# Решения задач из прошлых выпусков

Серия 2, вып. 1, с. 221, задача 9. Условие. Докажите, что если рациональная функция от $x$ не меняется при замене $x$ на $1/x$, то она является рациональной функцией от $x+1/x$.

Решение. Положим $z=x+x^{-1}$. Пусть

$$f(x)=\frac{x^kP(x)}{x^\ell Q(x)}=\frac{x^k(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n)}{x^\ell(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m)},$$

где $a_0, b_0\neq 0$. Из условия задачи получаем

$$f(x^{-1})=x^{\ell-k+m-n}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0}\equiv$$
$$\equiv f(x)=x^{k-\ell}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}.$$

Отсюда

$$2(k-\ell)=m-n \tag{1}$$

и

$$P(x)=a_0x^n+\ldots+a_n=a_nx^n+\ldots+a_0,$$

т. е. $P(x)=a_0x^n+\ldots+a_0$ — возвратный многочлен, и аналогично $Q(x)=b_0x^m+\ldots+b_0$ — возвратный многочлен.

Пусть $n$ чётно, $n=2n'$. Тогда

$$P(x)=x^{n'}(a_0(x^{n'}+x^{-n'})+\ldots). \tag{2}$$

Для любого натурального $k$ имеем

$$(x+x^{-1})^k=(x^k+x^{-k})+k(x^{k-1}+x^{-k+1})+\ldots$$

Индукцией по $k$ получаем, что $x^k+x^{-k}$ является функцией от $z$. Тогда ввиду (2)

$$P(x)=x^{n'}\psi(z), \tag{3}$$

где $\psi$ — рациональная функция.

Если же $n$ нечётно, $n = 2n' + 1$, то $P(x) = (x+1)P_1(x)$, где $P_1(x)$ — возвратный многочлен степени $2n'$. Согласно равенству (3) имеем

$$P(x) = x^{n'}(x+1)\psi(z), \tag{4}$$

где $\psi$ — рациональная функция.

Аналогично, если $m$ чётно, $m = 2m'$, то

$$Q(x) = x^{m'}\varphi(z), \tag{5}$$

а если $m$ нечётно, $m = 2m' + 1$, то

$$Q(x) = x^{m'}(x+1)\varphi(z), \tag{6}$$

где $\varphi$ — рациональная функция.

Ввиду (1) либо $m, n$ оба чётны, либо оба нечётны, причём в обоих случаях $k - \ell = m' - n'$. Из (3)–(6) получаем

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = x^{k-\ell+n'-m'}\frac{\psi(z)}{\varphi(z)} = \Psi(z),$$

где $\Psi$ — рациональная функция, что и требовалось. (*Ю. Раскин*)

2.7$'$. Условие. У многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом 1 все корни различны и их модули равны 1. Докажите, что $P(x)$ делит многочлен вида $x^n - 1$ для некоторого $n$.

(*М. Л. Концевич*)

Решение. Нам потребуется лемма 1 из статьи: *Белов А. Я.* О круговых многочленах // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 8. М.: МЦНМО, 2004. С. 181–184.

*Пусть $Q(x) = (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Тогда при всех $k \in \mathbb{N}$ коэффициенты многочлена*

$$\widetilde{Q}_k(x) = (x - x_1^k) \cdot \ldots \cdot (x - x_n^k)$$

*также целые.*

Если все корни многочлена $Q(x)$ по модулю равны единице, то все корни многочлена $Q_k(x)$ тоже по модулю равны единице. Далее, из теоремы Виета следует, что модули всех коэффициентов всех $Q_k$ ограниченны и не превосходят максимального числа членов в элементарном симметрическом многочлене $s_k$ (ибо каждое слагаемое есть произведение корней, а оно равно единице по модулю). Это число максимально, когда $k = [n/2]$, и тогда оно равно $\binom{n}{[n/2]}$. В силу леммы имеем, что все коэффициенты $Q_k$ — целые. Так как они не превосходят по модулю $\binom{n}{[n/2]}$, множество всех коэффициентов всех $Q_k$, $k \in \mathbb{N}$, конечно. Тогда и множество самих многочленов $Q_k$ тоже конечно.

Поэтому $Q_\ell = Q_k$ при некоторых $\ell \neq k$. Это значит, что $x_i^\ell = x_i^k$ при $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, все $x_i$ суть корни из единицы, откуда следует утверждение задачи. (*А. Я. Канель-Белов*)

26.8. Условие. Пусть 2019 точек случайно, независимо и равномерно распределены на единичном диске $(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 \leqslant 1$, и пусть $C$ есть их выпуклая оболочка. Какая вероятность больше: что $C$ — треугольник или что $C$ — четырёхугольник? (*Ф. В. Петров*)

Ответ. Больше вероятность, что $C$ — четырёхугольник.

