Алгебра на службе геометрии

М. А. Горелов

Часто считается особым шиком решить геометрическую задачу чисто геометрическим методом. Ниже рассказывается о нескольких случаях, когда отказ от этого принципа позволяет найти весьма эффектное решение.

Школьные курсы алгебры и геометрии связаны слабее, чем хотелось бы. В статье показано, что совсем простые факты школьной алгебры позволяют достаточно просто доказывать сложные геометрические теоремы.

У многих школьников есть устойчивое представление о том, что алгебра — это искусство проводить длинные преобразования сложных формул. Из приведённых доказательств видно, что это далеко не так. Формул в статье могло бы быть ещё меньше, но я побоялся совсем далеко отходить от принятого «академического» стиля изложения. «У доски» можно их количество существенно сократить. По этой причине в статье довольно много рисунков. Они могут служить адекватной заменой формул.

§ 1. Теорема Эйлера

Рассмотрим треугольник ABC и точку X в его плоскости. Пусть S — площадь, R — радиус описанной окружности треугольника ABC, x — расстояние от центра O этой окружности до точки X. Далее, пусть A_X, B_X, C_X — проекции точки X на прямые BC, AC, AB соответственно, а S_X — площадь треугольника $A_XB_XC_X$ (рис. 1).

Нас будет интересовать следующее утверждение.

Теорема 1. *Справедливо равенство* $S_X = S\dfrac{R^2-x^2}{4R^2}$.

В данном случае удобно пользоваться ориентированными площадями, поэтому они могут быть отрицательными.

В [6] это утверждение приводится со ссылкой на Леонарда Эйлера. После доказательства этого результата (см. решение задачи 506) там

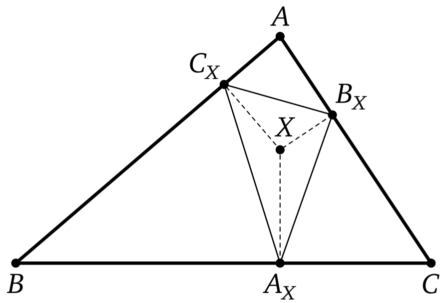

Рис. 1

приводится замечание о том, что из этой теоремы следует теорема Симсона (см. теорему 2 ниже). Если обратить это утверждение, то получится замечательно простое

Доказательство теоремы Эйлера. Зафиксируем прямую l, проходящую через точку O. Не ограничивая общности, можно считать, что точка X лежит на этой прямой, а x — длина ориентированного отрезка OX.

Начнём с совсем простых замечаний.

Длина отрезка A_XX линейно зависит от x (здесь опять удобно рассматривать направленные отрезки). Это следует, например, из подобия треугольников XL_AA_X и OL_AA_O, где A_O — проекция точки O на прямую BC, а L_A — точка пересечения этой прямой с прямой l (рис. 2). То же относится, разумеется, и к длинам отрезков B_XX и C_XX.

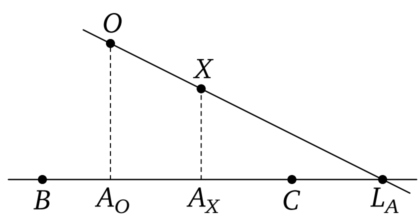

Рис. 2

Площадь треугольника $A_XB_XC_X$ равна сумме площадей треугольников XA_XB_X, XB_XC_X и XC_XA_X (рис. 1).

Площади треугольников XA_XB_X, XB_XC_X и XC_XA_X — квадратичные функции от x. Например, площадь треугольника XA_XB_X равна

$$\frac{1}{2}A_XX \cdot B_XX \sin\gamma,$$

где γ — величина угла C треугольника ABC.

Следовательно, площадь S_X квадратично зависит от x.

По теореме Симсона, если $x=\pm R$, то точки A_X, B_X, C_X лежат на одной прямой, т. е. $S_X=0$. Но тогда в общем случае $S_X=\mu(x-R)(x+R)$, где μ — некоторая константа.

