Геометрия: классика и современность

Кубические кривые и элементарная геометрия

А. А. Заславский, П. А. Кожевников

Иди, Малыш, поиграй в кубики.
Не хочешь? Тогда реши
кубическое уравнение.

Л. Кэролл. Разные разности

Кубические кривые, или кубики, могут естественным образом появиться при рассмотрении вопросов из элементарной геометрии. Скажем, на объединение окружности и прямой или объединение трёх прямых можно смотреть как на вырожденные кубики. Кубики могут появиться при нахождении некоторых геометрических мест точек. Так, например, для фиксированного треугольника ABC множеством точек P, для которых треугольник ABC и педальный треугольник точки P перспективны, будет являться *кубика Дарбу*. Это лишь один экспонат из большой коллекции кубик, связанных с треугольником, — см., например, [1]. Для фиксированной четвёрки точек A, B, C, D множеством точек P, из которых отрезки AB и CD видны под равными направленными углами (т. е. $\angle(PA, PB) = \angle(PD, PC)$), является так называемая *кубика фокусов* (isoptic cubic или Apollonius cubic) — см., например, [4] и [3].

Основная цель статьи — показать ряд примеров, когда привлечение кубик оказывается полезным при решении задач элементарной

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 32, 2024 (53–78)

геометрии. Главным образом будет использоваться сложение точек на кубике.

Трактовка некоторых геометрических фактов в терминах кубик оказывается естественной и красивой. Однако сделаем некоторое предостережение: хорошо работая «в общем случае», подход с кубиками может формально «давать сбой» в некоторых частных случаях (кратные точки пересечения и т. д.), и при завершении строгого доказательства для всех случаев могут потребоваться дополнительные соображения.

§ 1. Начальные сведения о кубиках

Сделаем небольшой обзор понятий и утверждений, ограничиваясь теми, которыми будем пользоваться. (Для знакомства с кубиками можно также рекомендовать статью [5], а для более подробного знакомства с теорией алгебраических кривых подойдёт, например, книга [6]).

Алгебраические кривые

Уравнение $F=0$, где $F=F(x,y)$ — многочлен степени d, задаёт на (комплексной) плоскости *алгебраическую кривую* порядка d. Так, алгебраические кривые степени 1 — это прямые. Алгебраические кривые порядка 2 называются *квадриками* или *кониками* (иногда под коникой понимают лишь невырожденную квадрику). Алгебраические кривые порядка 3 называются кубическими кривыми, или *кубиками*[1].

Также алгебраические кривые рассматриваются как множества точек на (комплексной) проективной плоскости; при этом уравнение $F(x,y)=0$ степени d в однородных координатах $(x:y:z)$ переписывается в виде $P(x,y,z)=0$, где $P(x,y,z)=z^dF(x/z,y/z)$ — *однородный* многочлен степени d, так что $F(x,y)=P(x,y,1)$ — скажем, для $P(x,y)=x^2+y^2+ax+by+c$ (окружность) имеем

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+axz+byz+cz^2.$$

Если многочлен P приводим, т. е. раскладывается в произведение многочленов Q и R меньшей степени, то алгебраическая кривая $P=0$

[1] Везде ниже мы рассматриваем многочлены с вещественными коэффициентами, хотя подставлять в них можно и комплексные числа. Строго говоря, одной и той же кривой могут соответствовать разные многочлены. Например, уравнения $x=0$ и $x^2=0$ определяют одну и ту же прямую. Чтобы избежать возникающих от этого затруднений, будем называть порядком кривой наименьшую из степеней задающих её многочленов.

называется *вырожденной* или *приводимой*; соответственно она является объединением кривых $Q=0$ и $R=0$. Так, вырожденная кубика задаётся уравнением $QL=0$, где Q и L — многочлены степени 2 и 1 соответственно; тем самым, вырожденная кубика является объединением прямой $L=0$ и квадрики $Q=0$ (которая, в свою очередь, может быть вырожденной, т. е. объединением двух прямых). В противном случае кривая называется *невырожденной* или *неприводимой*.

Пересечение алгебраических кривых

Если кубика $P=0$ содержит прямую $L=0$, то P делится на L. В противном случае кубика пересекает прямую не более, чем в трёх точках (можно сказать даже, что ровно трижды, *с учётом кратности*). Это частный случай следующей важной теоремы.

Теорема Безу. *Две алгебраические кривые порядка m и n, задаваемые взаимно простыми многочленами, пересекаются ровно в mn точках* (*комплексной проективной плоскости*) *с учётом кратности.*

Формальное определение кратности непросто. Отметим только, что случай касания кривых в их общей точке соответствует тому, что эта точка — точка пересечения кратности не меньше 2.

Из теоремы Безу следует, что любая коника пересекает невырожденную кубику в шести точках (с учётом кратности), а две различные невырожденные кубики имеют ровно девять общих точек (с учётом кратности).

Справедлива

Теорема. *Через 9 точек* (*проективной*) *плоскости можно провести хотя бы одну кубику.*

Эту теорему несложно доказать, рассмотрев соответствующую систему линейных уравнений. Отметим, что если данные 9 точек «достаточно общего» положения (скажем, если никакие 3 из данных точек не лежат на одной прямой и никакие 6 не лежат на одной конике), то кубика, проходящая через них, заведомо невырожденная.

Сформулируем ещё одну важную теорему.

Теорема Шаля о 9 точках на кубике. *Пусть даны две кубики, пересекающиеся в девяти точках. Тогда любая кубика, проходящая через восемь из этих девяти точек, проходит и через девятую точку.*

В отличие от «обычной» девятки точек «общего положения», девятка точек из теоремы Шаля — *особенная*: через неё проходит не единственная кубика. Кубики, проходящие через такую особенную девятку, образуют *пучок*. Несложно понять, что в таком пучке найдутся невырожденные кубики. Отметим ещё, что в особенной девятке точек из теоремы Шаля никакие 4 точки не лежат на одной прямой и никакие 7 из этих 9 точек не лежат на одной конике (иначе вся прямая или коника принадлежала бы каждой кубике, содержащей эту девятку точек).

Геометрические особенности

Кубика может содержать так называемые *особые* точки (например, точка $(0,0)$ является точкой самопересечения кривой $y^2 = x^3 + x^2$ и точкой возврата кривой $y^2 = x^3$; формально, особые точки — это точки, в которых обнуляются частные производные задающего многочлена). Особыми могут быть и бесконечно удалённые точки, как, например, у кривой $y = x^3$. Кубику называют *неособой*, если она не содержит особых точек.

У кубики (заданной многочленом с вещественными коэффициентами) есть хотя бы одна асимптота (т. е. вещественная точка пересечения кубики с бесконечно удалённой прямой).

На невырожденной кубике есть *точки перегиба* — точки, в которых касательная к кубике имеет пересечение с кубикой кратности 3. Известно, что этих точек всегда 9, однако вещественными из них могут быть не более трёх. При этом девять точек перегиба разбиваются четырьмя способами на тройки коллинеарных, т. е. через каждую точку проходят четыре прямые, а на каждой из этих 12 прямых лежат три точки.

Сложение точек

Для неособых точек невырожденной кубики $\mathscr{C}$ определена операция сложения точек. Эта операция зависит от фиксации точки[2)] O и состоит в следующем: пусть X — третья точка пересечения прямой AB с $\mathscr{C}$, тогда $A+B$ — это третья точка пересечения прямой OX с $\mathscr{C}$. Сложение удовлетворяет условиям[3)] (i)–(iv):

i) коммутативность: $A+B=B+A$;
ii) ассоциативность: $(A+B)+C = A+(B+C)$;
iii) нейтральный элемент: $O+A=A$;

---

2) В случае особой коники точка O должна быть неособой. С примером сложения точек на особой кубике можно ознакомиться в [5].

3) Это аксиомы абелевой группы. Ассоциативность сложения по сути является частным случаем теоремы Шаля, см. пример 3 ниже; остальные свойства установить достаточно несложно.

iv) противоположный элемент: для точки A найдётся точка $-A$ такая, что $(-A) + A = O$.

Как следствие, имеется закон сокращения: $A + C = B + C \Rightarrow A = B$. Также однозначно определена разность $A - B$ как единственное решение уравнения $X + B = A$. Полагают

$$nA = \underbrace{A + A + \ldots + A}_{n} \quad \text{и} \quad -nA = \underbrace{-A - A + \ldots - A}_{n}$$

(для натурального n), а также $0 \cdot A = O$. Тогда для любых целых m и k выполнено $(m + k)A = mA + kA$ и $m(A + B) = mA + mB$. Отметим, что из равенства $nA = O$ $(n \in \mathbb{N})$ не следует $A = O$. Элемент A (т. е. точка $A \in \mathscr{C}$) такой, что $A \neq O$, $2A \neq O$, …, $(n-1)A \neq O$, но $nA = O$, называется элементом *порядка n*. Ниже нам встретятся элементы (точки) порядка 2. Для элемента C порядка 2 выполнено равенство $C = -C$ (это эквивалентно равенству $2C = O$). Известно, что в случае неособой кубики $\mathscr{C}$ существуют ровно три элемента порядка 2, причём сумма любых двух из них равна третьему (т. е. если C_1, C_2, C_3 — элементы порядка 2, то $C_1 + C_2 = C_3$, $C_2 + C_3 = C_1$, $C_3 + C_1 = C_2$).

