, $k = 1, \ldots, n$, где $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$, $\varepsilon^n = 1$. Пусть точка P соответствует числу z. Тогда

$$nP_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \prod_{j\neq k} (z - \varepsilon^j) \right|.$$

Но согласно задаче 2 в случае многочлена $p(z) = 1$ имеем

$$n = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k \prod_{j, j\neq k} (z - \varepsilon^j).$$

Остаётся применить к обеим частям тождества неравенство треугольника $|z_1+\ldots+z_n| \leqslant |z_1|+\ldots+|z_n|$ и получить неравенство

$$nP_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\left|\prod_{j,j\neq k}(z-\varepsilon^j)\right| \geqslant n.$$

Равенство в нём достигается только тогда, когда либо $z=\varepsilon^k$ при некотором k (тогда все слагаемые нулевые, кроме одного), либо при всех $k=1,\ldots,n-1$

$$\frac{(z-1)\varepsilon^k}{z-\varepsilon^k}=\frac{\varepsilon^k\prod_{j,j\neq k}(z-\varepsilon^j)}{\varepsilon^n\prod_{j=1}^{n-1}(z-\varepsilon^j)}\in\mathbb{R}$$

(только тогда все слагаемые суммы пропорциональны друг другу с положительными коэффициентами).

В первом случае из равенства $nP_{n-1}=n$ в силу симметрии следует, что для любой вершины рассматриваемого правильного n-угольника произведение расстояний от неё до остальных вершин равно n, откуда получаем ещё одно доказательство п. в) следующей далее задачи 6.

Так как

$$\frac{(z-1)\varepsilon^k}{z-\varepsilon^k}=w,\ w\in\mathbb{R},$$

получаем, что

$$z=\frac{(w-1)\varepsilon^k}{w-\varepsilon^k}.$$

Это дробно-линейное преобразование переводит действительную прямую в окружность, проходящую через точки $0, 1, \varepsilon_k, k=1,\ldots,n-1$, значит, точка $z\neq 1$ должна принадлежать пересечению всех таких окружностей (а они различны, так как имеют две общие точки и не совпадают с описанной окружностью n-угольника), т. е. совпадать с 0.

3. *Указание.* Применить задачу 4 из следующего раздела.

Равенства Муавра, Коутса и Гобсона

Здесь сформулированы в виде задач несколько классических, но не слишком известных теорем (см., например, [13], а также [11] и [7]).

Задача 4 (теорема Коутса — Муавра). *В окружность радиусом a с центром O вписан правильный n-угольник $A_1\ldots A_n$. Пусть $|PO|=c$, $\angle POA_1=\theta$, тогда очевидно $\angle POA_{k+1}=\theta+2k\pi/n$, $k=1,\ldots,n-1$. Докажите, что*

$$|PA_1|^2\ldots|PA_n|^2=a^{2n}-2(ac)^n\cos n\theta+c^{2n},$$

и в частности, если $c = a$, то

$$|PA_1| \dots |PA_n| = 2a^n \sin \frac{\theta}{2}$$

(*теорема Муавра*). *Если P лежит на радиусе OA_k, то*

$$|PA_1| \dots |PA_n| = |a^n - c^n|,$$

а если P лежит на биссектрисе угла A_kOA_{k+1}, то

$$|PA_1| \dots |PA_n| = a^n + c^n.$$

Задача 5 (Гобсон). *В окружность радиусом a с центром O вписан правильный n-угольник $A_1 \dots A_n$. Точка P лежит на той же окружности. Докажите, что*:

а) *если P лежит на дуге A_1A_n, то*

$$|PA_1||PA_2| + |PA_2||PA_3| + \dots + |PA_{n-1}||PA_n| - |PA_n||PA_1| = 2na^2 \cos \frac{\pi}{n},$$

б) *если P лежит на дуге A_1A_n, то при нечётном n*

$$|PA_1| - |PA_2| + |PA_3| - \dots + |PA_n| = 0,$$

в) *всегда*

$$|PA_1|^2 + \dots + |PA_n|^2 = 2na^2.$$

Задача 6. *Правильный n-угольник вписан в единичную окружность. Докажите, что*:

а) *сумма квадратов всех его сторон и диагоналей равна n^2,*

б) *сумма всех его сторон и диагоналей равна $n \operatorname{ctg} \pi/2n$,*

в) *произведение всех его сторон и диагоналей равно $n^{n/2}$.*

г) *Обозначим вершины n-угольника через $A_1, \dots, A_n$ и продолжим нумерацию по кругу далее, так что $A_{n+1} = A_1$, $A_{n+2} = A_2$ и т. д. Тогда $|OA_1 + OA_4 + OA_9 + \dots + OA_{n^2}| = \sqrt{n}$ для нечётного n, где O — центр окружности.*

Указания и решения

4. *Указание.* Для вычисления $|PA_k|$ применить теорему косинусов и получить, что

$$|PA_k|^2 = a^2 - 2ac \cos\left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right) + c^2,$$

а потом применить тождества задачи 10. После подстановки $a = c$ применить формулу двойного угла. В случае точки на радиусе можно считать, что $k = 1$, тогда $\theta = 0$. В случае точки на биссектрисе можно считать, что $\theta = \pi/n$.

5. *Указание.* Пункт а). Воспользоваться тем, что площадь n-угольника $A_1 \dots A_n$ равна сумме площадей треугольников A_kPA_{k+1}, $k=1,\dots,n-1$, уменьшенной на площадь треугольника A_1PA_n. Для вычисления их площадей применить формулу $(ab\sin\alpha)/2$, где в качестве α брать углы при вершине P. Согласно теореме о вписанном угле эти углы равны π/n, а один угол равен их сумме $(n-1)\pi/n$.

Пункт б). Обозначим угол, под которым видна хорда A_1P из центра окружности, через φ. Тогда её длина равна $2a\sin(\varphi/2)$. Аналогично длины хорд A_kP равны $2a\sin(\varphi/2+(k-1)\pi/n)$. Поэтому достаточно доказать, что

$$\sin\frac{\varphi}{2} - \sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{2\pi}{n}\right) - \ldots + \sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = 0.$$

Но это вытекает из тождества задачи 9.

Пункт в). Применить для каждого треугольника A_kPA_{k+1}, $k=1,\dots,n-1$, теорему косинусов, выражая b^2 в виде

$$|A_kP|^2 + |A_{k+1}P|^2 - 2|A_kP||A_{k+1}P|\cos\frac{\pi}{n},$$

где $b=2a\sin(\pi/n)$ — сторона n-угольника, и аналогичную формулу написать и для треугольника A_1PA_n. Сложить полученные равенства и воспользоваться тождеством п. а).

6. *Указание* к п. а)–б). Применить задачи 4,

5. *Указание* к п. в). Для получения ответа можно вычислить произведение всех сторон и диагоналей, выходящих из одной вершины, и возвести результат в степень $n/2$ (так как в полном произведении каждая сторона или диагональ появляется дважды). Стороны и диагонали имеют длины $2\sin(k\pi/n)$, $k=1,\dots,n-1$. Далее примените формулу Валлиса из задачи 11 следующего раздела.

Можно также решить задачу, используя определитель Вандермонда для чисел

$$z_k = e^{\imath 2\pi k/n}, \quad k=0,\dots,n-1.$$

Эта матрица с элементами

$$a_{k,j} = z_k^j = e^{\imath 2\pi kj/n}, \quad k,j=0,\dots,n-1,$$

является матрицей дискретного преобразования Фурье (ДПФ) n-го порядка. Умножая её на комплексно сопряжённую к ней матрицу

$$a^*_{k,j} = \bar z_k^j = z_k^{-j} = e^{-\imath 2\pi kj/n}, \quad k,j=0,\dots,n-1$$

(если $|z|=1$, то $\bar z = 1/z$), получаем диагональную матрицу с числами n на диагонали (так как в силу формулы геометрической прогрессии

$\sum_{l=0}^{n-1} e^{\imath 2\pi(k-j)l/n} = 0$ при $k \neq j$), значит, квадрат модуля определителя матрицы ДПФ n-го порядка равен $n^{n/2}$ (определители комплексно сопряжённых матриц комплексно сопряжены друг с другом, определитель произведения матриц равен произведению определителей). С другой стороны, согласно формуле для определителя Вандермонда квадрат его модуля равен

$$\prod_{0\leqslant k<j<n} |z_k - z_j|^2 = \prod_{0\leqslant k<j<n} |e^{\imath 2\pi k/n} - e^{\imath 2\pi j/n}|^2$$

— квадрату произведения длин сторон и диагоналей правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность. Отсюда можно также вывести решение задачи 11.

Указание к п. г). См. задачу 47.

Тригонометрические тождества Муавра и Валлиса

Вывод тождеств будет основан на широко известных фактах, которые сформулируем в виде задач.