Если точка X совпадает с точкой O, то $x=0$, а соответствующие проекции A_O, B_O, C_O — середины сторон треугольника ABC. Значит, площадь треугольника $A_OB_OC_O$ равна $\frac{1}{4}S$. Тогда $\frac{1}{4}S=-\mu R^2$. Отсюда находим константу μ, что и завершает доказательство теоремы. □

Ближайшее следствие[1] доказанного результата получается, если точка X совпадает с центром I вписанной окружности. В этом случае длины отрезков A_II, B_II, C_II равны радиусу r вписанной окружности, площадь треугольника $A_IB_IC_I$ равна

$$S_I=\frac{1}{2}r^2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=\frac{1}{2}r^2\cdot\frac{a+b+c}{2R}=\frac{Sr}{2R}$$

(как обычно, a, b, c — стороны треугольника ABC, α, β, γ — противолежащие им углы).

Отсюда находим, что квадрат расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей равен R^2-2Rr.

Упражнение 1 [6, задача 43]. Пусть ABC — правильный треугольник со стороной a, M — некоторая точка плоскости, находящаяся на расстоянии d от центра треугольника ABC. Докажите, что площадь треугольника, стороны которого равны отрезкам MA, MB и MC, выражается формулой

$$S=\frac{\sqrt{3}}{12}|a^2-3d^2|.$$

Указание. Вместо теоремы Симсона можно воспользоваться результатом упражнения 2.

§ 2. Теорема Симсона

Есть мнение, что «прямую Симсона следует прежде всего рассматривать как красивый пример геометрического рассуждения» [5]. В § 1 показано, что этот результат может быть использован при доказательстве вполне содержательных теорем. Но и сам он может быть доказан преимущественно алгебраическими методами.

Сделаем сначала небольшое теоретическое отступление, напомнив некоторые факты, которые понадобятся в дальнейшем, но полезны и во многих других случаях (подробности см., например, в [3]).

[1] Далеко не единственное.

Тригонометрическим полиномом называют функцию вида

$$P(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Если числа a_n и b_n не равны нулю одновременно, то говорят, что полином имеет степень n.

Непосредственно из определения следует, что сумма двух тригонометрических полиномов $P(t)$ и $Q(t)$ снова будет тригонометрическим полиномом. При этом, если степени полиномов $P(t)$ и $Q(t)$ равны n, то степень полинома $P(t) + Q(t)$ не превосходит n (но может быть и строго меньше).

Из формул для синуса и косинуса суммы двух углов следует, что если α — константа, то $\sin(t+\alpha)$ и $\cos(t+\alpha)$ — тригонометрические полиномы первой степени.

Если использовать те же формулы «в обратную сторону», то нетрудно заметить, что если $P(t)$ — тригонометрический полином первой степени, то на интервале $[0, 2\pi)$ уравнение $P(t) = 0$ имеет не более двух корней. В самом деле, любой такой полином можно записать в виде $a_0 + c\cos(t+\alpha)$, а тогда всё очевидно.

Это утверждение обобщается следующим образом. Если $P(t)$ — тригонометрический полином степени n, то на интервале $[0, 2\pi)$ уравнение $P(t) = 0$ имеет не более $2n$ корней.

Доказательство начнём с такого замечания. Из формул для синуса и косинуса суммы двух углов следует, что если $P(t)$ — тригонометрический полином степени n, то и $P(t+\alpha)$ будет тригонометрическим полиномом степени n. Очевидно также, что числа корней уравнений $P(t) = 0$ и $P(t+\alpha) = 0$ одинаковы.

Из этого замечания следует, что можно, не ограничивая общности, считать, что число π не является корнем уравнения $P(t) = 0$.

Из формул для синусов и косинусов кратных углов следует, что уравнение $P(t) = 0$ может быть записано в виде $Q(\cos t, \sin t)$, где $Q(x, y)$ — алгебраический многочлен степени n от двух переменных.

Введём новую переменную $\tau = \operatorname{tg}(t/2)$. Если π не является корнем уравнения $Q(\cos t, \sin t) = 0$, то количество корней этого уравнения на интервале $[0, 2\pi)$ равно числу корней алгебраического уравнения

$$Q\left(\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}, \frac{2\tau}{1+\tau^2}\right) = 0.$$

Умножив последнее уравнение на $(1+\tau^2)^n$, приведём его к виду $R(\tau) = 0$, где $R(\tau)$ — многочлен степени $2n$. Поэтому уравнение $R(\tau) = 0$ имеет не более $2n$ корней.

Вернёмся к нашей основной теме. В предыдущем разделе использовано следующее утверждение.

Теорема 2. *Если точка X лежит на описанной окружности треугольника ABC, то точки A_X, B_X, C_X принадлежат одной прямой.*

Доказательство. Положение точки X на описанной окружности можно задавать, например, длиной t дуги AX.