Удобно выбирать в качестве O точку перегиба кубики; далее предполагаем, что сделан именно такой выбор. Для этого случая известны следующие факты.

1) $A + B + C = O$ тогда и только тогда, когда A, B, C лежат на одной прямой.
2) $A + B + C + D + E + F = O$ тогда и только тогда, когда A, B, C, D, E, F лежат на одной конике.
3) Если алгебраическая кривая порядка d пересекает $\mathscr{C}$ в $3d$ (неособых) точках, то сумма этих точек равна O.

Для случая $d = 3$ последний факт согласуется с теоремой Шаля о 9 точках на кубике: особенные девятки точек, получающиеся в пересечении двух кубик, — это девятки точек с суммой O.

§ 2. Примеры из геометрии кубик

В примерах ниже рассматриваются неособые точки на невырожденной кубике $\mathscr{C}$.

1. (a) *Пучок прямых, пересекающихся на кубике.*

Пусть выбираются пары точек $X, Y \in \mathscr{C}$. Тогда условие $X + Y = \mathrm{const}$ эквивалентно тому, что прямые XY проходят через фиксированную точку на кубике $\mathscr{C}$.

Например, пусть $A, B, C, D \in \mathscr{C}$. Каждой точке $X \in \mathscr{C}$ ставим в соответствие точку Y — шестую (с учётом кратности) точку пересечения коники, проходящей через A, B, C, D, X, с $\mathscr{C}$. Тогда прямые XY проходят через фиксированную точку.

Доказательство. Действительно, $X+Y+A+B+C+D=O$, откуда $X+Y=\text{const}$. □

(б) *Пучки обобщённых «антипараллелей».*

Фиксируем $P, C, D \in \mathscr{C}$. Через P проводим всевозможные секущие и получаем пары точек пересечения $X, Y \in \mathscr{C}$. Проводим через C, D, X, Y коники, пересекающие $\mathscr{C}$ ещё в паре точек Z, T. Тогда прямые ZT проходят через фиксированную точку $Q \in \mathscr{C}$. (Фактически P и Q в этой конструкции равноправны.)

Доказательство. Действительно,

$$P+X+Y=O \quad \text{и} \quad C+D+X+Y+Z+T=O,$$

отсюда видим, что $Z+T=\text{const}$. □

2. (а) *Проектирование с кубики на себя.*

Фиксируем точку $P \in \mathscr{C}$. Для $X \in \mathscr{C}$ пусть Y — третья точка пересечения прямой PX с кубикой $\mathscr{C}$. Инволюцию $\mathscr{C} \to \mathscr{C}$, сопоставляющую точке X точку Y, обозначим s_P. В терминах сложения точек: $Y=s_P(X)=-P-X$. Видим, что последовательное применение нечётного количества проектирований с кубики на себя (т. е. преобразований вида s_P) есть преобразование того же вида. Применение же чётного количества проектирований с кубики на себя является преобразованием *сдвига* $X \mapsto X+\text{const}$.

Посмотрим, при каких условиях на различные точки $P, P' \in \mathscr{C}$ преобразования перестановочны, т. е. $s_P s_{P'} = s_{P'} s_P$. Имеем

$$(s_P s_{P'})(X) = s_P(-P'-X) = -P+P'+X.$$

Аналогично $(s_{P'} s_P)(X) = -P'+P+X$. Видим, что $s_P s_{P'} = s_{P'} s_P$ тогда и только тогда, когда $P-P'=P'-P$, или, эквивалентно, $2(P-P')=O$, т. е. $P-P'=C$ — точка порядка 2. (Отметим геометрическую переформулировку условия $2(P-P')=O$, или $2P=2P'$: касательные к кубике, проведённые в точках P и P', пересекаются на кубике.)

Наоборот, если $P, P' \in \mathscr{C}$ таковы, что $P'-P=C$ — точка порядка 2, то $s_P s_{P'} = s_{P'} s_P$.

В таком случае для любой точки $X \in \mathscr{C}$ имеем «процесс замыкания»

$$X \xrightarrow{s_P} Y \xrightarrow{s_{P'}} X' \xrightarrow{s_P} Y' \xrightarrow{s_{P'}} X.$$

(б) *Вписанный в кубику четырёхсторонник.*

Рассмотрим теперь такую несложную, но важную конструкцию: пусть точки X, Y, X', Y', $P = XY \cap X'Y'$ и $P' = XY' \cap X'Y$ лежат на кубике $\mathscr{C}$. Тогда $Y = -P - X$, $X' = -P' - Y = (P - P') + X$. Аналогично $X' = (P' - P) + X$, значит, $P - P' = C$ — элемент порядка 2 (согласно предыдущему примеру (а)). При этом видим, что в парах (X, X'), (Y, Y'), как и в паре (P, P'), точки получаются друг из друга прибавлением C.

(в) *Пересечения чевиан на кубике.*

Следующая конструкция будет также важна для дальнейшего.

Пусть в треугольнике $A_1A_2A_3$ на прямых A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 взяты точки X_1, X_2, X_3 соответственно так, что чевианы A_1X_1, A_2X_2, A_3X_3 пересекаются в точке A_0, причём все точки $X_1, X_2, X_3, A_0, A_1, A_2, A_3$ лежат на кубике $\mathscr{C}$ (иначе говоря, A_0, A_1, A_2, A_3 — четвёрка точек на $\mathscr{C}$ такая, что три точки пересечения $A_0A_1 \cap A_2A_3$, $A_0A_2 \cap A_1A_3$, $A_0A_3 \cap A_1A_2$ тоже лежат на кубике).

Из (б) получаем, что $A_1 - A_0 = A_2 - A_3 = X_2 - X_3 = C_1$, где C_1 — некоторый элемент порядка 2. Аналогично $A_2 - A_0 = A_3 - A_1 = X_3 - X_1 = C_2$ и $A_3 - A_0 = A_1 - A_2 = X_1 - X_2 = C_3$, где C_2 и C_3 — оставшиеся два элемента порядка 2.

Видим, что четвёрка[4)] $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ совпадает с $\{A_i, A_i + C_1, A_i + C_2, A_i + C_3\}$ для каждого $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. В согласии со сказанным выше видим, что $C_1 + C_2 = (A_0 - A_1) + (A_1 - A_3) = A_0 - A_3 = C_3$ (сумма двух элементов порядка 2 равна третьему).

Заметим, что $2A_0 = 2A_1 = 2A_2 = 2A_3$, и положим $X_0 = -2A_i$. (Равенства $2A_i = -X_0$ геометрически будет означать, что касательные к $\mathscr{C}$, проведённые в точках A_0, A_1, A_2, A_3, пересекают кубику в одной и той же точке X_0.) Далее, $X_0 + C_1 = -2A_0 + C_1 = -A_0 - A_1 = X_1$, и аналогично $X_0 + C_2 = X_2$ и $X_0 + C_3 = X_3$, так что X_0 дополняет тройку $\{X_1, X_2, X_3\}$ до четвёрки $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$, равной $\{X_i, X_i + C_1, X_i + C_2, X_i + C_3\}$ для каждого $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Наоборот, всю эту конструкцию можно начать с точки $X_0 \in \mathscr{C}$: рассмотрим точки $X_i = X_0 + C_i$, $i = 1, 2, 3$, а также точки A_j такие, что $2A_0 = -X_0$ и $A_i = A_0 + C_i$, $i = 1, 2, 3$ (вспомним, что геометрически точки A_i — точки касания касательных, проведённых к $\mathscr{C}$ из точки X_0). Легко проверить, что тогда $X_1 + A_0 + A_1 = X_1 + A_2 + A_3 = O$, значит, $X_1 = A_0A_1 \cap A_2A_3$. Аналогично $X_2 = A_0A_2 \cap A_3A_1$ и $X_3 = A_0A_3 \cap A_1A_2$.

[4)] В терминах теории групп такая четвёрка — это смежный класс по подгруппе $\{O, C_1, C_2, C_3\}$.