Задача 7. *Решите в комплексных числах уравнение $z^n = a$.*

Задача 8. *Проверьте тождества*:

$$|1 - e^{\imath 2x}| = 2\sin|x|, \quad |e^{\imath x} - e^{\imath y}| = 2\sin\left|\frac{y-x}{2}\right|.$$

Задача 9. *Докажите тождества*:

а) $e^{2\imath\pi/n} + e^{4\imath\pi/n} + \ldots + e^{2(n-1)\imath\pi/n} = -1;$

б) $e^{\imath\pi/2n} - e^{2\imath\pi/2n} + \ldots + e^{(2n-1)\imath\pi/n} = 0;$

в) $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{n}\right) + \ldots + \cos\left(\frac{x + 2(n-1)\pi}{n}\right) = 0;$

г) $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{n}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{x + 2(n-1)\pi}{n}\right) = 0;$

д) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) - \sin\left(x + \frac{2\pi}{2n}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{x + (2n-1)\pi}{2n}\right) = 0;$

е) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) - \cos\left(x + \frac{2\pi}{2n}\right) + \ldots + \cos\left(\frac{x + (2n-1)\pi}{2n}\right) = 0.$

Задача 10 (де Муавр). *Докажите тождества*:

а) $x^{2n} - 2x^n\cos\theta + 1 = (x^n - \cos\theta - \imath\sin\theta)(x^n - \cos\theta + \imath\sin\theta);$

б) $x^{2n} - 2x^n\cos\theta + 1 =$

$$= \prod_{s=1}^{n}\left(x - \cos\frac{\theta + 2s\pi}{n} - \imath\sin\frac{\theta + 2s\pi}{n}\right)\left(x - \cos\frac{\theta + 2s\pi}{n} + \imath\sin\frac{\theta + 2s\pi}{n}\right);$$

в) $x^{2n}-2x^n\cos\theta+1=\prod\limits_{s=1}^{n}\Big(x^2-2x\cos\frac{\theta+2s\pi}{n}+1\Big)$;

г) $x^{2n}-2x^ny^n\cos\theta+y^{2n}=\prod\limits_{s=1}^{n}\Big(x^2-2xy\cos\frac{\theta+2s\pi}{n}+y^2\Big)$;

д) $x^n+x^{-n}-2\cos\theta=\prod\limits_{s=1}^{n}\Big(x+x^{-1}-2\cos\frac{\theta+2s\pi}{n}\Big)$;

е) $\cos n\varphi-\cos n\theta=2^{n-1}\prod\limits_{s=1}^{n}\Big(\cos\varphi-\cos\Big(\theta+\frac{2s\pi}{n}\Big)\Big)$.

Задача 11. *Докажите тождества Валлиса*

$$\prod_{l=1}^{n-1}\sin\frac{l\pi}{n}=n2^{-n+1},\qquad \prod_{l=1}^{n-1}\sin\frac{l\pi}{2n}=\sqrt{n}\,2^{-n+1},$$
$$\prod_{l=1}^{n-1}\cos\frac{l\pi}{2n}=\sqrt{n}\,2^{-n+1},\quad \prod_{l=1}^{n}\sin\frac{(2l-1)\pi}{4n}=2^{-n+1/2}.$$

Следующая формула используется при выводе формулы Стирлинга для факториала и обычно доказывается с помощью интегрального исчисления.

Задача 12. *Докажите неравенство и формулу Валлиса для числа* π (*«бесконечное произведение Валлиса»*):

$$\frac{\pi}{2}\frac{2n}{2n+1}<\prod_{l=1}^{n}\frac{4l^2}{4l^2-1}<\frac{\pi}{2},$$
$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\prod_{l=1}^{n}\frac{4l^2}{(2l-1)(2l+1)}=\prod_{l=1}^{\infty}\frac{4l^2}{4l^2-1}.$$

Эта формула является частным случаем эйлерова представления синуса в виде бесконечного произведения:

$$\sin\pi x=\pi x\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{x^2}{n^2}\Big).$$

При $x=1/2$ получается формула Валлиса.

Для приближённого вычисления π она мало подходит из-за медленной сходимости. Зато результат всегда получается в виде обыкновенной дроби. Размеры числителя и знаменателя у неё очень быстро растут, что тоже затрудняет вычисления. Можно после добавления каждого множителя выполнять сокращение полученной дроби. Но всё равно размеры несократимой дроби растут очень быстро. Например, при $n = 50$ получается дробь

$$P := \frac{156927543384667019095894735580191660402558886111600862822 4}{1004090061179346759123504450893009487814484408025470281875}.$$

Погрешность приближения равна 0,007913181.

Часто встречаются в разных задачниках следующие неравенства.

Задача 13. *Докажите, что*

$$\frac{1}{2\sqrt{m}} < \prod_{k=1}^{m-1} \frac{2k}{2k+1} < \frac{1}{\sqrt{m}}, \quad \sqrt{m} < \prod_{k=1}^{m} \frac{2k}{2k-1} < 2\sqrt{m}.$$

Из неравенства Валлиса следует более точные границы.

Задача 14. *Докажите неравенство*

$$\sqrt{n\pi} < \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} < \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}}.$$

Из задачи 12 также можно вывести следующую оценку для центрального биномиального коэффициента.

Задача 15. *Докажите при чётном n неравенства*

$$\frac{2^{n+1/2}}{\sqrt{(n+1)\pi}} < \binom{n}{n/2} < \frac{2^{n+1/2}}{\sqrt{n\pi}}.$$

Указания и решения

10. *Указание.* Пункт б) следует из п. а) и задачи 7, п. в) следует из п. б) с помощью попарного перемножения скобок, п. г) следует из п. в) с помощью подстановки x/y вместо x, п. д) следует из п. г) с помощью подстановки $1/x$ вместо y, п. е) следует из п. д) с помощью подстановки $e^{\imath\varphi}$ вместо x и $n\theta$ вместо θ.

11. *Решение.* Третье равенство вытекает из второго в силу следствия формул приведения:

$$\sin\frac{k\pi}{2n} = \cos\frac{(n-k)\pi}{2n}.$$

Перемножив второе и третье равенство и воспользовавшись формулой двойного угла $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, получаем, что первое равенство равносильно второму (или третьему). Четвёртое равенство вытекает из второго, если заметить, что

$$\prod_{l=1}^{n} \sin\frac{(2l-1)\pi}{4n} = \frac{\prod_{l=1}^{2n-1}\sin\frac{l\pi}{4n}}{\prod_{l=1}^{n-1}\sin\frac{2l\pi}{4n}} = \frac{P_{2n}}{P_n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n},$$

где

$$P_n = \prod_{l=1}^{n-1} \sin\frac{l\pi}{2n} = \sqrt{n}2^{-n+1}.$$

Докажем первое равенство:

$$\prod_{l=1}^{n-1} \sin\frac{l\pi}{n} = n2^{-n+1}.$$

Заметим, что многочлен

$$p_n(x) = 1 + x + \ldots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

имеет комплексные корни $x_k = \varepsilon^k$, $k = 1, \ldots, n-1$, где $\varepsilon = e^{2\pi\imath/n}$, так как двучлен $x^n - 1$ имеет те же корни, а также корень $x_0 = \varepsilon^0 = 1$. Из теоремы Безу следует тогда тождество

$$p_n(x) = \prod_{k=1}^{n-1}(x - x_k),$$

откуда в силу тождества $|1 - e^{2\imath x}| = 2\sin|x|$ задачи 8 имеем равенство

$$n = p_n(1) = |p_n(1)| = \left|\prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k)\right| = \prod_{k=1}^{n-1}|1 - e^{2k\pi\imath/n}| =$$
$$= \prod_{k=1}^{n-1} 2\sin\frac{k\pi}{n} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}.$$

12. *Решение.* Из неравенства $\sin k\alpha \leqslant k\sin\alpha$, $0 < \alpha < \pi/2$, следует при $k > 1$, что $\dfrac{\sin\alpha}{\sin k\alpha} > \dfrac{1}{k}$, откуда имеем

$$1 - \left(\frac{\sin\alpha}{\sin k\alpha}\right)^2 < \frac{k^2 - 1}{k^2}.$$

Применяя тождество

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x - y)\sin(x + y)$$

(получающееся, например, умножением формул синусов суммы и разности) получаем, что

$$\frac{\sin(k-1)\alpha}{\sin k\alpha}\cdot\frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin k\alpha} = \frac{\sin^2 k\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2 k\alpha} = 1 - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 k\alpha} < 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2},$$

$$\frac{\sin k\alpha}{\sin(k-1)\alpha}\,\frac{\sin k\alpha}{\sin(k+1)\alpha} > \frac{k^2}{k^2-1}.$$

Перемножая полученные неравенства, имеем

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)\alpha}{\sin 2k\alpha}\cdot\frac{\sin(2k+1)\alpha}{\sin 2k\alpha}<\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2-1}{4k^2}=Q_n,$$

$$\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\sin 2k\alpha}{\sin 2(k+1)\alpha}\cdot\frac{\sin(2k+2)\alpha}{\sin 2(k+1)\alpha}>\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(2k+1)^2}{2k(2k+2)}=$$

$$=\frac{4n}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2-1}{4k^2}=\frac{4nQ_n}{2n+1}.$$

Полагая $\alpha=\pi/(4n)$ и используя тождества задачи 11, левые части этих неравенств можно записать в виде

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)\alpha}{\sin 2k\alpha}\cdot\frac{\sin(2k+1)\alpha}{\sin 2k\alpha}=\frac{\sin(2n+1)\alpha\left(\prod_{k=1}^{n}\sin(2k-1)\alpha\right)^2}{\sin\alpha\prod_{k=1}^{n}\sin^2 2k\alpha}=$$

$$=\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{(2^{-n+1/2})^2}{P_n^2}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{2^{-2n+1}}{(\sqrt{n}2^{-n+1})^2}=\frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n},$$

где

$$P_n=\prod_{l=1}^{n}\sin\frac{l\pi}{2n}=\prod_{l=1}^{n-1}\sin\frac{l\pi}{2n}=\sqrt{n}\,2^{-n+1},$$

и соответственно

$$\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\sin(2k+1)\alpha}{\sin 2k\alpha}\cdot\frac{\sin(2k+1)\alpha}{\sin(2k+2)\alpha}=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha\sin 2n\alpha}{\sin\alpha\sin(2n+1)\alpha}\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)\alpha}{\sin 2k\alpha}\cdot\frac{\sin(2k+1)\alpha}{\sin 2k\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos\alpha\sin 2n\alpha}{\sin(2n+1)\alpha}\frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}=\frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{2n+1}{4n^2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}=\left(\frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}\right)\frac{2n+1}{4n}>Q_n>\frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}.$$

Так как $\operatorname{tg}x>x>\sin x$ при $\pi/2>x>0$, получаем, что $\frac{1}{x}\cos x<\operatorname{ctg}x<\frac{1}{x}$, значит,

$$\frac{2}{\pi}\frac{2n+1}{2n}>Q_n>\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{4n}.$$

Так как $\cos x>1-x^2/2$, получаем, что

$$\frac{2}{\pi}\frac{2n+1}{2n}>Q_n>\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{\pi^2}{32n^2}\right).$$

Отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty} Q_n = 2/\pi$. Так как Q_n монотонно убывает и стремится к $\pi/2$, строгая нижняя оценка для Q_n очевидно равна $\pi/2$. Отсюда имеем

$$\frac{\pi}{2}\frac{2n}{2n+1} < \prod_{l=1}^{n}\frac{4l^2}{4l^2-1} < \frac{\pi}{2}.$$

13. *Указание*. Очевидно, что

$$\frac{2k}{2k+1} < \frac{2k+1}{2k+2},$$

откуда для $a = \prod_{k=1}^{m-1}\dfrac{2k}{2k+1}$ имеем

$$a^2 = a\prod_{k=1}^{m-1}\frac{2k}{2k+1} < a\prod_{k=1}^{m-1}\frac{2k+1}{2k+2} = \prod_{k=1}^{m-1}\frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} =$$
$$= \prod_{k=1}^{m-1}\frac{k}{k+1} = \frac{(m-1)!}{m!} = \frac{1}{m},$$

значит, $a < 1/\sqrt{m}$. Для доказательства нижней оценки перепишем верхнюю как

$$\prod_{k=1}^{m-1}\frac{2k+1}{2k} > \sqrt{m},$$

откуда имеем

$$\prod_{k=1}^{m-1}\frac{2k-1}{2k} > \frac{\sqrt{m}}{2m-1} > \frac{1}{2\sqrt{m}},$$

значит, в силу $\dfrac{2k}{2k+1} > \dfrac{2k-1}{2k}$ получаем

$$\prod_{k=1}^{m-1}\frac{2k}{2k+1} > \prod_{k=1}^{m-1}\frac{2k-1}{2k} > \frac{1}{2\sqrt{m}}.$$

Последнее неравенство задачи очевидно следует из первого.

14. Положим

$$P_n = \frac{2}{1}\frac{4}{3}\cdots\frac{2n}{2n-1}.$$

Тогда

$$R_n = \prod_{l=1}^{n}\frac{4l^2}{4l^2-1} = \prod_{l=1}^{n}\frac{2l}{2l-1}\prod_{l=1}^{n}\frac{2l}{2l+1} = \frac{P_n^2}{2n+1},$$

и из неравенства задачи 12 следует, что

$$\sqrt{n\pi} < P_n < \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}}.$$

15. *Указание.* При $n = 2m$ имеем

$$\binom{n}{n/2} = \frac{(2m)!}{m!m!} = \frac{2^m(2m-1)!!}{m!} = \frac{2^{2m}(2m-1)!!}{(2m)!!} = \frac{2^{2m}}{\prod_{l=1}^{m}\frac{2l}{2l-1}}.$$

Неравенства Шура

Начинаем с простых задач.

Задача 16. *Докажите для сторон треугольника и радиуса описанного круга неравенство $abc \leqslant 3\sqrt{3}R^3$. Когда имеет место равенство?*

Задача 17. *Корни кубического трёхчлена $z^3 + pz + q$ по модулю не больше единицы. Когда достигает максимума его дискриминант?*

Следующая задача была предложена на олимпиаду А. В. Спиваком (см. [6]).

Задача 18 (Москва, 1990). *Четырёхугольник лежит в круге радиусом R. Когда достигает максимума произведение всех его сторон и диагоналей?*

Задача 19. *Выпуклый n-угольник лежит в круге единичного радиуса.*

а) *Когда достигает максимума произведение длин его сторон?*
б) *Когда достигает максимума произведение всех длин его сторон и диагоналей?*

Квадратная $n \times n$-матрица W_n с элементами $a_{k,l} = x_k^l$, $k, l = 0, \ldots, n-1$, называется матрицей Вандермонда.

Задача 20. *Докажите, что определитель матрицы Вандермонда равен $\prod_{k<l}(x_k - x_l)$.*

Матрицы из следующей задачи являются частными случаями матриц Вандермонда.

Задача 21. *Пусть $\varepsilon_n = e^{2\pi\imath/n}$. Обозначим через F_n квадратную матрицу порядка n с элементами $a_{k,l} = \varepsilon_n^{kl}$, а через $\overline{F}_n$ — матрицу с сопряжёнными элементами $\bar{a}_{k,l} = \varepsilon_n^{-kl}$. Докажите, что произведения матриц $F_n\overline{F}_n = \overline{F}_nF_n = nE_n$, где E_n — единичная матрица.*

Задача 22. *Докажите, что определители матриц задачи 21 по модулю равны $n^{n/2}$.*

Задача 23. *Докажите, что* $\prod_{k<l}|\varepsilon_n^k - \varepsilon_n^l| = n^{n/2}$.

Следующую теорему Шур (см., например, [10]) формулировал для дискриминантов многочленов степени n.

Задача 24 (Шур). *Докажите, что максимум величины*

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} |z_i - z_j|^2$$

достигается при комплексных $|z_i| \leqslant 1$ *лишь тогда, когда* z_i *— корни многочлена* $z^n + c$, $|c| = 1$, *т. е. когда они образуют правильный* n*-угольник, вписанный в единичную окружность.*

Указания и решения

16. *Указание.* Раздвигая вершины треугольника, можно, не уменьшая произведение его сторон, сделать его вписанным. Далее воспользуйтесь формулой $abc = 4RS$ для площади треугольника и тем, что среди всех треугольников, вписанных в окружность, наибольшую площадь имеет правильный.

17. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что дискриминант кубического многочлена равен $((z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_2-z_3))^2$, где z_i — его корни. Далее примените задачу 16. Максимум достигается при $z_i = a\varepsilon^{i-1}$, где $\varepsilon = (-1 + \sqrt{3}\,i)/2$, $|a| = 1$. Так как $\varepsilon^3 = 1$, соответствующий многочлен есть $z^3 + q$, где $|q| = 1$.

18. *Указание.* Произведение диагоналей не больше $(2R)^2$, и равенство достигается только для вписанного в круг прямоугольника. Остаётся доказать, что произведение сторон лежащего в круге четырёхугольника максимально только у вписанного квадрата. Раздвигая вершины четырёхугольника, можно, увеличивая произведение его сторон, сделать четырёхугольник вписанным. Пользуясь неравенством $abcd \leqslant ((a + b + c + d)/4)^4$ между средним арифметическим и средним геометрическим, сводим задачу к максимизации периметра вписанного четырёхугольника. В этой задаче максимум достигается для квадрата.

19. *Указание.* Пункт а). Раздвигая вершины n-угольника, можно, не уменьшая произведение его сторон, сделать его вписанным. Допустим, он не правильный. Тогда найдутся такие две соседние стороны A_iA_{i+1}, $A_{i+1}A_{i+2}$, что $\angle A_i0A_{i+1} = \alpha < 2\pi/n$, $\angle A_{i+1}0A_{i+2} > 2\pi/n$, где O — центр данного круга. Передвинем A_{i+1} так, что $\angle A_i0A_{i+1} = 2\pi/n$. Тогда $A_{i+1}0A_{i+2} > \alpha$ (иначе сумма этих углов была бы не больше $\alpha + 2\pi/n$, а это не так), поэтому площадь треугольника $A_iA_{i+1}A_{i+2}$ увеличится, а значит, и увеличится произведение сторон A_iA_{i+1}, $A_{i+1}A_{i+2}$ (угол

$\angle A_iA_{i+1}A_{i+2}$ опирается на ту же хорду A_iA_{i+2}, поэтому он не изменился, а площадь треугольника равна половине произведения сторон на синус угла между ними), поэтому и произведение всех сторон n-угольника увеличится. Повторяя это рассуждение несколько раз, получим правильный n-угольник. Аналогичным образом можно доказать, что максимальную сумму сторон имеет правильный n-угольник. Для невыпуклых n-угольников оба утверждения неверны.

Пункт б). Раздвигая вершины n-угольника, можно, увеличивая произведение всех его сторон и диагоналей, сделать его вписанным. Для этого надо сдвигать вершины по одной в сторону окружности по прямой, перпендикулярной стороне, смежной со сдвигаемой вершиной. При этом все смежные с этой вершиной диагонали и стороны увеличиваются, значит, увеличивается их произведение, а несмежные с ней диагонали и стороны не изменяются. Произведение сторон и диагоналей можно представить в виде произведения сомножителей P_k, $k=1,\ldots,\lfloor n/2\rfloor$, где P_1 — произведение сторон, P_2 — произведение диагоналей $A_iA_{i+2 \pmod n}$ и т. д., P_m — произведение диагоналей $A_iA_{i+m \pmod n}$, $m=\lfloor n/2\rfloor$. В п. а) доказано, что P_1 достигает максимума только в случае правильного n-угольника. Если n чётно, то последовательность диагоналей из произведения P_2 разбивается на два цикла, каждый из которых можно рассматривать как произведение сторон вписанного $n/2$-угольника. Поэтому согласно п. а) это произведение максимально только в случае правильного n-угольника. Если же n нечётно, то оно тоже максимально лишь в случае правильного n-угольника, что можно доказать, повторив рассуждения п. а) (то, что приходится иметь дело в этом случае с самопересекающимся n-угольником, принципиально рассуждение не меняет). Аналогично оцениваем сверху P_k, $k=3,\ldots,m$ (при этом произведение P_k может разбиваться на несколько произведений, каждое из которых может быть произведением сторон обычного или самопересекающегося вписанного n/t-угольника, где t — некоторый делитель числа n).

20. *Указание.* Определитель является многочленом от $x_0,\ldots,x_{n-1}$ степени $n(n-1)/2$, который при перестановке любых двух строк меняет знак. Значит, он делится на x_k-x_l при всех $k<l$.

21. *Указание.* Умножим k-ю строку ε_n^{kj}, $j=0,\ldots,n-1$, матрицы F_n на l-й столбец ε_n^{-lj}, $j=0,\ldots,n-1$, матрицы $\bar{F}_n$. Получаем при $l\neq k$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\varepsilon_n^{kj}\varepsilon_n^{-lj}=\sum_{j=0}^{n-1}\varepsilon_n^{(k-l)j}=\frac{\varepsilon_n^{(k-l)n}-1}{\varepsilon_n^{k-l}-1}=0,$$

а при $l=k$, очевидно,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_n^{kj} \varepsilon_n^{-kj} = n.$$

22. *Указание.* Примените задачу 21 и теорему об умножении определителей.