Решение. Эти вероятности можно оценить численно достаточно грубо. Сначала оценим сверху вероятность того, что $C$ — треугольник. Обозначим через $S$ максимальную площадь треугольника, расположенного внутри единичного круга. Как известно, эта площадь равна $3\sqrt{3}/4 \approx 1{,}299$ — площади вписанного равностороннего треугольника.

$$\begin{gathered}\mathrm{P}\ (C \text{ — это треугольник}) = C_{2019}^3 \cdot \mathrm{P}\ (\text{первые 2016 точек лежат}\\ \text{внутри выпуклой оболочки последних трёх}) <\\ < C_{2019}^3 \left(\frac{S}{\pi}\right)^{2016} < 2019^3 \cdot 0{,}42^{2016} < 10^{10} \cdot 0{,}42^{2016}.\end{gathered}$$

Теперь будем оценивать вероятность того, что $C$ — четырёхугольник. Впишем в круг квадрат $A_1A_2A_3A_4$, его площадь равна 2. Выберем $\varepsilon = 1/20$ и обозначим $\varepsilon$-окрестности вершин квадрата $O_1, O_2, O_3, O_4$. Площадь каждой из этих окрестностей оценим снизу как $1/1000$. Если выбрано по точке внутри этих окрестностей, то выпуклая оболочка этих четырёх точек имеет площадь чем $2 - 4\sqrt{2}\,\varepsilon > 1{,}7$.

$$\begin{gathered}\mathrm{P}\ (C \text{ — это треугольник}) > \mathrm{P}\ (\text{первые 4 точки лежат}\\ \text{соответственно в } O_1, O_2, O_3, O_4\text{, а остальные 2015 точек лежат}\\ \text{внутри выпуклой оболочки первых четырёх}) >\\ > \left(\frac{1}{1000\pi}\right)^4 \cdot \left(\frac{1{,}7}{\pi}\right)^{2015} > 10^{-16} \cdot 0{,}54^{2015}.\end{gathered}$$

Теперь достаточно проверить, что

$$10^{-16} \cdot 0{,}54^{2015} > 10^{10} \cdot 0{,}42^{2016}.$$

Действительно,

$$\left(\frac{0{,}54}{0{,}42}\right)^{2015} > \left(\left(\frac{0{,}54}{0{,}42}\right)^{10}\right)^{200} > 10^{200},$$

а отсюда следует и требуемое неравенство. (*И. В. Митрофанов*)

27.4. Условие. *Дробно-кубическое отображение* — это отображение вида

$$z \to \frac{a_1 z^3 + b_1 z^2 + c_1 z + d_1}{a_2 z^3 + b_2 z^2 + c_2 z + d_2}.$$

Всегда ли его можно представить в виде композиции отображений вида $z \to z^2, z \to z^3, z \to az + b, z \to 1/z$? (*А. Я. Канель-Белов*)

Ответ. Не всегда.

Решение. Будем рассматривать рациональные (*дробно-рациональные*) функции $R(z) = P(z)/Q(z)$ над некоторым полем $\mathbb{K}$, представленные в несократимом виде. Это означает, что $P$ и $Q$ — многочлены над $K$, не имеющие общих делителей, причём $Q \not\equiv 0$. *Степень* такой функции по определению равна $\deg R = \max(\deg P, \deg Q)$. Разделив многочлены $P$ и $Q$ на ненулевой коэффициент одного из них, получим *нормированный вид* функции $R$, в котором хотя бы один коэффициент равен 1. Рациональная функция степени $n$ в нормированном виде может быть задана $2n + 1$ параметром. Далее считаем, что *рассматриваемые рациональные функции имеют нормированный вид*.

Дробно-рациональная функция степени 3 называется *дробно-кубической*. *Дробно-линейное отображение* есть рациональная функция $H(z)$ степени один:

$$H(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad cz \neq 0.$$

Известно (упражнение для читателя), что дробно-линейное отображение можно представить как композицию отображений вида $z \to az + b$, $z \to 1/z$.

Далее композиция функций обозначается $\circ$: $(R_1 \circ R_2)(z) = R_1(R_2(z))$. Если $R_1, R_2$ — рациональные функции, то коэффициенты функции $R_1 \circ R_2$ являются многочленами от коэффициентов функций $R_1, R_2$.

Лемма 1. (а) *Пусть $R$ — рациональная функция, $k$ — натуральное число. Тогда* $\deg R^k = k \cdot \deg R$.