Если в конструкции зафиксированы $P = X_1$ и $P' = X_2 = X_1 + C_3$, то обязательно $\{X_0, X_3\} = \{P + C_1, P + C_2\}$ (здесь C_1 и C_2 равноправны), и для каждой из двух возможностей $X_0 = P + C_1$, $X_0 = P + C_2$ конструкция восстанавливается однозначно.

3. *Девять точек на двух тройках прямых, или «обобщённая теорема Паскаля — Паппа».*

Теорема. *Пусть восемь из девяти точек* $1, 2, 3, 4, 5, 6, A = 12 \cap 45$, $B = 23 \cap 56$, $C = 34 \cap 61$ *лежат на кубике* $\mathscr{C}$. *Тогда и девятая точка — тоже.*

Доказательство. Вместо 1 будем писать X_1 и т. д. Пусть кубика $\mathscr{C}$ проходит через точки $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, A, B$ Пусть прямые X_3X_4 и X_6X_1 пересекают $\mathscr{C}$ в третий раз в точках C' и C''. Покажем, что $C' = C''$, отсюда будет следовать нужное утверждение. Имеем

$$X_1 + X_2 + A = O, \quad X_5 + X_6 + B = O, \quad X_3 + X_4 + C' = O.$$

Сложив, получим:

$$C' = -(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + A + B).$$

Аналогичные рассуждения приводят к тому же выражению для C''. Отсюда $C' = C'' = C$ (при этом данные 9 точек образуют особенную девятку). □

Несложно понять равноправие троек $(1, 3, 5)$, $(2, 4, 6)$ и (A, B, C) и переформулировать теорему так.

Пусть две тройки прямых пересекаются в девяти точках. Тогда если кубика $\mathscr{C}$ проходит через восемь из них, то проходит и через девятую.

В такой переформулировке видно, что это частный случай теоремы Шаля для двух вырожденных кубик (являющихся объединением троек прямых).

Ещё одна переформулировка: для любых точек A, B, C на кубике композиция $s_Cs_Bs_As_Cs_Bs_A$ равна тождественному преобразованию.

Обычная теорема Паскаля получается, когда $\mathscr{C}$ является объединением квадрики, на которой лежат точки $1, 2, 3, 4, 5, 6$, и прямой, на которой лежат A, B, C. Теорема Паппа — частный случай, когда квадрика — это пара прямых, одна из которых содержит точки 1,3,5, а другая — 2,4,6.

4. *Теорема о трёх кониках, или «обобщённые радикальные оси».*

Если три коники проходят через две данные точки, то три прямые, соединяющие пары остальных общих точек каждых двух коник, пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть C и D — общие точки трёх коник, а A_{ij} и B_{ij} — оставшиеся две точки пересечения коник с номерами i и j. Через эти 8 точек проведём кубику. Так как C, D, A_{12}, B_{12}, A_{13}, B_{13} лежат на одной конике, их сумма равна O. Тогда сумма всех восьми рассматриваемых точек равна $A_{23}+B_{23}$. Аналогично она равна $A_{12}+B_{12}=A_{13}+B_{13}$. Из равенств $A_{12}+B_{12}=A_{13}+B_{13}=A_{23}+B_{23}$ следует, что прямые $A_{12}B_{12}$, $A_{13}B_{13}$ и $A_{23}B_{23}$ пересекают кубику в третий раз в одной и той же точке. (Причём эта точка дополняет данные 8 точек до особенной девятки.) $\square$

5. (а) *Центральные кубики.*

Пусть зафиксированы треугольник XYZ и точка T. Рассматриваем пары изогонально сопряжённых[5)] точек D, D'.

Множество точек D, для которых прямая DD' проходит через точку T, является кубикой. Точку T называют центр (pivot), а кубику — центральной изогональной (pivotal isogonal)[6)]. В том, что это кубика, несложно убедиться, записав в трилинейных (или других однородных) координатах условие коллинеарности точек $D(x:y:z)$, $D'(yz:zx:xy)$ и фиксированной точки T.

Изогональная центральная кубика $\mathscr{C}=\mathscr{C}(XYZ,T)$ проходит через X, Y, Z, центры I_0, I_1, I_2, I_3 вписанной и вневписанных окружностей (т. е. неподвижные точки изогонального сопряжения), точку T и её изогонально сопряжённую точку T'. При этом (поскольку $I_i=I_i'$), касательные к кубике, проведённые в точках I_i, пересекают кубику в точке T. Таким образом, ситуация полностью согласуется с конструкцией из примера 2 (в): точки T, X, Y, Z, I_0, I_1, I_2, I_3 соответствуют точкам X_0, X_1, X_2, X_3, A_0, A_1, A_2, A_3 из примера 2 (в).

(б) *Пучки центральных кубик.*

На произвольной прямой l, не проходящей через X, Y, Z, есть пара изогонально сопряжённых точек D, D' (это точки пересечения прямой l с её образом при изогональном сопряжении). Тогда все центральные изогональные кубики $\mathscr{C}(XYZ,T)$, где $T\in\ell$, проходят через

[5)] Вместо изогонального сопряжения здесь можно взять и другое сопряжение (проективно эквивалентное изогональному) относительно треугольника, например изотомическое сопряжение. Такое сопряжение однозначно задаётся (при фиксированном треугольнике XYZ) любой из его четырёх неподвижных точек S, иногда такое сопряжение называют S-сопряжением.

[6)] Для произвольного S-сопряжения относительно треугольника XYZ можно говорить о центральной S-кубике $\mathscr{C}=\mathscr{C}_S(XYZ,T)$.

девять точек X, Y, Z, I_0, I_1, I_2, I_3, D, D', так что эти кубики образуют пучок (и значит, эта девятка точек — особенная). Например, если ℓ — прямая Эйлера треугольника XYZ (в таком случае D и D' — ортоцентр и центр описанной окружности), то пучок $\mathscr{C}(XYZ, T)$, где $T \in \ell$, называют эйлеровым (Euler pencil).

§ 3. Циркулярные кубики

Рассмотрим точки $J_1(1 : i : 0)$ и $J_2(1 : (-i) : 0)$ комплексной проективной плоскости. Эти точки называются *круговыми*.

Легко видеть, что любая окружность проходит через них. Наоборот, коника, проходящая через J_1 и J_2, является окружностью.

Кубика, проходящая через круговые точки, называется *циркулярной*. Скажем, объединение окружности и прямой — вырожденная циркулярная кубика.

Получается, что циркулярная кубика (задаваемая многочленом с вещественными коэффициентами) пересекает бесконечно удалённую прямую в точках J_1, J_2 и ещё одной точке, которая соответствует асимптоте. Эту точку далее будем обозначать J, так что $J + J_1 + J_2 = O$.

Пусть четыре точки A, B, C, D лежат на невырожденной циркулярной кубике и отличны от J_1 и J_2. Из теоремы о 6 точках на конике следует, что они лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $A + B + C + D + J_1 + J_2 = O$ или, эквивалентно, $A + B + C + D = J$.

Примеры из геометрии циркулярных кубик

Везде в примерах ниже, если не оговорено противное, $\mathscr{C}$ будет обозначать циркулярную невырожденную кубику.

6. *Точка Микеля четырёхсторонника, вписанного в кубику.*

Пусть точки $A, B, A', B' \in \mathscr{C}$ и при этом $P = AB \cap A'B'$ и $AB' \cap A'B$ также лежат на $\mathscr{C}$.

Тогда, согласно примеру 2 (б), для некоторого элемента второго порядка C выполнено $A' = A + C$, $B' = B + C$, $P' = P + C$. Окружность (ABP') пересекает $\mathscr{C}$ в точке M такой, что $A + B + P' + M = J$. Последнее, в силу $P' = P + C$ и коллинеарности точек A, B, P, запишется как $A + B + P + C + M = J$, т. е. $C + M = J$ или $M = J + C$. Аналогично $M = J + C$ лежит на окружностях $(AB'P)$, $(A'BP)$ и $(A'B'P')$, т. е. $M = J + C$ является точкой Микеля нашего четырёхсторонника.

Обратим внимание на то, что M зависит только от J и элемента второго порядка C.

7. (а) *Пучки прямых и окружностей.*

Утверждение. *Через фиксированные точки $A, B \in \mathscr{C}$ проводим всевозможные окружности, пересекающие $\mathscr{C}$ в точках X и Y (помимо точек A, B, J_1, J_2). Тогда всевозможные прямые XY проходят через одну точку (лежащую на $\mathscr{C}$).*

Доказательство. Действительно, $A + B + X + Y = J$, тем самым $X + Y = \text{const}$. □

Конечно, это утверждение можно переформулировать разными способами, например, так: если зафиксированы точки $A, P \in \mathscr{C}$ и через P проводят прямые, пересекающие $\mathscr{C}$ в точках X, Y, то окружности (AXY) проходят через одну точку, лежащую на $\mathscr{C}$ (помимо A, J_1, J_2).