23. *Указание.* Примените задачи 22 и 20.

24. *Указание.* Произведение $\prod_{0\leqslant k<j<n} |z_k - z_j|$ равно произведению сторон и диагоналей лежащего в единичном круге n-угольника с вершинами z_i. Если он выпуклый (в частности, вписанный), то можно применить задачу 19. Утверждение также следует из задачи 23.

В общем случае ещё одно решение можно получить, если воспользоваться тем, что для матрицы Вандермонда $a_{i,j} = z_i^j$, $i, j = 0, \ldots, n-1$, квадрат модуля её определителя равен

$$\prod_{0\leqslant k<j<n} |z_k - z_j|^2,$$

а согласно неравенству Адамара квадрат модуля этого определителя не больше, чем

$$\prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |z_k|^{2j} \leqslant \prod_{j=0}^{n-1} n = n^n,$$

причём равенство возможно лишь когда $|z_j| = 1$, $j = 0, \ldots, n-1$,

$$\sum_{j=0}^{n-1} z_j^k z_j^{-l} = 0, \quad k \neq l,\ k = 0, \ldots, n-1,\ l = 0, \ldots, n-1,$$

т. е. когда

$$\sum_{j=0}^{n-1} z_j^k = 0, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Рассмотрим многочлен

$$p(z) = (z - z_0) \ldots (z - z_{n-1}).$$

Согласно теореме Виета его коэффициенты пропорциональны симметрическим многочленам

$$\sigma_k = \sum_{0\leqslant i_1<\ldots<i_k<n} z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_k}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Но многочлены σ_k, $k=1,\dots,n-1$ выражаются через многочлены

$$\sum_{j=0}^{n-1} z_j^k = 0, \quad k=1,\dots,n-1,$$

поэтому $\sigma_k=0$, $k=1,\dots,n-1$, значит,

$$p(z)=z^n+(-1)^n z_0\dots z_{n-1}=z^n+p_n, \quad |p_n|=|z_0|\dots|z_{n-1}|=1,$$

т. е. $p(z)=z^n+c$, $|c|=1$, и все корни образуют правильный n-угольник, вписанный в единичную окружность.

Интегралы Йенсена

Следующая задача имеется, например, в задачнике Б. П. Демидовича. Там она решается с помощью дифференцирования интеграла по параметру.

Задача 25. *Докажите, что при* $|a|>1$

$$\int_0^{\pi} \ln(a^2-2a\cos x+1)\,dx = 2\pi\ln|a|,$$

а при $0<|a|<1$

$$\int_0^{\pi} \ln(a^2-2a\cos x+1)\,dx = 0.$$

Для произвольного многочлена $f(x)$ степени m со старшим коэффициентом a и корнями $z_1,\dots,z_m$, выписанными столько раз, какова кратность, обозначим через $M(f)$ произведение

$$|a|\prod_{i=1}^{m}\max\{1,|z_i|\}.$$

Йенсен известен не только своим неравенством для выпуклых функций.

Задача 26 (Йенсен). *Пусть* $1,\varepsilon_n,\dots,\varepsilon_n^{n-1}$ — *корни* n*-й степени из единицы,* $f(x)$ — *произвольный многочлен степени* m *со старшим коэффициентом* a*, и* $z_1,\dots,z_m$ — *его корни. Тогда при некотором* α*,* $|\alpha|=1$*, и некоторой последовательности натуральных чисел* n_k

$$M(f)=\lim_{k\to\infty}\prod_{l=1}^{n_k}|f(\alpha\varepsilon_{n_k}^l)|^{1/n_k}.$$

Задача 27. *Докажите, что в условиях задачи 26*

$$M(f) \leqslant \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{n_k}\sum_{l=1}^{n_k} |f(\alpha\varepsilon_{n_k}^l)|^2\right)^{1/2},$$

$$M(f) \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k}\sum_{l=1}^{n_k} |f(\alpha\varepsilon_{n_k}^l)|.$$

В частности,

$$M(f) \leqslant \max_{|z|=1}|f(z)|.$$

Задача 28 (Йенсен). *Если многочлен $f(z)$ не имеет корней на окружности $|z|=1$, а внутри окружности имеет корни $z_1, \ldots, z_k$, то*

а) $\ln M(f) = \int\limits_0^1 \ln|f(e^{2\pi x\imath})|\,dx;$

б) $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(e^{2\pi x\imath})| \leqslant M(f) \leqslant \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |(f(e^{2\pi x\imath})|;$

в) $\ln|f(0)| - \ln|z_1 \ldots z_k| = \int\limits_0^1 \ln|f(e^{2\pi x\imath})|\,dx;$

г) $|f(0)| \leqslant e^{\int_0^1 \ln|f(e^{2\pi x\imath})|\,dx} \leqslant \max\limits_{|z|=1}|f(z)|.$

Если $f(z)$ не имеет корней в круге $\{z\colon |z|\leqslant 1\}$, то

д) $\ln|f(0)| = \int\limits_0^1 \ln(|f(e^{2\pi x\imath})|\,dx;$

е) $\min\limits_{|z|=1}|f(z)| \leqslant |f(0)| \leqslant \max\limits_{|z|=1}|f(z)|.$

ж) *Если $f(z)$ не имеет корней в круге $\{z\colon |z-a|\leqslant r\}$, то*

$$\min_{|z-a|=r} |f(z)| \leqslant |f(a)| \leqslant \max_{|z-a|=r} |f(z)|.$$

Из п. ж) легко следует теорема о существовании комплексных корней у любого неконстантного многочлена. Действительно, $|f(z)| \to \infty$ при $|z| \to \infty$, поэтому в силу непрерывности $|f(z)|$ в некоторой точке z_0 достигается минимум $|f(z)|$. Если $|f(z_0)| > 0$, то у многочлена нет корней, тогда на любой окружности $|z-z_0| = r$ в силу неравенства п. ж) $|f(z)| = |f(z_0)|$, т. е. $|f(z)|$ постоянна на всей плоскости, что противоречит стремлению $|f(z)|$ к бесконечности.

Задача 29 (студенческая олимпиада мехмата МГУ). *Пусть многочлен* $p(z) = (z - z_1) \dots (z - z_n)$ *имеет корни внутри единичного круга, т. е.* $|z_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$. *Вычислим*

$$m(p) = \min_{|z|=1} |p(z)|.$$

Найти максимальное значение $m(p)$.

Задача 30. *Пусть*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad |\alpha| = 1.$$

Тогда

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} |f(\alpha \varepsilon_N^k)|^2 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \quad \text{при } N > n.$$

Следующие два неравенства нетривиальны даже в случае $n = 2$.

Задача 31 (Э. Ландау). *Для многочлена*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

выполнено неравенство

$$M(f) \leqslant \left(\sum_{l=0}^{n} |a_l|^2 \right)^{1/2}.$$

Задача 32 (Кармайкл). *Корни многочлена*

$$f = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

не превосходят по модулю

$$\left(1 + \sum_{l=0}^{n-1} |a_l|^2 \right)^{1/2}.$$

Задача 33. *Докажите, не пользуясь теоремой Коши, что для любой окружности* C *и любого многочлена* $f(z)$

$$\oint_C f(z)\, dz = 0.$$

Задача 34. *Докажите, что для любой дуги окружности* C *с концами в точках* a *и* b *и любого многочлена* $f(z) = a_n z^n + \dots + a_0$

$$\int_C f(z)\, dz = F(a) - F(b),$$

где $F(z) = \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} + \dots + a_0 z$ *— первообразная для* $f(z)$.

Из задачи 34 следует, что такое же утверждение верно для любой кривой, состоящей из дуг окружностей. Переходя к пределу, можно получить это утверждение для любой жордановой кривой.

Указания и решения

25. *Решение.* Воспользуемся тождеством из задачи 10 (п. в) при $\theta = 0$)

$$a^{2n} - 2a^n + 1 = \prod_{s=1}^{n}\Big(a^2 - 2a\cos\frac{2s\pi}{n} + 1\Big).$$

Логарифмируя почленно, имеем

$$\ln(a^{2n} - 2a^n + 1) = \sum_{s=1}^{n}\ln\Big(a^2 - 2a\cos\frac{2s\pi}{n} + 1\Big).$$

Для интеграла

$$\int_0^{2\pi}\ln(a^2 - 2a\cos x + 1)\,dx$$

рассмотрим интегральную сумму

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{2\pi}{n}\ln\Big(a^2 - 2a\cos\frac{2s\pi}{n} + 1\Big).$$

Она равна

$$\frac{2\pi}{n}\ln(a^{2n} - 2a^n + 1) = \frac{4\pi}{n}\ln|a^n - 1|.$$

При $|a| > 1$ её предел равен $4\pi\ln|a|$, а при $|a| < 1$ он равен нулю. Из тождества $\cos(x + \pi) = -\cos x$ следует, что

$$\int_0^{2\pi}\ln(a^2 - 2a\cos x + 1)\,dx = 2\int_0^{\pi}\ln(a^2 - 2a\cos x + 1)\,dx.$$

26. *Решение.* Число α выберем так, чтобы оно не было корнем $f(x)$. Разложим $f(x)$ на линейные множители. Достаточно доказать равенство для произвольного множителя $(x - w)$ и применить теорему о произведении пределов. В случае $f(x) = x - w$ в силу теоремы Безу имеем

$$\prod_{l=1}^{n} f(\alpha\varepsilon_n^l) = \prod_{l=1}^{n}(\alpha\varepsilon_n^l - w) = \alpha^n\prod_{l=1}^{n}(\varepsilon_n^l - w/\alpha) = (-\alpha)^n\Big(\Big(\frac{w}{\alpha}\Big)^n - 1\Big),$$