(б) *Пусть $H_1, H_2$ — дробно-линейные отображения, $R$ — рациональное отображение. Тогда* $\deg(H_1 \circ R \circ H_2) = \deg R$. □

Следствие. *Пусть дробно-кубическое отображение $R$ представлено в виде композиции отображений, каждое из которых может иметь лишь одну из следующих форм*: $z \to z^2$, $z \to z^3$, $z \to az + b$ $(a, b \in \mathbb{K})$, $z \to 1/z$. *Тогда представление имеет вид*

$$R = H_1 \circ (H_2)^3, \tag{$*$}$$

*где $H_1, H_2$ — дробно-линейные отображения. В частности, отображение $z \to z^2$ в представлении отсутствует.*

Доказательство. Если в композиции присутствует $z \to z^2$, то в силу леммы 1 (а), (б) степень композиции чётна. Если, далее, отсутствует $z \to z^3$, то степень будет равна 1, а если $z \to z^3$ присутствует более одного раза, то степень будет выше 3. Значит, $z \to z^3$ присутствует один раз, а до и после этого применяются дробно-линейные отображения. Композиция дробно-линейных отображений является дробно-линейным отображением. Отсюда следует $(*)$. □

Идея решения задачи 27.4 — в сравнении количества параметров. Дробно-кубическая функция задаётся семью параметрами, пара дробно-линейных функций — шестью, а семь независимых параметров невозможно выразить через шесть. Аргумент сравнения количеств параметров кажется очевидным, но его реализация нетривиальна! (Вспомним, что существуют *кривые Пеано*, которые осуществляют непрерывное отображение отрезка на множество более высокой размерности.) Мы воспользуемся тем, что этот аргумент работает для векторных пространств: подпространство векторного пространства не может иметь размерность выше, чем всё пространство.

Лемма 2. *Пусть $Q$ — общий знаменатель рациональных функций $R_i$ $(i = 1, \dots, k)$ от переменных $x_1, \dots, x_m$, его степень равна $v$, а максимум степеней функций $R_i$ равен $w$. Тогда множество линейных комбинаций мономов степени не выше $k$ относительно $R_1, \dots, R_n$ вкладывается как векторное пространство в множество $V$ линейных комбинаций мономов степени не выше $k \cdot (v + w)$ относительно $x_1, \dots, x_m$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $g \to g \cdot Q^k$, где $g$ пробегает все линейные комбинации мономов от $R_1, \dots, R_n$ степени не выше $k$. Это отображение линейно, взаимно однозначно, и его образ содержится в пространстве $V$. □

Лемма 3. *Пусть $V_{k,m}$ — векторное пространство, состоящее из всех многочленов от $x_1, \dots, x_m$ степени не выше $k$. Тогда размерность пространства $V_{k,m}$ равна $\binom{k+m}{m}$.*

Доказательство. Нужная размерность равна количеству различных мономов от $x_1, \dots, x_m$ с коэффициентом 1 и степени не выше $k$. Введя переменную $x_0$ и домножая мономы на её степени, сведём задачу к подсчёту мономов от $x_0, x_1, \dots, x_m$ степени ровно $k$ с коэффициентом‘1. Такой моном — произведение $k$ мономов степени 1, причём можно считать, что сначала идут вхождения $x_0$, потом вхождения $x_1$ и т. д. После всех вхождений $x_0$ вставим в строку символ 1, после всех вхождений $x_1$ — символ 2 и т. д. Получаем строку длины $k+m$, и каждый моном степени $k$ определяется тем, в каких $m$ позициях стоят символы $1, \ldots, m$. Отсюда следует ответ. □

Теорема. *Пусть $R_1, \ldots, R_n$ — рациональные функции от $m < n$ переменных $x_1, \ldots, x_m$. Тогда существует такой ненулевой многочлен $P$, что $P(R_1, \ldots, R_n) \equiv 0$.*

Доказательство. Пусть $k$ — натуральное число, а обозначения $v$, $w$, $V$ имеют тот же смысл, что в лемме 3. Положим $C = v + w$. По лемме 3 пространство $V$ имеет размерность $\binom{Ck+m}{m}$.

С другой стороны, по той же лемме 3 количество всевозможных мономов от $R_1, \ldots, R_n$ степени не выше $k$ с коэффициентом 1 равно $\binom{k+n}{n}$. При достаточно больших $k$ имеем

$$\binom{Ck+m}{m} = (Ck+m)\ldots(Ck+1) < (2Ck)^m < k^n < (k+n)\ldots(k+1) = \binom{k+n}{n}.$$

Значит, при достаточно большом $k$ количество таких мономов больше, чем размерность пространства $V$. В силу леммы 2 между мономами от $R_1, \ldots, R_n$ степени не выше $k$ существует линейная зависимость

$$\sum_I a_I R_1^{i_1} \cdots R_n^{i_n} = 0.$$

Тогда в качестве искомого многочлена $P$ можно взять

$$\sum_I a_I y^{i_1} \cdots y^{i_n}.$$ □

Продолжим *решение задачи* 27.4. Пусть некоторое дробно-кубическое отображение $R$ является композицией отображений, указанных в условии задачи. По следствию из леммы 1 представление имеет вид $(*)$. Тогда 7 коэффициентов отображения $R$ являются многочленами от 6 коэффициентов отображений $H_1, H_2$. В силу доказанной теоремы существует ненулевой многочлен $P$, тождественно равный нулю на коэффициентах любой функции вида $(*)$. Значит, любое дробно-кубическое отображение, коэффициенты которого не обращают $P$ в нуль, не представляется в виде $(*)$.