Следующая задача элементарной геометрии представляет собой тот же факт для вырожденной кубики. Пусть через данную точку P проводятся прямые, пересекающие данную окружность ω в точках X и Y. Тогда всевозможные окружности (AXY), где A — фиксированная точка, проходят через одну точку (лежащую на прямой AP). (Конечно, эту задачу несложно решить геометрически, используя степень точки.)

(б) *Пучки «антипараллелей» для циркулярной кубики.*

Пусть P и Q — точки на циркулярной кубике $\mathscr{C}$. Через P проводим всевозможные секущие и получаем пары точек пересечения X, Y. Через Q проводим всевозможные секущие и получаем пары точек пересечения Z, T.

Тогда если точки X, Y, Z, T лежат на одной окружности для одного положения секущих, то это будет выполнено и для любого положения секущих. Причём это происходит тогда и только тогда, когда PQ параллельна асимптоте.

Доказательство. Действительно, из $P + X + Y = O$ и $Q + Z + T = O$ следует $X + Y + Z + T = J$ тогда и только тогда, когда $P + Q + J = O$. □

(в) *Антипараллели относительно коники.*

Пусть окружность пересекает конику в точках A, B, C, D. Пусть прямая, параллельная AB, пересекает конику в точках X и Y, а прямая, параллельная CD, пересекает конику в точках Z и T. Тогда точки X, Y, Z, T лежат на одной окружности.

Можно рассмотреть (циркулярную) кубику — объединение коники и бесконечно удалённой прямой. Тогда эту конструкцию можно трактовать как частный случай пункта 7 (б) (с бесконечно удалёнными точками P и Q).

Можно показать, что направления *антипараллелелей* AB и CD симметричны относительно оси симметрии коники.

8. *Центры инверсий на циркулярной кубике.*

В сюжете 7 (б) остановимся на частном случае $P = Q$. Проведём через P две (различные) секущие, пересекающие кубику в точках X, Y и Z, T. Видим (из общего случая или из равенства $X+Y+Z+T=J$), что X, Y, Z, T лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $2P+J=O$ (геометрически: касательная, проведённая в P, параллельна асимптоте). Наоборот, если P — одна из четырёх точек с условием $2P+J=O$, то для любой пары секущих точки X, Y, Z, T лежат на одной окружности.

Последнее условие, в силу независимости произведения $\overrightarrow{PX}\cdot\overrightarrow{PY}$ от выбора секущей, можно переформулировать так: центральное проектирование s_P является ограничением на $\mathscr{C}$ инверсии с центром P. При этом неподвижные точки s_P (т. е. точки касания касательных к $\mathscr{C}$, проведённых из P) лежат на окружности этой инверсии.

Рассмотрим на кубике все четыре точки — решения уравнения $2P+J=O$ (в которых касательная параллельна асимптоте). Назовём эти точки I_0, I_1, I_2, I_3. Согласно 2 (в), разность между любыми двумя из этих точек — элемент порядка 2, т. е.

$$\{I_0, I_1, I_2, I_3\} = \{I_i, I_i + C_1, I_i + C_2, I_i + C_3\}.$$

Рассмотрим для одной из точек I_i, скажем, для I_0, точки касания K_0, K_1, K_2, K_3 касательных, проведённых к $\mathscr{C}$ из I_0 (т. е. K_i — решения уравнения $2K+I_0=O$). Как показано выше, точки K_i лежат на окружности ω_0, так что инверсия i_0 относительно этой окружности переводит $\mathscr{C}$ в себя. Из 2 (в) получаем (полагая в обозначениях п. 2 (в) $X_0=I_0$), что точки пересечения $K_0K_1\cap K_2K_3$, $K_0K_2\cap K_1K_3$, $K_0K_3\cap K_2K_1$ — это I_1, I_2, I_3. По известной теореме Брокара для вписанного четырёхугольника четвёрка I_0, I_1, I_2, I_3 является ортоцентрической.

Как мы видели в примере 2 (в), вершины

$$X = I_0I_1 \cap I_2I_3, \quad Y = I_0I_2 \cap I_1I_3, \quad Z = I_0I_3 \cap I_2I_1$$

ортотреугольника автоматически лежат на данной кубике (это точки $J+C_1$, $J+C_2$, $J+C_3$). Для радиуса R_0 инверсии i_0 получаем

$$R_0^2 = \overrightarrow{I_0I_1}\cdot\overrightarrow{I_0X} = \overrightarrow{I_0I_2}\cdot\overrightarrow{I_0Y} = \overrightarrow{I_0I_3}\cdot\overrightarrow{I_0Z}.$$

В частности, если I_0 — внутри треугольника $I_1I_2I_3$, то ω_0 — окружность мнимого радиуса.

Приведём ещё одно, «координатное» объяснение того факта, что I_0, I_1, I_2, I_3 — ортоцентрическая четвёрка.

Направим ось ординат системы координат параллельно асимптоте данной кубики и выберем начало координат так, чтобы данная циркулярная кубика задавалась уравнением

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)x + ax^2 + bx + cy + d = 0.$$

Касательные из бесконечно удалённой точки J будут параллельны оси Oy, поэтому координаты точек касания I_0, I_1, I_2, I_3 удовлетворяют уравнению $F'_y = 2xy + c = 0$, т. е. точки I_0, I_1, I_2, I_3 лежат на прямоугольной гиперболе. Исключив из двух уравнений y, получим уравнение четвёртой степени относительно x, произведение корней которого равно $-c^2/4$. Несложная выкладка показывает, что это условие эквивалентно перпендикулярности хорд гиперболы $I_0I_1 \perp I_2I_3$ (или $I_0I_2 \perp I_1I_3$). Утверждение доказано.

Заметим ещё, что если некоторая инверсия на плоскости переводит $\mathscr{C}$ в себя, то центр инверсии должен принадлежать $\mathscr{C}$ (как образ бесконечно удалённой точки J). Видим, что существует в точности 4 инверсии (с центрами в указанных выше точках I_i), переводящие $\mathscr{C}$ в себя. Композицией пары таких инверсией является инверсия+(осевая) симметрия, которая будет фигурировать и в примере 13 (б).

Отметим также, что образ циркулярной кубики при инверсии с центром на ней тоже будет циркулярной кубикой. (Понять это можно, переместив центр инверсии в начало координат и задав кубику уравнением $(x^2 + y^2)L_1 + Q + L_2 = 0$, где L_1, L_2 — однородные линейные многочлены, а Q — однородный квадратичный многочлен.)

9. *Изоциркулярное сопряжение.*

Утверждение. *Пусть точки $A, B, C, D \in \mathscr{C}$ таковы, что точка $P = AB \cap CD$ тоже лежит на $\mathscr{C}$. Тогда для $X \in \mathscr{C}$ окружности (ABX) и (CDX) вторично пересекаются в точке $Y \in \mathscr{C}$. При этом радикальные оси XY пересекаются в одной точке Q (лежащей на $\mathscr{C}$) такой, что прямая QP параллельна асимптоте.*

Доказательство. Имеем $A+B+P=C+D+P=O$. Окружность (ABX) пересекает $\mathscr{C}$ ещё раз в точке Y такой, что $A+B+X+Y=J$. Поскольку $A+B=C+D$, в этой же точке пересекает $\mathscr{C}$ и окружность (CDX).

Далее, равенство $X + Y + (A + B - J) = O$ означает, что прямая XY пересекает кубику в фиксированной точке $Q = A + B - J = -P - J$. Полученное равенство $Q + P + J = O$ показывает, что прямая QP параллельна асимптоте. □

Конечно, доказанное утверждение согласуется с примером 7 (б).

Для фиксированных точек A, B, C, D точке X можно поставить в соответствие точку Y вторичного пересечения окружностей (ABX) и (CDX). В [3] такое соответствие обозначалось $f_{AB,CD}$ и называлось *изоциркулярным сопряжением*. Так, утверждение выше означает, что сужение $f_{AB,CD}$ на $\mathscr{C}$ совпадает с проектированием s_Q.

10. *Пересечение окружностей Микеля.*

Утверждение. *Пусть точки A', B', C' лежат на прямых BC, CA, AB соответственно. Пусть $\mathscr{C}$ — любая циркулярная кубика, проходящая через точки A, B, C, A', B', C'. Тогда $\mathscr{C}$ содержит точку T пересечения окружностей $(AB'C')$, $(BC'A')$, $(CA'B')$.*

(*Иначе говоря, T дополняет $A, B, C, A', B', C', J_1, J_2$ до особенной девятки точек.*)

Отметим, что в случае бесконечно удалённой точки C получается конструкция «с антипараллелями»: $AB' \parallel BA'$, а T лежит на прямой $A'B'$ и окружностях $(AB'C')$, $(BC'A')$.