откуда
$$\prod_{l=1}^{n} |f(\alpha\varepsilon_n^l)|^{1/n} = \left|\left(\frac{w}{\alpha}\right)^n - 1\right|^{1/n}.$$
Если $|w| > 1$, то
$$\lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{w}{\alpha}\right)^n - 1\right|^{1/n} = |w|,$$
так как
$$|w|n - 1 \leqslant \left|\left(\frac{w}{\alpha}\right)^n - 1\right| \leqslant |w|n + 1.$$
При $|w| < 1$
$$\left|\left(\frac{w}{\alpha}\right)^n - 1\right| \to 1,$$
поэтому
$$\lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{w}{\alpha}\right)^n - 1\right|^{1/n} = 1.$$
Если $|w| = 1$, то $|(w/\alpha)^n - 1| \leqslant 2$, поэтому
$$\limsup_{n\to\infty} \left|\left(\frac{w}{\alpha}\right)^n - 1\right|^{1/n} \leqslant \lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1.$$
Можно считать, что α выбрано так, что $w/\alpha = e^{\beta_w 2\pi i}$, где β_w иррационально для всех корней w с единичным модулем. Выберем последовательность n_k так, чтобы для всех корней w с единичным модулем
$$\frac{\pi}{2} \leqslant \arg\left(\frac{w}{\alpha}\right)^{n_k} = \{n_k \beta_w 2\pi\} \leqslant \pi,$$
где $\{x\}$ — дробная часть числа x. Это можно сделать с помощью теоремы Кронекера. Тогда $|(w/\alpha)^{n_k} - 1| \geqslant \sqrt{2}$, поэтому
$$\limsup_{n_k\to\infty} \left|\left(\frac{w}{\alpha}\right)^{n_k} - 1\right|^{1/n_k} = 1.$$

27. *Указание.* Применить задачу 26 и неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим. Первое неравенство следует из второго и далее понадобится.

28. *Указание.* Пункт а). Почленно прологарифмируйте равенство задачи 26, положите $\alpha = 1$ (в этой задаче не требовалось, чтобы многочлен не имел корней, по модулю равных единице, поэтому α выбиралось специальным образом, но в задаче 28 по условию многочлен не имеет таких корней, поэтому можно применить решение задачи 26, просто

взяв $\alpha = 1$). Теперь воспользуйтесь тем, что предел в правой части получившегося равенства является пределом интегральной суммы для

$$\int_0^1 \ln|f(e^{2\pi x\imath})|\,dx.$$

Пункт б) следует из п. а) и оценок интеграла через максимум и минимум модуля подынтегральной функции. Но можно также воспользоваться задачами 26 и 27.

Пункт в) выводится из определения $M(f)$ и п. а), так как

$$|f(0)| = |a|\prod_{k=1}^{m}|z_k|.$$

Пункт г) следует из п. в) и неравенства $|z_1 \dots z_k| \leqslant 1$.

Пункт д) следует из п. г).

Пункт е) следует из п. д).

Пункт ж) следует из п. е) с помощью линейной замены переменных.

29. *Указание.* Примените задачу 28. Максимум достигается для z^n.

30. *Решение.* Так как

$$|f(\alpha\varepsilon_N^k)|^2 = f(\alpha\varepsilon_N^k)\overline{f(\alpha\varepsilon_N^k)} = \sum_{j,l=0}^{n}\alpha^j a_j\overline{\alpha^l a_l}\varepsilon_N^{(j-l)k},$$

после перестановки порядка суммирования имеем

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|f(\alpha\varepsilon_N^k)|^2 = \sum_{j,l=0}^{n}\alpha^j a_j\overline{\alpha^l a_l}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_N^{(j-l)k} = \sum_{l=0}^{n}\alpha^l a_l\overline{\alpha^l a_l} = \sum_{l=0}^{n}|a_l|^2.$$

31. *Указание.* Применить задачи 27, 30.

32. *Указание.* Применить задачу 31.

33. *Указание.* Можно считать, что $C = \{z : |z| = R\}$ и $\deg p < n$. Пусть $\varepsilon_n^k, k = 0, \dots, n-1,$ — корни n-й степени из 1. Тогда достаточно проверить, что интегральная сумма для функции z^k, $k < n$, равна

$$\sum_{l=0}^{n-1}(\varepsilon_n^l)^k(\varepsilon_n^{l+1} - \varepsilon_n^l) = \sum_{l=0}^{n-1}(\varepsilon_n^l)^{k+1}(\varepsilon_n - 1) = 0.$$

34. *Указание.* Пусть дуга C есть

$$\left\{z : z - z_0 = Re^{2\pi x\imath},\ x \in [a, b] \subset [0, 1]\right\}.$$

Сдвигом $z \to z - z_0$ сводим задачу к случаю $z_0 = 0$. Далее в силу линейности интеграла (и интегральных сумм) достаточно рассмотреть случай $p(z) = z^k$. Заменой переменных $w = ze^{-2\pi a \imath}/R$ сводим задачу к случаю $a = 0$, концы дуги тогда 1 и $Z = e^{2\pi b \imath}$. Рассмотрим интегральную сумму при $n > b(k+1)$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (e^{2\pi j b \imath/n})^k (e^{2\pi(j+1)b\imath/n} - e^{2\pi j b \imath/n}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} (e^{2\pi j b(k+1)\imath/n})(e^{2\pi b \imath/n} - 1) = \frac{e^{2\pi b(k+1)n\imath/n} - 1}{e^{2\pi b(k+1)\imath/n} - 1}(e^{2\pi b\imath/n} - 1) =$$

$$= (e^{2\pi b(k+1)\imath} - 1)\frac{e^{2\pi b\imath/n} - 1}{e^{2\pi b(k+1)\imath/n} - 1} = (Z^{k+1} - 1)\frac{Z^{1/n} - 1}{Z^{(k+1)/n} - 1}.$$

Так как $Z^{1/n} \to 1$ при $n \to \infty$, а при $X \to 1$

$$\frac{X - 1}{X^{k+1} - 1} = \frac{1}{1 + X + \ldots + X^k} \to \frac{1}{k+1},$$

то при $n \to \infty$ рассматриваемая интегральная сумма для функции Z^k по дуге с концами 1 и Z стремится к $(Z^{k+1} - 1)/(k+1)$. Значит, интеграл равен этому числу.

Заметим, что вычисление предела интегральных сумм для функции z^k по прямолинейному отрезку существенно сложнее.

Геометрическая теория чисел Пуансо

Пусть окружность разделена n точками на n равных дуг. Занумеруем эти точки числами от 0 до $n-1$ по часовой стрелке. Замкнутую самопересекающуюся ломаную, соединяющую все эти точки в произвольном порядке, назовём *звёздчатым n-угольником*. Сторонами этого n-угольника являются звенья этой ломаной. Звёздчатый n-угольник назовём *правильным*, если его стороны равны. Правильный звёздчатый пятиугольник иногда называют *пентаграммой*.

Пусть $k_1, k_2, \ldots$ — последовательность натуральных чисел, меньших чем n. Рассмотрим ломаную, первое звено которой идёт из вершины нулевой вершины в k_1-ю, второе звено идёт из k_1-й вершины в вершину с номером $k_1 + k_2$ (по модулю n), третье звено идёт из вершины $k_1 + k_2$ в вершину $k_1 + k_2 + k_3$ и т. д. Очевидно, m-звенная ломаная будет замкнутой если и только если $k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ делится на n. Для того, чтобы она не проходила многократно по одной и той же вершине, очевидно необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

остатки от деления на n всех чисел последовательности $k_1+k_2+\ldots+k_i$, $i=1,\ldots,m$, должны быть различны. В этом случае ломаная образует *m-угольник*, который можно обозначить символом $\{k_1,\ldots,k_m\}$. Его *вершинами* по определению являются только те из данных n точек окружности, которые являются концами звеньев рассматриваемой m-звенной ломаной. Очевидно, при $k_1+\ldots+k_m>n$ он будет звёздчатым.

Первая задача геометрическая.

Задача 35. *а) Докажите, что если $k_i+k_{i+1}<n$, $i=1,\ldots,m-1$, то сумма углов при вершинах звёздчатого m-угольника составляет*

$$180\left(m-\frac{2(k_1+\ldots+k_m)}{n}\right) \text{ градусов.}$$

б) Докажите, что сумма углов при вершинах правильного звёздчатого n-угольника составляет 180 градусов.

в) Докажите, что все углы правильного звёздчатого n-угольника равны.

Пусть теперь все k_i равны k.

Задача 36. *а) Докажите, что если k взаимно просто с n, то указанная n-звенная ломаная проходит через все n точек и образует при $k>1$ правильный звёздчатый n-угольник, а при $k=1$ — обычный правильный n-угольник.*

б) Сколько существует различных правильных звёздчатых n-угольников?

в) Докажите, что если k не взаимно просто с n, то построенная указанным способом ломаная замкнётся через n/d звеньев, пройдя через n/d точек, и образует правильный звёздчатый n/d-угольник. Число d равно наибольшему общему делителю n и k.

Отметим, что указанное построение можно использовать в качестве *определения* наибольшего общего делителя и можно положить в основу *алгоритма* для его вычисления (впрочем, менее удобного, чем обычный алгоритм Евклида).

Следующая задача даёт геометрическое определение понятия простого числа.

Задача 37. *Число n простое, если и только если для любого $k<n$ указанное в задаче 36 построение определяет правильный (возможно, звёздчатый) n-угольник.*

Задача 38. *Пусть $k<n$ и k взаимно просто с n. Рассмотрим построенный в п. а) задачи 36 правильный (возможно, звёздчатый)*

n-угольник и перенумеруем исходные точки окружности в порядке их появления на образующей n-угольник ломаной. Пусть $l < n$ и l взаимно просто с n. Повторим для числа l процедуру построения ломаной, используя новую нумерацию вершин. Докажите, что

а) построенная ломаная определяет правильный (возможно, звёздчатый) n-угольник и совпадает с ломаной, которую можно построить по числу kl при первоначальной нумерации вершин,

б) число kl взаимно просто с n.