Замечание. В случае комплексных коэффициентов дробно-квадратичная функция представима в виде композиции отображений вида $z \to z^2$, $z \to az+b$, $z \to 1/z$. В вещественном случае ситуация следующая.

Дана функция

$$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d},$$

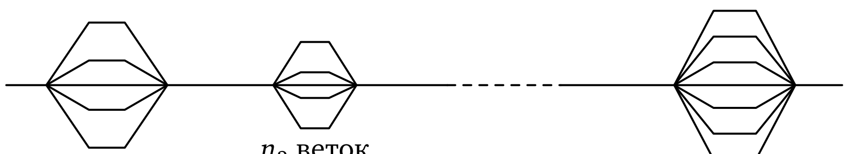
где трёхчлены $x^2+ax+b$ и $x^2+cx+d$ не имеют общих корней. Тогда следующие два утверждения равносильны:

1) найдётся числовой интервал, свободный от значений функции;
2) функция $f(x)$ представима в виде $f(x)=f_1(f_2(\ldots(f_{n-1}(f_n(x))\ldots))$, где каждая из функций $f_i(x)$ есть функция одного из видов: $k_ix+b_i$, $x^{-1}$, $x^2$.

(Двадцатый Турнир городов, осень 1998 г., основной вариант, 10–11 кл., задача 6, автор А. Я. Канель-Белов. См. в статье: *Бугаенко В. О* Избранные задачи математических соревнований 1998 года в Москве // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 3. М.: МЦНМО, 1999. С. 215–216, 225–228.)

(*А. Я. Канель-Белов*)

29.5. Условие. Схема железнодорожного узла имеет следующий вид:




Справа к узлу приближается состав из $m$ локомотивов, которые могут двигаться лишь справа налево, при этом на одной ветке может уместиться любое число локомотивов. При каком наибольшем $m$ локомотивы при прохождении через узел могут перестроиться в любом порядке? (*Фольклор*)

Ответ. При $M \leqslant n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k$.

Решение. Траектория каждого локомотива однозначно определена выбором веток, которые он проходил. А это составляет $N=n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k$ возможностей. Если $M>N$, то по принципу Дирихле два локомотива будут иметь одну и ту же траекторию и не смогут поменять порядок.

Покажем теперь, что если $M$ не превосходит $N$, то любой порядок осуществим. Сопоставим каждому локомотиву $k$-значный код. Последняя (наименее значимая) цифра кода есть число от 1 до $n_1$, вторая -от 1 до $n_2$, и т. д., старшая цифра — число от 1 до $n_k$. Общее количество возможных кодов равно $N$, так что если $M$ не превосходит $N$, всем локомотивам можно присвоить разные коды.

Движение локомотивов осуществляется по следующим правилам.

(a) Только после того, как все локомотивы подъезжают к развилке, они разъезжаются по её веткам.

(b) Номер ветки, куда направляется локомотив, равен $i$-му знаку его кода.

(c) С развилки сперва выезжают локомотивы первой ветки, затем второй, и т. д.

Легко видеть, что в итоге коды будут возрастать слева направо. Значит, любая перестановка осуществима.

Комментарий. На эти темы см.: *Кулаков А. Г.* Задача 3. Сортировка железнодорожных составов // 8 Летняя конференция Турнира городов. М.: ИЦТГ, 1996. С. 31–38, 76–99. `https://www.turgor.ru/lktg/1996/lktg1996.pdf`.

(*А. Канель-Белов, Л. Радзивиловский*)

30.10. Условие. *Матрицей Маркова* называется квадратная матрица $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, такая, что 1) $a_{ij}\geqslant 0$ для любых $i, j$; 2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ для любого $i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица Маркова порядка $n \geqslant 18$. Тогда из неё можно получить циклическими перестановками элементов строк такую матрицу Маркова $B = (b_{ij})$, что

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij} < 2, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

(*К. Э. Каибханов*)

Решение содержится в статье: *Каибханов К. Э.* Об одном свойстве матрицы Маркова // Математическое образование. 2022. № 3(103). С. 23–32. `https://matob.ru/files/nomer103.pdf`.