Случай коллинеарных точек A', B', C' согласуется с примером 6.

Доказательство. Мы находимся в условиях предыдущего примера 9: $AB' \cap BA' = C \in \mathscr{C}$, поэтому окружности $(AB'C')$ и $(BC'A')$ пересекают кубику в одной и той же точке. Через эту же точку пройдёт и пара окружностей $(AB'C')$ и $(CA'B')$. □

Доказательство-2 (теорема Шаля). Пусть окружности $(AB'C')$, $(A'B'C)$ и $(A'BC')$ вторично пересекаются в точке T. Рассмотрим кубику g_1, являющуюся объединением окружности и прямой $(AB'C') \cup BC$, аналогично положим $g_2 = (A'BC') \cup CA$. Каждая из трёх кубик g_1, g_2, $\mathscr{C}$ проходит через 8 точек $A, B, C, A', B', C', J_1, J_2$, а кроме того, g_1 и g_2 проходят через T. Отсюда следует, что и $\mathscr{C}$ проходит через T. □

11. *Теорема Клиффорда*: *конструкция из* 8 *окружностей*.

Пусть, как и в примере 6, точки $A, B, A', B', P = AB \cap A'B'$, $P' = AB' \cap A'B$ лежат на кубике $\mathscr{C}$, так что $A' = A + C$, $B' = B + C$, $P' = P + C$ для элемента C порядка 2.

Тогда согласно примеру 9 для любой точки $X \in \mathscr{C}$ точка Y вторичного пересечения окружностей (ABX) и $(A'B'X)$ лежит на кубике $\mathscr{C}$ и такова, что $X + Y + Q = O$, где $Q = -P - J$. Аналогично точка Y' вторичного пересечения окружностей $(AB'X)$ и $(A'BX)$ лежит на кубике $\mathscr{C}$ и такова, что $X + Y' + Q' = O$, где $Q' = -P' - J$. Видим, что $Q' = -P - C - J = Q + C$ (а следовательно, в силу $Y + Q = Y' + Q'$ выполнено $Y' = Y + C$). Согласно примеру 2 (а) прямые QY' и $Q'Y$ пересекутся на $\mathscr{C}$ в точке $X'=-Q-Y+C=X+C$, в которой в силу примера 9 также пересекаются пары окружностей (ABY'), $(A'B'Y')$ и $(AB'Y)$, $(A'BY)$.

По сути в полученной конструкции четырёхсторонники с вершинами A, B, A', B', P, P' и X, Y, X', Y', Q, Q' равноправны.

Из рассуждений выше легко получить доказательство теоремы, которую иногда называют *теоремой Клиффорда*.

Теорема Клиффорда. *В четырёхугольнике $ABCD$ точки E и F таковы, что окружности (ABE), (CDE), (BCF), (ADF) пересекаются в одной точке. Тогда окружности (ADE), (BCE), (ABF), (CDF) также пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Рассмотрим (циркулярную) кубику, проходящую через 9 точек: $A, B, A'=C, B'=D, J_1, J_2$, точки $P=AB\cap CD$, $P'=BC\cap AD$ и точку X пересечения четырёх данных окружностей. Тогда, согласно проведённым выше рассмотрениям, все окружности (ADE), (BCE), (ABF), (CDF) проходят через одну точку X' (такую, что $X' = X + C_1$, где $C_1 = A - A' = B - B' = P - P'$ — элемент порядка 2). □

Конечно, есть и короткое геометрическое доказательство: используя инверсию, можно свести теорему Клиффорда к теореме о точке Микеля для четвёрки прямых.

Как отмечено в [3], теорему Клиффорда можно переформулировать как перестановочность изоциклических инволюций $f_{AB,CD}$ и $f_{BC,DA}$.

12. *Радикальные оси.*

Теорема о трёх кониках из примера 4 в случае, когда общие точки коник — круговые точки J_1 и J_2, превращается в теорему о радикальных осях трёх окружностей.

13. (a) *Циркулярные центральные изогональные кубики.*

Докажем следующую *лемму*.

Лемма. *Круговые точки J_1 и J_2 изогонально сопряжены относительно любого треугольника XYZ.*

Доказательство. Круговые точки J_1 и J_2 — две точки пересечения окружности (XYZ) с бесконечно удалённой прямой. Но при изогональном сопряжении окружность (XYZ) и бесконечно удалённая прямая переходят друг в друга. А поскольку J_1 не совпадает со своей изогонально сопряжённой точкой J_1', единственная возможность: $J_1' = J_2$ и $J_2' = J_1$. Это и требовалось установить. □

Из леммы и определения кубики $\mathscr{C}(XYZ, T)$ (см. пример 4 (a)) следует, что J_1 и J_2 лежат на кубике $\mathscr{C}(XYZ, T)$ тогда и только тогда, когда

J_1, J_2, T лежат на одной прямой, т. е. когда T — бесконечно удалённая точка. Таким образом, верно следующее

Утверждение. *Кубика $\mathscr{C}(XYZ, T)$ циркулярна тогда и только тогда, когда T — бесконечно удалённая точка.*

В терминологии примера 4 (б), в множестве кубик $\mathscr{C}(XYZ, T)$ циркулярные кубики образуют пучок, определяемый условием $T \in l$, где l — бесконечно удалённая прямая, или, эквивалентно, пучок, задаваемый особенной девяткой точек $X, Y, Z, I_0, I_1, I_2, I_3, J_1, J_2$.

Оказывается, утверждение, приведённое выше, можно обратить следующим образом.

Любая неособая циркулярная кубика может быть получена как $\mathscr{C}(XYZ, J)$ (центральная изогональная кубика некоторого треугольника и бесконечно удалённой точки J).

Доказательство. Для данной кубики воспользуется конструкцией из примера 8: XYZ — ортотреугольник для ортоцентрической четвёрки I_0, I_1, I_2, I_3. Тогда I_0, I_1, I_2, I_3 — центры вписанной и вневписанных окружностей треугольника XYZ.

Остаётся заметить, что кубика $\mathscr{C}(XYZ, J)$, как и данная кубика, проходит через десять точек X, Y, Z, I_0, I_1, I_2, I_3, J, J_1, J_2. Значит, эти кубики совпадают. □

(б) *Квартеты.*

Пусть $\mathscr{C} = \mathscr{C}(XYZ, J)$, где J — бесконечно удалённая точка. Изогональное сопряжение $P \mapsto P'$ относительно XYZ задаётся через сложение точек: $P + P' + J = O$. Кроме того, как мы знаем, $X = J + C_1$, $Y = J + C_2$, $Z = J + C_3$, где C_i — точки порядка 2.

По произвольной точке $D \in \mathscr{C}$ определим *квартет*[7] A, B, C, D точек на кубике как $A = D + C_1$, $B = D + C_2$, $C = D + C_3$, так что любая пара точек квартета отличается на элемент порядка 2.

Аналогично рассмотрим квартет A', B', C', D' для изогонально сопряжённой точки D'. Точки в парах (A, A'), (B, B'), (C, C') на самом деле будут изогонально сопряжены: скажем,

$$A + A' + J = D + C_1 + D' + C_1 + J = D + D' + J = O.$$

Заметим следующие тройки коллинеарных точек: (X, D, A'), (X, D', A), (X, B, C'), (X, B', C) и аналогичные тройки с участием Y и Z. Действи-

[7] Отметим, что аналогичным образом квартеты можно определять и для произвольных кубик $\mathscr{C}(XYZ, T)$ из примера 4.

тельно, скажем,

$$X + B + C' = J + C_1 + B + B' + C_1 = J + B + B' = O.$$

Далее, четыре точки Y, Z, D', A лежат на одной окружности (то же верно для аналогичных четвёрок). Действительно,

$$Y + Z = J + C_2 + J + C_3 = J + J + C_1 = J + X,$$

поэтому $Y + Z + D' + A = J + X + D' + A$, что равно J.

Геометрически получается следующая картина: есть 4 пары точек (A, A'), (B, B'), (C, C'), (D, D'), изогонально сопряжённых относительно XYZ, причём $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. При этом пары (A, D'), (D, A') и т. д. оказываются на одних и тех же изогоналях. Из наличия прямой XAD' и окружности $(YZAD')$ легко вывести подобие (с сохранением ориентации) $XYD \sim XZA$, поэтому точки в паре A, D (и аналогично B, C) переходят друг в друга инверсией + симметрией ι_X с центром X, меняющей местами Y и Z. Получается, что инволюция $D \mapsto D + C_1$ является сужением на кубику инверсии+симметрии ι_X (аналогичное верно для инволюций $D \mapsto D + C_2$ и $D \mapsto D + C_3$).