Задача 39. *Докажите, что при любом k:*

а) число различных раскрасок вершин правильного n-угольника в k цветов равно k^n (использовать все k цветов в раскраске не обязательно, иначе получится существенно более трудная задача),

б) если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом n-угольника, считать равными, то при простом n число раскрасок равно $\frac{k^n-k}{n}+k$.

Задача 40 (Петерсен). *Выведите из п. б) задачи 39 малую теорему Ферма: при простом p и любом k число k^p-k делится на p.*

Задача 41 (Макмагон). *Докажите, что в случае произвольного составного n ответ в п. б) задачи 39 равен*

$$\frac{1}{n}\sum_{m|n}\varphi(m)k^{n/m},$$

где φ — функция Эйлера.

Задача 42. *а) Докажите, что число различных звёздчатых n-угольников, построенных на данных n вершинах окружности, равно*

$$\frac{(n-1)!}{2}-1.$$

б) Если звёздчатые n-угольники, получающиеся друг из друга поворотом вокруг центра окружности, считать равными, то при простом n их число равно

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{(n-1)!+1}{n}+n-4\Big).$$

в) Выведите из п. б) теорему Лейбница — Вильсона: при простом n число $(n-1)!+1$ делится на n.

Следующая задача (см. [3]) предлагалась на Всероссийской математической олимпиаде 1970.

Задача 43 (Н. Б. Васильев). *Вершины правильного n-угольника покрашены несколькими красками (каждая одной краской) так, что* *точки одного и того же цвета служат вершинами правильного многоугольника. Докажите, что среди этих многоугольников найдутся два равных.*

Указания и решения

41. *Решение.* Функция Мёбиуса μ определяется следующим образом:

$$\mu(n)=\begin{cases} 1, & \text{если } n=1,\\ 0, & \text{если } n \text{ делится на квадрат простого числа,}\\ (-1)^k, & \text{если n есть произведение k различных простых чисел.}\end{cases}$$

Справедливо равенство

$$\delta(n)=\sum_{m|n}\mu(m),$$

где $\delta(n)=0$ при $n>1$ и $\delta(1)=1$.

Действительно, если n имеет различные простые делители p_i, $i = 1,\ldots,k$, то, оставляя в сумме только ненулевые слагаемые и применяя в конце формулу бинома, имеем

$$\sum_{m|n}\mu(m)=\sum_{\alpha_i=0,1}\mu(p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k})=\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}(-1)^m=(1-1)^m=0.$$

Определим преобразование Мёбиуса. Пусть последовательность $\{f_n\}$ элементов поля F выражается через последовательность $\{g_n\}$ формулами

$$f_n=\sum_{m|n}g_m.$$

Тогда последовательность $\{g_n\}$ может быть выражена через последовательность $\{f_n\}$ формулами

$$g_n=\sum_{m|n}\mu\left(\frac{n}{m}\right)f_m.$$

Действительно, индукцией по n можно убедиться в однозначности восстановления последовательности $\{g_n\}$. Поэтому достаточно проверить, что

$$\sum_{m|n}g_m=\sum_{m|n}\sum_{k|m}\mu\left(\frac{m}{k}\right)f_k=f_n.$$

Обозначая m/k через d и меняя порядок суммирования в двойной сумме, согласно предыдущей лемме действительно имеем

$$\sum_{k|n}f_k\sum_{d|n/k}\mu(d)=\sum_{k|n}f_k\delta\left(\frac{n}{k}\right)=f_n.$$

Для функции Эйлера справедливы тождества Гаусса:

$$\sum_{d|n}\varphi(d)=n,\quad \varphi(n)=\sum_{d|n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)d=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}.$$

Первое доказывается путём двойного подсчёта числа правильных дробей со знаменателем n. Второе тождество выводится из первого с помощью преобразования Мёбиуса.

Число цепочек из n бусинок, раскрашенных в q цветов, равно q^n, число одноцветных цепочек равно q. Если ожерелье разрезать в любом промежутке между соседними бусинками, получится одна из d цепочек, где d — делитель числа n и раскраска d подряд идущих бусинок в ожерелье периодически повторяется, т. е. раскраска ожерелья является d-периодической с минимальным периодом d. Обозначим число ожерелий из n бусинок с минимальным периодом раскраски d через $O(d,n)$. Очевидно, что $O(1,n)=q$, а число цепочек, получающихся при всевозможных разрезаниях d-периодических ожерелий, равно $dO(d,n)$. Легко проверить, что $O(d,n)=O(d,d)$. Двойной подсчёт даёт равенство

$$q^n=\sum_{d|n}dO(d,n)=\sum_{d|n}dO(d,d).$$

Из него с помощью преобразования Мёбиуса получаем, что

$$nO(n,n)=\sum_{d|n}\mu(d)q^{n/d}.$$

Общее число всех ожерелий равно

$$O(n)=\sum_{d|n}O(d,d)=\sum_{d|n}\frac{1}{d}\sum_{d'|d}\mu(d')q^{d/d'}.$$

Заменим индекс d в первой сумме на n/d. Получим, что

$$O(n)=\sum_{d|n}\frac{d}{n}\sum_{d'|n/d}\mu(d')q^{n/(dd')}=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\sum_{d'|n/d}d\mu(d')q^{n/(dd')}.$$

Заменим повторную сумму двойной суммой

$$O(n)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\sum_{d'|n/d}d\mu(d')q^{n/(dd')}=\frac{1}{n}\sum_{d,d',dd'|n}d\mu(d')q^{n/(dd')},$$

а потом новой повторной суммой (сначала по $m=dd'|n$, а потом по $d'|m$):

$$O(n)=\frac{1}{n}\sum_{d,d',dd'|n}d\mu(d')q^{n/(dd')}=\frac{1}{n}\sum_{m|n}\sum_{d'|m}\frac{m}{d'}\mu(d')q^{n/m}=\frac{1}{n}\sum_{m|n}q^{n/m}\sum_{d'|m}\frac{m}{d'}\mu(d').$$

Согласно тождеству Гаусса внутреннюю сумму можно заменить на $\varphi(m)$. Окончательно имеем
$$O(n) = \frac{1}{n}\sum_{m|n}\varphi(m)q^{n/m}.$$

43. *Решение.* Перенумерованные наборы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_l$ из какого-либо числа l различных векторов одинаковой длины с началом в некоторой фиксированной точке O условимся называть правильными l-системами, если каждый следующий вектор получается из предыдущего поворотом вокруг О против часовой стрелки на один и тот же угол $\alpha < 2\pi$ (а первый вектор системы совпадает с поворотом её последнего вектора). В частности, правильную n-систему образуют векторы, проведённые из центра О какого-либо правильного n-угольника во все его вершины, если их занумеровать, последовательно обходя вершины этого многоугольника. Докажем, что сумма всех векторов правильной l-системы всегда будет равна 0. Действительно, если предположить, что такая сумма не равна 0, то, совершив поворот каждого вектора системы на угол α, мы вновь получим тот же, что и ранее, набор векторов, т. е. их сумма не должна измениться. С другой стороны, эта сумма должна также совершить поворот на угол $\alpha < 2\pi$.

Рассмотрим теперь следующее преобразование R_p правильной l-системы векторов: выберем некоторое натуральное число p и повернём вектор с номером i, $i = 2, 3, \ldots, l$, против часовой стрелки на угол $p \cdot i \cdot \alpha$. Заметим, что если $p \cdot \alpha \neq 2\pi \cdot q$, $q \in \mathbb{N}$, то получившаяся в результате поворота система останется правильной системой, поскольку углы между любыми двумя векторами исходной системы в результате поворота увеличиваются в p раз. Если же $p \cdot \alpha = 2\pi \cdot q$, $q \in \mathbb{N}$, то после поворота все получившиеся векторы совпадут с первым вектором системы.

Рассуждая теперь от противного, рассмотрим некоторый правильный n-угольник, вершины которого удалось раскрасить в несколько цветов так, что вершины каждого цвета также образуют правильный многоугольник и среди образовавшихся одноцветных правильных многоугольников нет двух равных. Тем самым множество вершин исходного n-угольника разбито на одноцветные подмножества из $m_1, m_2, \ldots, m_k$ элементов, причём $m_1 < m_2 < \ldots < m_k$. Обозначим центр рассматриваемого многоугольника буквой O и проведём в каждую из его вершин вектор с началом в O, получится правильная n-система векторов с углом $\alpha = 2\pi/n$ и с нулевой суммой. Наборы векторов с концами в вершинах одного цвета будем называть одноцветными наборами, одноцветные наборы также образуют правильные $m_1, m_2, \ldots, m_k$ — системы с углами поворота $2\pi/m_1, 2\pi/m_2, \ldots, 2\pi/m_k$.

Применим ко всей системе R_{m_1} преобразование. Поскольку $m_1 \cdot 2\pi/n < < 2\pi$, в результате этого преобразования снова получится правильная система с нулевой суммой. С другой стороны, результат такого преобразования получается объединением результатов его применения к каждому из наборов одноцветных векторов. Так как $m_1 \cdot 2\pi/m_j < 2\pi$, $j = 2, 3, \ldots, k$, все одноцветные наборы, кроме первого, преобразуются в правильные системы с нулевой суммой. Но $m_1 \cdot 2\pi/m_1 = 2\pi$, поэтому результат преобразования первого набора будет иметь ненулевую сумму, и тогда результат R_{m_1} преобразования всей исходной правильной n-системы тоже должен иметь ненулевую сумму. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

Суммы Гаусса

В этом разделе используется при простых n обозначение $\left(\frac{k}{n}\right)$ для *символа Лежандра*. Он определяется следующим образом: если k кратно n, то $\left(\frac{k}{n}\right) = 0$, в противном случае $\left(\frac{k}{n}\right) = 1$, если k *квадратичный вычет*, т. е. равно квадрату некоторого целого числа по модулю n, и $\left(\frac{k}{n}\right) = -1$, если k *квадратичный невычет* (т.ė. не является квадратичным вычетом). В решении следующих задач будет использоваться следующее так называемое мультипликативное свойство этого символа: для любых целых k, m

$$\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{km}{n}\right).$$

Это свойство не очевидно только в случае

$$\left(\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right) = -1.$$

За доказательством читатель может обратиться к любому учебнику по элементарной теории чисел (см., например, [2]).

Задача 44 (Гаусс). *Докажите, что при простом n и $l = 1, \ldots, n$*

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)\cos\frac{2kl\pi}{n} = \left(\frac{l}{n}\right)\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)\cos\frac{2k\pi}{n},$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)\sin\frac{2kl\pi}{n} = \left(\frac{l}{n}\right)\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

Задача 45 (Гаусс). *При простом $n = 4m + 1$ и $l = 1, \ldots, n-1$*

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)\cos\frac{2kl\pi}{n} = \pm\sqrt{n}\left(\frac{l}{n}\right), \quad \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)\sin\frac{2kl\pi}{n} = 0.$$

При простом $n=4m+3$ и $l=1,\ldots,n-1$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{k}{n}\Big)\sin\frac{2kl\pi}{n}=\pm\sqrt{n}\Big(\frac{l}{n}\Big),\qquad \sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{k}{n}\Big)\cos\frac{2kl\pi}{n}=0.$$

На самом деле Гаусс доказал, что в этих формулах везде знак плюс, но доказательство сложно, и нас устроит более слабое утверждение.

Задача 46 (Гаусс). *При простом $n=4m+1$ и $l=1,\ldots,n-1$*

$$\sum_{k=1}^{2m}\Big(\frac{k}{n}\Big)\cos\frac{2kl\pi}{n}=\pm\sqrt{\frac{n}{4}}.$$

При простом $n=4m+3$ и $l=1,\ldots,n-1$

$$\sum_{k=1}^{2m+1}\Big(\frac{k}{n}\Big)\sin\frac{2kl\pi}{n}=\pm\sqrt{\frac{n}{4}}$$

Задача 47 (Гаусс). *При нечётном n*

$$\left|\sum_{k=1}^{n}e^{(2k^2\pi i/n)}\right|=\sqrt{n}.$$

Указания и решения

44. *Указание.* Пусть $1\leqslant l'<n$ таково, что $ll'=1 \bmod n$. Тогда если $k'=kl \bmod n$ и $1\leqslant k'<n$, то $k=k'l' \bmod n$ и согласно мультипликативному свойству символа Лежандра

$$\Big(\frac{l}{n}\Big)\Big(\frac{l'}{n}\Big)=\Big(\frac{ll'}{n}\Big)=\Big(\frac{1}{n}\Big)=1.$$

Значит,

$$\Big(\frac{l}{n}\Big)=\Big(\frac{l'}{n}\Big),\qquad \Big(\frac{k}{n}\Big)=\Big(\frac{k'l'}{n}\Big)=\Big(\frac{k'}{n}\Big)\Big(\frac{l}{n}\Big)$$

и, переставляя слагаемые в сумме, получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{k}{n}\Big)\cos\frac{2kl\pi}{n}=\sum_{k'=1}^{n-1}\Big(\frac{l}{n}\Big)\Big(\frac{k'}{n}\Big)\cos\frac{2k'\pi}{n}=\Big(\frac{l}{n}\Big)\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{k}{n}\Big)\cos\frac{2k\pi}{n}.$$

Остальные тождества доказываются аналогично.

45. *Решение.* Удобно использовать комплексное обозначение

$$e^{\imath\varphi}=\cos\varphi+\imath\sin\varphi,$$

тождества доказывать одновременно (хотя равенство нулю в них легко проверить непосредственно). Тогда доказываемые тождества можно записать в компактном виде:

$$g_l = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) e^{2kl\pi\imath/n} = \pm\sqrt{n} \quad \text{при } n = 4m+1$$

и

$$g_l = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) e^{2kl\pi\imath/n} = \pm\sqrt{n}\imath \quad \text{при } n = 4m+3,$$

или, в общем случае,

$$g_l^2 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) e^{2kl\pi\imath/n} \right)^2 = n(-1)^{(n-1)/2}.$$

Из задачи 44 следует, что

$$g_l^2 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) e^{2kl\pi\imath/n} \right)^2 = g_1^2 = g^2 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) e^{2k\pi\imath/n} \right)^2.$$

Вычислим двумя способами сумму

$$\sum_{l=1}^{n} g_l g_{n-l}.$$

С одной стороны, согласно задаче 44 и упоминавшемуся в начале раздела мультипликативному свойству символа Лежандра

$$g_l g_{n-l} = \left(\frac{l}{n}\right)\left(\frac{n-l}{n}\right) g^2 = \left(\frac{l}{n}\right)\left(\frac{-l}{n}\right) g^2 = \left(\frac{l}{n}\right)\left(\frac{l}{n}\right)\left(\frac{-l}{n}\right) g^2 =$$
$$= \left(\frac{l^2}{n}\right)\left(\frac{-l}{n}\right) g^2 = \left(\frac{-l}{n}\right) g^2 = \left(\frac{n-1}{n}\right) g^2, \quad g_0 = g_n = 0,$$

поэтому сумма равна $(n-1)\left(\frac{-1}{n}\right)g^2$. С другой стороны, непосредственно после раскрытия скобок имеем

$$g_l g_{n-l} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) e^{2kl\pi\imath/n} \sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{m}{n}\right) e^{2m(n-l)\pi\imath/n} = \sum_{k,m=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{m}{n}\right) e^{2(k-m)l\pi\imath/n},$$

откуда

$$(n-1)\left(\frac{n-1}{n}\right) g^2 = \sum_{l=1}^{n} g_l g_{n-l} = \sum_{k,m=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{m}{n}\right) \sum_{l=1}^{n} e^{2(k-m)l\pi\imath/n} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 n = \sum_{k=1}^{n-1} n = n(n-1).$$

46. *Указание.* При $n=4m+1$ имеем
$$\left(\frac{k}{n}\right)\cos\frac{2kl\pi}{n}=\left(\frac{n-k}{n}\right)\cos\frac{2(n-k)l\pi}{n},$$
при $n=4m+3$ имеем
$$\left(\frac{k}{n}\right)\sin\frac{2kl\pi}{n}=\left(\frac{n-k}{n}\right)\sin\frac{2(n-k)l\pi}{n}.$$

47. *Решение.* Для простого $n>2$ можно из утверждения задачи 45 получить тождество
$$\left|\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)e^{2k\pi i/n}\right|=\sqrt{n},$$
в котором $\left(\frac{k}{n}\right)=\pm1$ в зависимости от того, является число k квадратом по модулю n или нет. Положим
$$C=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)e^{2k\pi i/n}.$$
Обозначим сумму всех слагаемых $e^{2k\pi i/n}$, у которых $1\leqslant k\leqslant n-1$ является квадратом по модулю n, через A, а сумму всех остальных слагаемых (т. е. тех, у которых $1\leqslant k\leqslant n-1$ не является квадратом по модулю n) через B. Тогда $C=A-B$, а так как
$$1+A+B=\sum_{k=0}^{n-1}e^{2k\pi i/n}=\frac{e^{2n\pi i/n}-1}{e^{2\pi i/n}-1}=0,$$
то $C=1+2A$. Очевидно, k^2 и $(n-k)^2$ равны по модулю n. Значит,
$$e^{2k^2\pi i/n}=e^{2(n-k)^2\pi i/n},$$
каждый квадратичный вычет по модулю n представим в виде k^2 по модулю n при $1\leqslant k\leqslant(n-1)/2$ единственным образом (вычетов ровно $(n-1)/2$), поэтому
$$\sum_{k=1}^{n}e^{2k^2\pi i/n}=1+2A=C,\qquad\left|\sum_{k=1}^{n}e^{2k^2\pi i/n}\right|=|C|=\sqrt{n}.$$
Но для произвольного нечётного n предыдущие рассуждения не проходят, хотя вместо символа Лежандра можно использовать символ Якоби, так как он имеет те же свойства.

Поэтому выберем другой способ. Пусть
$$A=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^{k^2},\quad\text{где }\ \varepsilon=e^{2\pi i/n},\ \varepsilon^n=1.$$

Тогда
$$\bar{A}=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^{-k^2},\quad |A|^2=A\bar{A}=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^{k^2}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^{-k^2}.$$
Раскрывая скобки в произведении, имеем
$$|A|^2=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^{k^2-k^2}+\sum_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{n}\varepsilon^{k^2-l^2}.$$

Первое слагаемое равно n. Достаточно показать, что второе слагаемое равно нулю. Представим его в виде двойной суммы
$$\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{\substack{k,l=1\\ k-l=a \bmod n}}^{n}\varepsilon^{(k^2-l^2)\bmod n}$$
и проверим, что при любом $a\neq 0$, $|a|<n$, в силу нечётности n очевидно $\varepsilon^{2a}=e^{4a\pi/n}\neq 1$, и поэтому
$$\sum_{\substack{k,l=1\\ k-l=a \bmod n}}^{n}\varepsilon^{(k^2-l^2)\bmod n}=\sum_{\substack{k,l=1\\ k-l=a \bmod n}}^{n}\varepsilon^{(k-l)(k+l)\bmod n}=\sum_{\substack{k,l=1\\ k-l=a \bmod n}}^{n}\varepsilon^{a(k+l)\bmod n}=$$
$$=\sum_{l=1}^{n}\varepsilon^{a(a+2l)\bmod n}=\varepsilon^{a^2+2a \bmod n}\sum_{l=0}^{n-1}\varepsilon^{2la}=\varepsilon^{a^2+2a}\frac{\varepsilon^{2na}-1}{\varepsilon^{2a}-1}=0.$$

Интерполяция, простейшие дроби и быстрое умножение многочленов

Группу корней n-й степени из единицы $\{\varepsilon^k : 0\leqslant k<n\}$, $\varepsilon=e^{2\pi\imath/n}$, можно применить для быстрого умножения комплексных (и действительных многочленов) степени, меньшей $n/2$. Любопытно, что это можно сделать без упоминания о быстром дискретном преобразовании Фурье (ДПФ).