Свойствам рассматриваемых квартетов был посвящён проект ЛКТГ в 2010 г. [2].

В дополнение отметим ещё конкурентности тройки прямых DA, $D'A'$, BC и аналогичных троек. Эти конкурентности не объясняются с помощью кубик (точки пересечения не лежат на $\mathscr{C}$), но здесь работает следующее геометрическое соображение: пары точек (A, A'), (B, B'), (C, C'), (D, D') — пары фокусов гомотетичных коник, вписанных в треугольник XYZ. Поэтому тройки прямых DA, $D'A'$, BC и т. д. пересекаются в центрах гомотетии (отличных от X, Y, Z) пар указанных коник.

14. (a) *Кубика фокусов.*

Геометрическим местом фокусов коник, касающихся четырёх прямых AB, BA', $A'B'$, $B'A$ (иначе говоря, коник, «вписанных» в $ABA'B'$), является кубика $\mathscr{C} = \mathscr{C}(ABA'B')$, которую называют *кубикой фокусов* четырёхугольника $ABA'B'$ (или кубикой фокусов, порождённой парами A, A' и B, B'). Многие свойства кубик фокусов собраны в [3], [4]. Условие $F \in \mathscr{C}$ эквивалентно:

(i) равенству углов $\angle(FA, FB) = \angle(FB', FA')$;

(ii) существованию точки F', изогонально сопряжённой F относительно $ABA'B'$, т. е. относительно каждого из углов четырёхугольника $ABA'B'$ (в таком случае F и F' — фокусы одной и той же вписанной коники);

(iii) принадлежности одной окружности проекций F на прямые, содержащие стороны $ABA'B'$ (тогда на этой окружности лежат и проекции F' на те же прямые).

Известно, что $\mathscr{C} = \mathscr{C}(ABA'B')$ проходит через точки A, A', B, B', а также точки $P = AB \cap A'B'$ и $P' = AB' \cap A'B$ (последнее вытекает, например, из *теоремы об изогоналях*, согласно которой условия $\angle(FA, FB) = \angle(FB', FA')$ и $\angle(FA, FP) = \angle(FP', FA')$ эквивалентны). Согласно примеру 2 (б) есть элемент C порядка 2 такой, что $C = A - A' = B - B' = P - P'$.

Известно, что середины отрезков, соединяющих пары фокусов F и F', лежат на прямой Ньютона — Гаусса (проходящей через середины отрезков AA', BB' и PP'). Асимптота кубики $\mathscr{C}$ параллельна прямой Ньютона — Гаусса.

Далее, $\mathscr{C} = \mathscr{C}(AA'BB')$ — циркулярная кубика. Действительно, по лемме из примера 13 (а) круговые точки J_1 и J_2 изогонально сопряжены относительно треугольника, определяемого любой тройкой сторон четырёхсторонника $AA'BB'$. Значит, согласно примеру 6 кубика $\mathscr{C}$ проходит через точку Микеля M, причём $M = J + C$.

Можно показать, что любая пара фокусов F и F' связана равенством $F' = F + C$. (Это согласуется с примером 11, поскольку геометрически переход от F к F' может быть выполнен как композиция изоциркулярных преобразований: $F' = f_{AB,A'B'}(f_{AB',A'B}(F))$.) В частности, $J_2 = J_1 + C$, откуда

$$2J_1 = 2J_2 = J_1 + J_2 + C = -J + C = -M.$$

Геометрическая трактовка последнего равенства: касательные к $\mathscr{C}$, проведённые в J_1 и J_2, пересекаются в точке M. Можно показать, что и наоборот, если для некоторой циркулярной кубики касательные, проведённые к ней в круговых точках, пересекаются на ней, то эта кубика является кубикой фокусов (см., например, [3].)

(б) *«Транзит» пар фокусов.*

Оказывается, кубика $\mathscr{C} = \mathscr{C}(AA'BB')$ может быть задана любой парой фокусов F, F' и G, G': $\mathscr{C}(AA'BB') = \mathscr{C}(FF'GG')$, причём переход к парному фокусу на кубике $\mathscr{C}(FF'GG')$ по-прежнему задаётся как $X \mapsto X + C$, где C — тот же элемент порядка 2. У этой «транзитивности» $\mathscr{C}(AA'BB') = \mathscr{C}(FF'GG')$ имеется много следствий и содержательных частных случаев.

Например, если F, F' и G, G' — две пары фокусов коник, вписанных в $ABA'B'$, то, согласно примеру 6, четырёхсторонники $ABA'B'$ и $FGF'G'$ имеют одну и ту же точку Микеля.

Отметим, что эту конструкцию можно получить, стартовав с треугольника ABP', для которого F, F' и G, G' — две пары фокусов вписанных в ABP коник (т. е. изогонально сопряжённых точек). Тогда четвёртая общая касательная к этим коникам (помимо прямых AB, BP', $P'A$) пересекает прямые AB, BP', $P'A$ в точках P, A', B', так что кубика фокусов $\mathscr{C} = \mathscr{C}(FF'GG')$ порождается любыми двумя парами из набора (F, F'), (G, G'), $(FG \cap F'G', F'G \cap FG')$, (A, A'), (B, B'), (P, P').

Другой пример. Пусть $ABA'B'$ — четырёхугольник, «описанный» вокруг окружности с центром I, так что прямые AB, BA', $A'B'$, $B'A$ равноудалены от I. Иначе говоря, I совпадает со своей изогонально сопряжённой точкой. Тогда то же должно выполняться и для четырёхугольников вида $FF'GG'$, где F, F' и G, G' — пары фокусов вписанных в $ABA'B'$ коник. В частности, получается простое объяснение следующего известного утверждения.

Теорема Грейвса — Шаля. *Пусть* A, B, A', B', $P = AB \cap A'B'$, $P' = A'B \cap AB'$ — *вершины четырёхсторонника, «описанного» вокруг коники с фокусами* F *и* F'. *Тогда эквивалентны условия*:

(i) *четырёхсторонник* $ABA'B'$ — *«описанный»* (*вокруг окружности*);
(ii) A *и* A' *лежат на одной конике с фокусами* F *и* F';
(iii) B *и* B' *лежат на одной конике с фокусами* F *и* F';
(iv) P *и* P' *лежат на одной конике с фокусами* F *и* F'.

Доказательство. Заметим, что принадлежность пары A, A' (или B, B', или P, P') конике с фокусами F, F' эквивалентна «описанности» $AFA'F'$ (и то и другое условие переписывается в виде $AF + AF' = A'F + A'F'$ или $AF - AF' = \pm(A'F - A'F')$). Остаётся воспользоваться «транзитом»: если, скажем, четырёхсторонник $ABA'B'$ — «описанный» вокруг окружности с центром I, т. е. $I = I'$ для $ABA'B'$, то $I = I'$ и для $AFA'F'$ (или $BFB'F'$, или $PFP'F'$). □

(в) *Кубики фокусов как центральные изогональные.*

Покажем, что центральная изогональная кубика $\mathscr{C}(XYZ, J)$ является кубикой фокусов тогда и только тогда, когда её бесконечно удалённая точка J лежит на одной из высот треугольника XYZ, т. е. асимптота (или параллельная ей прямая Ньютона — Гаусса) перпендикулярна одной из сторон треугольника XYZ (см. также [3]).

Доказательство. Пусть кубика $\mathscr{C}(XYZ, J)$ является кубикой фокусов. Как мы видели, переход от фокуса к парному фокусу задаётся прибавлением фиксированного элемента порядка 2: $F' = F + C$ (в частности, для круговых точек имеем $J_2 = J_1 + C$).

Согласно примерам 2 (в) и 13 (а) тройка точек $\{X, Y, Z\}$ получается из J прибавлением трёх элементов порядка 2: $X = J + C_1$, $Y = J + C_2$, $Z = J + C_3$. Для определённости пусть $C = C_1$. Пусть I_0, I_1, I_2, I_3 — центры вписанной и вневписанных окружностей треугольника XYZ. Как мы знаем, $I_1 = I_0 + C$, $I_3 = I_2 + C$. Значит, наша кубика фокусов порождается парами (I_0, I_1) и (I_2, I_3). Тогда прямая Гаусса проходит через середины отрезков I_0I_1 и I_2I_3 и, как несложно заметить, перпендикулярна YZ (является серединным перпендикуляром к YZ).