Под сложностью вычисления понимается число арифметических операций над комплексными числами в нём. Для вычисления многочлена r, являющегося произведением многочленов p и q степени, меньшей $n/2$, можно, согласно теореме Безу, выполнить схемой Горнера деление с остатком этих многочленов на линейные попарно взаимно простые двучлены $x-\varepsilon^k$, получающиеся при разложении многочлена x^n-1 на множители над полем $\mathbb{C}$, т. е. вычислить значения $p(\varepsilon^k)$ и $q(\varepsilon^k)$, $k=0,\ldots,n-1$; потом, попарно перемножив их, получить значения $r(\varepsilon^k) = p(\varepsilon^k)q(\varepsilon^k)$ и, решая задачу интерполяции (см. задачу 2), восстановить многочлен r. Удобно при этом предполагать n равным степени двойки (добавляя, если надо, нулевые младшие коэффициенты к многочленам p и q).

Задача 48. *Докажите, что сложность вычисления значений $p(\varepsilon^k)$, $k = 0, \ldots, n-1$, многочлена $p(z)$) при $\deg p(z) < n$ равна $O(n \log_2 n)$.*

Для восстановления (интерполяции) многочлена r по его известным значениям $r(\varepsilon^k)$, $k = 0, \ldots, n-1$, естественно применить формулу Лагранжа из задачи 2

$$r = f(x) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r(\varepsilon^k)/f'(\varepsilon^k)}{x - \varepsilon^k} = f(x) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r(\varepsilon^k)\varepsilon^k}{n(x - \varepsilon^k)}, \quad \text{где } f(x) = x^n - 1.$$

При сложении дробей нужно выполнять фактически только вычисление числителей, так как знаменатели от функции $f(x)$ не зависят. Удобно выбрать порядок суммирования простейших дробей так, чтобы все получающиеся в промежуточных результатах дроби имели двучленные знаменатели. Для этого его можно выбрать согласованным с перечисленными в указании к задаче 48 разложениями двучленов в произведение двучленов. Умножение многочлена степени, меньшей m, на двучлен степени m «школьным» методом имеет сложность m, поэтому сложение двух таких дробей имеет сложность $4m$, а весь алгоритм интерполяции — сложность $O(n \log_2 n)$. В итоге получается известная оценка сложности умножения комплексных многочленов $M(n) = O(n \log_2 n)$.

Задача 49. *Докажите, что интерполяцию можно выполнить со сложностью $O(n \log_2 n)$.*

Где было спрятано дискретное преобразование Фурье — показывает следующая

Задача 50. *Проверьте, что для вычисления значений $p(\varepsilon^k)$, $k = 0, \ldots, n-1$, многочлена $p(z)$) при $\deg p(z) < n$ можно умножить вектор-столбец его коэффициентов $(p_0, \ldots, p_{n-1})^T$ на матрицу $F_n = |\varepsilon^{kl}|_{k,l=0,\ldots,n-1}$ из задачи 21.*

Вычисление вектора $(p(1), p(\varepsilon), \ldots, p(\varepsilon^{n-1}))$ по вектору $(p_0, \ldots, p_{n-1})$ выполняется линейным преобразованием $\mathfrak{F}_n$ с матрицей F_n, которое и есть дискретное преобразование Фурье порядка n (а впервые оно появилось у Гаусса в его теоретико-числовых работах). В задаче 48 указан при $n = 2^k$ один из так называемых быстрых алгоритмов преобразования Фурье. Их известно много, в том числе и для произвольного n.

Задача 51. *Проверьте, что обратное преобразование Фурье n-го порядка задаётся матрицей*

$$F_n^{-1} = \frac{1}{n}\bar{F}_n,$$

где $\bar{F}_n$ — матрица с элементами $\bar{a}_{k,l} = \varepsilon_n^{-kl}$ из задачи 21

Матрица $\bar{F}_n$ отличается от F_n только тем, что в её определении первообразный корень n-й степени из единицы $\varepsilon = e^{2\pi\imath/n}$ заменён на другой первообразный корень $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^{-1} = \varepsilon^{n-1}$. Поэтому любой быстрый алгоритм вычисления ДПФ $\mathfrak{F}_n$ можно преобразовать в быстрый алгоритм для обратного ДПФ $\mathfrak{F}_n^{-1}$ той же сложности $O(n\log_2 n)$: смена корня приводит только к перестановке компонент результата, а деление на n делается n раз. Так как вычисление коэффициентов многочлена $r(x)$, $\deg r < n$, по его значениям $r(\varepsilon^k)$, $k = 0, \ldots, n-1$, является обратным ДПФ, его можно выполнить со сложностью $O(n\log_2 n)$, не пользуясь алгоритмом интерполяции из задачи 49. С другой стороны, этот алгоритм можно преобразовать в алгоритм ДПФ.

Указания и решения

48. *Указание.* Применяя для вычисления значений $p(\varepsilon^k)$ и $k = 0, \ldots, n-1$, приём «деления пополам», находим вначале

$$p \pmod{x^{n/2} - 1}, \quad p \pmod{x^{n/2} + 1},$$

потом вычисляем остатки по модулям $x^{n/4}+1$, $x^{n/4}-1$, $x^{n/4}+i$, $x^{n/4}-i$, и так далее, пока не найдём остатки по модулям $x^2 - \varepsilon^{2k}$, $k = 0, \ldots, n/2-1$ и, наконец, по модулям $x - \varepsilon^k$, $k = 0, \ldots, n-1$. Так как деление многочлена степени, меньшей m, на двучлен степени $m/2$ осуществляется «школьным» алгоритмом со сложностью m, сложность всего алгоритма вычисления значений $p(\varepsilon^k)$, $k = 0, \ldots, n-1$, оценивается как $2n\log_2 n$.

49. *Указание.* Вычисление числителя суммы правильных дробей с согласованными двучленными знаменателями выполняется по формуле

$$\frac{f_1}{x^m + a} + \frac{f_1}{x^m - a} = \frac{f_1(x^m - a) + f_2(x^m + a)}{x^{2m} - a^2}$$

со сложностью $2m + m + m = 4m$ и в результате получается опять правильная дробь с двучленным знаменателем.

Если выполнить вначале сложение всех $n/2$ дробей, у которых произведение знаменателей равно $x^{n/2} - 1$, а потом сложение всех остальных $n/2$ дробей, у которых произведение знаменателей равно $x^{n/2} + 1$, то на последнем шаге для получения окончательного результата, т. е. суммы всех n дробей в формуле Лагранжа, нужно будет сложить две правильные дроби

$$\frac{f_1}{x^m+1}+\frac{f_1}{x^m-1}=\frac{f_1(x^m-1)+f_2(x^m+1)}{x^{2m}-1},\quad m=\frac{n}{2}.$$

Последняя операция выполняется со сложностью $2m=n$. Для вычисления дроби $\frac{f_1}{x^m+1}$ записываем её знаменатель, как и в указании к задаче 48, в виде $(x^{m/2}+i)(x^{m/2}-i)$, а суммируемые $n/2=m$ простейших дробей разбиваются на две группы по $m/2$ дробей так, чтобы сумма первой группы имела знаменатель $x^{m/2}+i$, а сумма второй — знаменатель $x^{m/2}-i$. Если предположить, что обе группы уже просуммированы, то для получения окончательного результата, дроби $\frac{f_1}{x^m+1}$, достаточно будет сложить обе полученные правильные дроби $\frac{g_1}{x^{m/2}+i}$, $\frac{g_2}{x^{m/2}-i}$ аналогично указанному выше со сложностью $2m$. Дробь $\frac{f_2}{x^m-1}$ вычисляется аналогично со сложностью не выше $2m$ в предположении, что уже были вычислены правильные дроби $\frac{g_3}{x^{m/2}+1}$, $\frac{g_4}{x^{m/2}-1}$. Поэтому для получения окончательного результата достаточно вычислить дроби $\frac{g_1}{x^{m/2}+i}$, $\frac{g_2}{x^{m/2}-i}$, $\frac{g_3}{x^{m/2}+1}$, $\frac{g_4}{x^{m/2}-1}$, суммируя простейшие дроби, разбитые на группы по $n/4$ дроби в каждой, а потом выполнить сложение полученных дробей как указано выше, со сложностью не более $4n$. Продолжая эти рассуждения, получаем, что все n простейших дробей вида $\frac{a_k}{x-\varepsilon^k}$, $k<n$, можно сложить со сложностью не более $2n\log_2 n$.

50. *Указание.* Очевидно,

$$p(\varepsilon^k)=p_0+p_1\varepsilon^k+p_2\varepsilon^{2k}+\ldots+p_{n-1}\varepsilon^{(n-1)k}.$$

51. *Указание.* Применить задачу 21.

Список литературы

[1] *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. М.: Мир, 1965.

[2] *Бибиков П. В., Козеренко К. В., Малахов А. И.* Теория чисел во второй школе. М.: МЦНМО, 2021.

[3] *Васильев Н. Б., Егоров А. А.* Задачи всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука, 1988.

[4] *Гашков С. Б.* Центры тяжести и геометрия. М.: МЦНМО, 2015.

[5] Избранные задачи по математике из журнала «American mathematical monthly». М.: УРСС, 2009.

[6] Московские математические олимпиады 1981–1992 г. М.: МЦНМО, 2017.

[7] *Прасолов В. В.* Задачи по алгебре, арифметике и анализу. М.: МЦНМО, 2017.

[8] *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2022.

[9] *Радемахер Г.*, *Теплиц О.* Числа и фигуры. М.: МЦНМО, 2020.

[10] *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.

[11] *Шклярский Д. О.*, *Ченцов Н. Н.*, *Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика. Алгебра. М.: Физматлит, 2016.

[12] *Штейнгауз Г.* Математический калейдоскоп. М.: Наука, 1981.

[13] *Hobson E. W.* A Treatise on Plane Trigonometry. NY: Dover Publications, 1957.

Сергей Борисович Гашков, мехмат МГУ им. М. В. Ломоносова

sbgashkov@gmail.com