Наоборот, пусть дана кубика $\mathscr{C}(XYZ, J)$, где J — бесконечно удалённая точка направления, перпендикулярного YZ. Тогда кубика фокусов, порождённая парами (I_0, I_1) и (I_2, I_3), имеет 10 общих точек с $\mathscr{C}(XYZ, J)$: I_0, I_1, I_2, I_3, $Y(= I_0I_2 \cap I_1I_3)$, $Z(= I_0I_3 \cap I_1I_2)$, X (точка Микеля), J, J_1, J_2, Следовательно, эта кубика фокусов совпадает с $\mathscr{C}(XYZ, J)$. □

(г) *Специальные четырёхугольники, порождающие кубику фокусов.*

Порождающие кубику фокусов $\mathscr{C}$ пары фокусов можно выбирать так, чтобы образованный ими четырёхугольник обладал какими-то хорошими свойствами. В предыдущем пункте (в) мы по сути задали кубику фокусов четырёхугольником с противоположными прямыми углами (это I_0YI_1Z в обозначениях пункта (в)).

Ниже увидим, что задающий кубику фокусов четырёхугольник можно выбрать вписанным с перпендикулярными диагоналями. Положим $E = AA' \cap BB'$. Легко видеть (из условия (i) или (iii) принадлежности точки кубике фокусов), что $E \in \mathscr{C}(AA'BB')$ тогда и только тогда, когда $AA' \perp BB'$. Несложный счёт углов показывает, что в случае вписанного $ABA'B'$ с перпендикулярными диагоналями AA' и BB' точка E изогонально сопряжена центру E' окружности $(ABAB')$.

Посмотрим на конструкцию из примера 8, и пусть в обозначениях этого примера переход к парному фокусу $F \to F'$ задаётся прибавлением элемента C_1: $F' = F + C_1$. Тогда вписанный в окружность с центром I_0 четырёхугольник $K_0K_2K_1K_3$ — искомый. Действительно, K_0, $K_1 = K_0 + C_1$ и K_2, $K_3 = K_2 + C_1$ — две пары фокусов, $K_0K_1 \cap K_2K_3 = I_1$, $K_0K_2 \cap K_1K_3 = I_2$, $K_0K_3 \cap K_2K_1 = I_3$, и поскольку

$$K_0K_1 \cap K_2K_3 = I_1 \in \mathscr{C}(K_0K_2K_1K_3),$$

имеем $K_0K_1 \perp K_2K_3$.

Наоборот, пусть $\mathscr{C} = \mathscr{C}(ABA'B')$ для вписанного четырёхугольника $ABA'B'$, в котором $E = AA' \cap BB' \in \mathscr{C}$. Как мы видели в примере 8, из вписанности $ABA'B'$ следует, что $P = AB \cap A'B'$ — это одна из точек I_i (для которых касательная к $\mathscr{C}$ параллельна асимптоте), скажем, $P = I_2$, тогда $P'=I_2+C_1=I_3$. Согласно примеру 2 (в), тогда $E\in\{P+C_2, P+C_3\}=$ $=\{I_3, I_0\}$, а E' — вторая точка из этой пары. При этом по фиксированным P, P', E четырёхугольник $ABA'B'$ определяется единственным образом (с точностью до переобозначения вершин).

Получается, что есть в точности четыре порождающих кубику вписанных четырёхугольника $ABA'B'$ с перпендикулярными диагоналями — по одному четырёхугольнику для каждой из четырёх возможностей $E'=I_i$, $i\in\{0,1,2,3\}$). Однако (в согласии с обсуждением в примере 8) один из этих четырёхугольников будет мнимым (случай окружности мнимого радиуса), а ещё два — самопересекающимися (когда точка пересечения «диагоналей» $E=AA'\cap BB'$ лежит вне окружности $(ABA'B')$).

§ 4. Кубики в задачах элементарной геометрии

Большинство задач, которые здесь обсуждаются, имеют чисто геометрическое решение, и в некоторых случаях мы даём на этот счёт комментарий. Однако иногда рассуждения в терминах кубик кажутся наиболее естественными. Это можно отнести, например, к задачам 17, 19, 20, элементарные решения которых весьма сложны. В большинстве случаев трактовка с помощью кубик обнаруживалась гораздо позже появления формулировки задачи.

15. На прямых AB, BC, CA выбраны точки C', A', B'. Окружности $(AB'C')$, $(A'BC')$, $(A'B'C)$ пересекаются в точке T. Тогда AA', BB', CC' конкурентны $\Leftrightarrow$ окружности $(AA'T)$, $(BB'T)$, $(CC'T)$ соосны (т. е. имеют, помимо T, ещё одну общую точку либо касаются в точке T).

(*П. Пучков, Е. Сапожников,*
XVII Южный математический турнир)

Решение. Проведём (циркулярную) невырожденную кубику $\mathscr{C}$ через 9 точек: $A, B, C, A', B', C', J_1, J_2$ и точку $X=AA'\cap BB'$. Как мы видели выше (см. пример 10), кубика, проходящая через A, B, C, A', B', C', J_1, J_2, обязательно проходит через T. Тогда $A+A'=B+B'=-X$, поэтому окружности $(AA'T)$ и $(BB'T)$ ещё раз пересекают $\mathscr{C}$ в одной точке Y такой, что $A+A'+Y+T=J$.

Условие конкурентности AA', BB', CC' записывается как

$$X+C+C'=O \quad \text{или} \quad A+A'=C+C'.$$

Условие соосности окружностей $(AA'T)$, $(BB'T)$, $(CC'T)$ эквивалентно тому, что Y принадлежит окружности $(CC'T)$. Это записывается как $C+C'+T+Y=J$, или, эквивалентно, $A+A'=C+C'$. □

Отметим, что есть короткое геометрическое решение, использующее инверсию с центром T.

16. В шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ никакие четыре вершины не лежат на одной окружности, а диагонали A_1A_4, A_2A_5 и A_3A_6 пересекаются в одной точке X. Обозначим через l_i радикальную ось окружностей $(A_iA_{i+1}A_{i-2})$ и $(A_iA_{i-1}A_{i+2})$ (мы указываем индексы по модулю 6). Докажите, что прямые $l_1, \ldots, l_6$ пересекаются в одной точке. (*И. Фролов, финальный тур олимпиады им. Шарыгина* 2019 *г.*)

Решение (Р. Кузнецов). Проведём (циркулярную) кубику $\mathscr{C}$ через точки $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, X, J_1, J_2$. Имеем $A_1 + A_4 + X = A_2 + A_5 + X = A_3 + A_6 + X = O$.

Как мы уже знаем из примера 9 выше, вторая точка B_i пересечения окружностей $(A_iA_{i+1}A_{i-2})$ и $(A_iA_{i-1}A_{i+2})$ лежит на $\mathscr{C}$ и такова, что $A_i + A_{i+1} + A_{i-2} + B_i = J$ или $A_i - X + B_i = J$.

Тогда $A_i + B_i = X + J$ не зависит от i, т. е. прямые A_iB_i (это и есть нужные нам радикальные оси) проходят через одну и ту же точку Z на кубике $\mathscr{C}$. □

В дополнение заметим, что прямая XZ параллельна асимптоте $\mathscr{C}$ — это вытекает из равенства $Z + X + J = O$.

Интересен частный случай этой задачи, когда $A_1 = A$, $A_3 = B$, $A_5 = C$ — вершины произвольного треугольника ABC, а точки $A_4 = A'$, $A_6 = B'$, $A_2 = C'$ симметричны вершинам A, B, C относительно BC, CA, AB соответственно. Тогда кубика $\mathscr{C}$ из решения — это кубика Нейберга треугольника ABC, она же — центральная изогональная кубика $\mathscr{C}(ABC, J)$, где J — бесконечно удалённая точка прямой Эйлера. Тогда Z — третья (помимо H и J) точка пересечения прямой Эйлера кубикой, т. е. в этом случае $Z = O$ — центр описанной окружности треугольника ABC.

17. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи AD и BC — в точке Q. Точки E и F внутри четырёхугольника $ABCD$ таковы, что окружности (ABE), (CDE), (BCF), (ADF) пересекаются в одной точке K. Докажите, что окружности (PKF) и (QKE) вторично пересекаются на прямой PQ. (*П. Кожевников, отбор на IMO*-2020)

Решение (Д. Демин). Так же, как в доказательстве теоремы Клиффорда (см. пример 11), рассмотрим (циркулярную) невырожденную кубику, проходящую через 9 точек $A, B, C, D, P, Q, J_1, J_2, K$. Так как $A + B = C + D = -P$, окружности (ABK) и (CDK) пересекают кубику в одной и той же точке $E = -(A+B) - K + J$. Аналогично F лежит на кубике и $F = -(A+D) - K + J$. Прямая PQ пересекает кубику повторно в точке $-P-Q$. Эта точка лежит на окружности (QKE), так как $(-P-Q)+Q+K+E-J = -P-(A+B) = O$.

Аналогично эта точка лежит на окружности (PKF). □

Отметим, что «переброска вписанных углов» позволяет переформулировать данную задачу в разных формах, например, в данной конструкции можно показать, что $\angle AFQ - \angle CEP = \angle ABC$.

18. (а) Внутри данного выпуклого четырёхугольника, отличного от параллелограмма, выбираются пары точек X, Y такие, что $\angle AXB = \angle AYB = \angle CXD = \angle CYD$. Докажите, что прямые XY проходят через фиксированную точку T.
(См.: *Берлов С.*, «Квант», № 1, 2018 г., с. 20, задача М2497.)
(б) При этом прямая, соединяющая точку T с точкой $AB \cap CD$, параллельна прямой, соединяющей середины отрезков AD и BC.

Решение. (а) Точки X и Y принадлежат *кубике фокусов* четырёхугольника $ABDC$, т. е. геометрическому месту точек X, для которых $\angle(XA, XB) = \angle(XC, XD)$. Нам про эту кубику ещё нужно знать, что она циркулярная, а также, что вершины A, B, D, C лежат на ней. Тогда из того, что X и Y лежат на одной окружности с точками A и B, следует, что $X+Y+A+B = J$, значит, $X+Y = \text{const}$, и согласно примеру 1 прямые XY пересекают кубику в одной и той же точке T.

(б) Точка $P = AB \cap CD$ тоже принадлежит кубике фокусов, поэтому $P+T = -(A+B)-(X+Y) = -J$. Значит, прямая PT пересекает (в третий раз) кубику фокусов в точке J, т. е. параллельна асимптоте, которая, как известно, параллельна прямой Ньютона — Гаусса. □

Элементарное решение задачи (а) можно найти в журнале «Квант», № 4, 2018 г., с. 13–15.

19. Пусть ABC — данный треугольник. Рассматриваются такие точки P, у которых педальный треугольник $P_aP_bP_c$ перспективен треугольнику ABC с некоторым перспектором S. Докажите, что всевозможные прямые PS проходят через фиксированную точку.
(*А. Заславский*)

Решение. Известно, что множество точек P, удовлетворяющих условию, — кубика Дарбу, она же центральная изогональная кубика $\mathscr{C}(ABC, T)$, где T — точка, симметричная ортоцентру H относительно центра O описанной окружности. Тогда прямые PP', где P' изогонально сопряжена P, проходят через T.

Но P, P' и S лежат на одной прямой согласно теореме Сонда для перспективных и ортологичных треугольников ABC и $P_aP_bP_c$ (где P и P' — два центра ортологии этих треугольников). □

20. Внутри треугольника XYZ взяты точка D и её изогонально сопряжённая точка D'. На лучах XD и XD' взяты соответственно точки A' и A такие, что $XD \cdot XA = XD' \cdot XA' = XY \cdot XZ$. Аналогично на лучах YD и YD' определим точки B' и B, а на лучах ZD и ZD' — точки C' и C.

    Пусть P_X — точка пересечения AD и BC, P_Y — точка пересечения AC и BD, P_Z — точка пересечения AB и CD. Точки Q_X, Q_Y, Q_Z определяются аналогично по точкам A', B', C', D'. Докажите, что

    (а) прямые P_XQ_X, P_YQ_Y, P_ZQ_Z пересекаются в одной точке;

    (б) эта точка лежит на окружности (XYZ),

    (в) прямые P_XQ_Y, P_YQ_X и XY пересекаются в одной точке Z';

    (г) при этом прямая ZZ' параллельна прямым AA', BB', CC', DD'.

(*А. Заславский, из проектов* 22-*й и* 32-*й ЛКТГ*)

Решение (А. Заславский). Из построения следует, что A, B, C, D и A', B', C', D' — два изогонально сопряжённых квартета для центральной изогональной кубики $\mathscr{C} = \mathscr{C}(XYZ, J)$ из примера 13 (б), где J — бесконечно удалённая точка прямой DD'.

(а) Согласно примеру 2 (в) точка $P_X = AD \cap BC$ лежит на $\mathscr{C}$ (так как $A + D = 2D + C_1 = 2D + C_2 + C_3 = B + C$). Аналогично с точками P_Y, P_Z, Q_X, Q_Y, Q_Z.

Из равенств $A + D + P_X = A' + D' + Q_X = O$ получаем

$$P_X + Q_X + (A + A' + D + D') = O.$$

Поскольку $A + A' = D + D' = -J$, имеем $P_X + Q_X - 2J = O$, т. е. прямая P_XQ_X пересекает кубику (в третий раз) в точке $T = -2J$. Прямые P_YQ_Y и P_ZQ_Z пересекают кубику в той же точке (не зависящей от выбора квартета).

(б) Следует из равенства

$$X + Y + Z + T = (J + C_1) + (J + C_2) + (J + C_3) - 2J = J.$$

Другое объяснение можно получить из равенства $T + J + J = O$, означающего, что точка T изогонально сопряжена точке J.

(в) Запишем (пользуясь коллинеарностью точек X, A, D' и Y, D, B'):

$$P_X + Q_Y = -(A + D) - (B' + D') = -(A + D') - (D + B') = X + Y.$$

Полученное равенство $P_X + Q_Y = X + Y$ означает, что прямые P_XQ_Y и XY пересекаются в одной точке Z' на кубике. В той же точке кубику пересекает и P_YQ_X.

(г) Достаточно показать, что $Z + Z' + J = O$. Действительно,

$$Z + Z' + J = Z - (X + Y) + J = J + C_3 - (J + C_1 + J + C_2) + J = O.$$

(Это согласуется с тем, что Z' изогонально сопряжена Z как точка, лежащая на прямой XY.) □

Заметим, что эта задача предлагалась в проекте ЛКТГ 2010 года и оказалась единственной задачей проекта, не решённой ни одним из участников.

Приведём без решения ещё одну весьма трудную задачу.

21. В треугольнике ABC проведены чевианы AA_1, BB_1, CC_1, пересекающиеся в точке X. Окружности (BB_1A_1) и (CC_1A_1) вторично пересекаются в точке A_2, аналогично определены точки B_2 и C_2.
    (а) Докажите, что окружности (BCA_2), (CAB_2), (ABC_2) пересекаются в одной точке.
    (б) Окружности (XAA_2), (XBB_2), (XCC_2) пересекаются в той же точке.
    (в) Прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.
    (*А. Шевцов*)

Решение этой задачи с помощью кубик предложил М. Туревский (в vk-сообществе «Олимпиадная геометрия»). Читатель может попробовать найти своё решение.

Завершим следующей несложной задачей.

22. Пусть дана окружность ω и не пересекающая её прямая l. Пусть на l зафиксирована точка A, а на ω — точка B. Через A и B проводим произвольную окружность, вторично пересекающую l и ω в точках X и Y. Докажите, что всевозможные прямые XY проходят через фиксированную точку.

Эту задачу можно решить элементарно — показать (с использованием антипараллелей или вписанных углов), что прямая XY проходит через точку $Z \in \omega$ такую, что $CZ \parallel l$, где C — вторая точка пересечения AB и ω.

Помимо элементарного рассуждения, напрашивается следующее «решение», в духе предыдущих примеров. На кубике $\omega \cup l$ имеем $A + B + X + Y = J$, поэтому $X + Y = \mathrm{const}$, т. е. все прямые XY проходят через фиксированную точку на этой кубике.

Как отметил М. Туревский, можно корректно ввести операцию сложения точек на $\omega \cup l$ (объединении окружности и прямой), что позволяет такого сорта «решения» сделать абсолютно строгими. Это интересная и заслуживающая отдельного разговора идея. Заметим лишь, что в случае сложения точек на $\omega \cup l$ удобно взять в качестве O бесконечно удалённую точку l (так что $O = J$), а проверка ассоциативности сложения сводится к применению антипараллелей и теоремы Паскаля. Тем самым, язык сложения точек на $\omega \cup l$ по сути является краткой записью применения антипараллелей и теоремы Паскаля.

Список литературы

[1] https://bernard-gibert.pagesperso-orange.fr/ctc.html.

[2] https://www.turgor.ru/lktg/2010/1/index.htm. Об изогональном сопряжении, точках Микеля, прямых Гаусса и др.

[3] https://www.turgor.ru/lktg/2020/2/index.html. Кубики фокусов и циркулярные кубики

[4] *Акопян А. В., Заславский А. А.* Разные взгляды на изогональное сопряжение // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 11. М.: МЦНМО, 2007. С. 61–78.

[5] *Соловьев Ю. П.* Арифметика эллиптических кривых // Квант. 1987. № 7. С. 2–7.

[6] *Уокер Р.* Алгебраические кривые. М.: ИЛ, 1952.

Алексей Александрович Заславский, ЦЭМИ РАН, МЭИ

alzasl@yandex.ru

Павел Александрович Кожевников, МФТИ

p.kozhevn@gmail.com