Тогда расстояние от точки X до любой фиксированной прямой будет задаваться тригонометрическим полиномом первой степени: $h = h_0 + R\sin(t - t_0)$ (рис. 3).

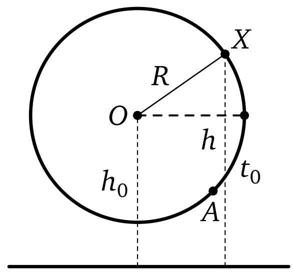

Рис. 3

Но тогда площадь треугольника $A_XB_XC_X$ задаётся тригонометрическим полиномом второй степени.

Достаточно доказать, что этот полином тождественно равен нулю. А для этого можно доказать, что он имеет пять различных корней. Мы найдём даже шесть.

Если точка X совпадает с одной из точек A, B или C, то две из трёх точек A_X, B_X, C_X совпадают и $S_X = 0$.

Если X — вторая точка пересечения прямой AO с описанной окружностью, то B_X и C_X совпадают с точками C и B, а точка A_X лежит на прямой BC (рис. 4). Значит, $S_X = 0$. Аналогично находятся ещё две точки.

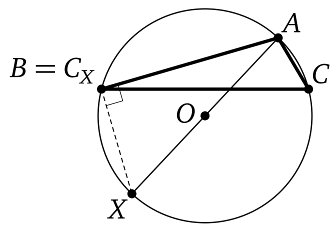

Рис. 4

Теорема почти доказана. Эти рассуждения не проходят только для прямоугольных треугольников: в этом случае среди шести найденных точек будет две пары совпадающих, а четырёх разных точек для наших целей недостаточно. Этот пробел в доказательстве вполне можно заполнить, используя соображения непрерывности.

Зафиксируем положения точек A, B и X и рассмотрим зависимость площади S_X от длины t_C дуги AC.

Расстояние

$$XB_X = CX\sin\frac{t}{2} = 2R\sin\frac{t_C - t}{2}\sin\frac{t}{2}$$

непрерывно зависит от t_C. Аналогично и расстояние XA_X непрерывно зависит от t_C (рис. 5). А расстояние XC_X вовсе постоянно. Значит, площадь S_X зависит от t_C непрерывно.

Не ограничивая общности, можно считать, что точка O не лежит на стороне AB. Как уже доказано, $S_X = 0$ для всех положений точки C

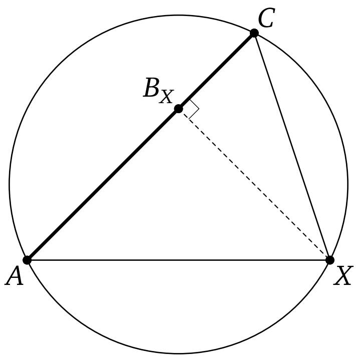

Рис. 5

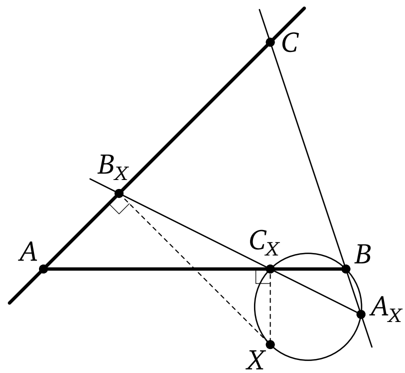

Рис. 6

кроме двух, диаметрально противоположных точкам A и B. По непрерывности она равна нулю и для этих положений.

Теорема доказана полностью. □

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 3. *Если точки A_X, B_X, C_X коллинеарны, то точка X лежит на описанной окружности треугольника ABC.*

Доказательство. Как уже отмечалось выше, это утверждение может быть выведено из теоремы 1, а она в свою очередь следует из теоремы 2. Но можно предложить доказательство, которое более коротким путём сводит теорему 3 к теореме 2.

Удобно переформулировать утверждение теоремы так: Если точки A_X, B_X, C_X коллинеарны, то точка C лежит на описанной окружности треугольника ABX.

Рассмотрим «однопараметрическое» семейство задач. Будем считать, что точки A, B и X, а также проходящая через A прямая l, на которой лежит вершина C, фиксированы (рис. 6).

Тогда единственным образом определены точки B_X и C_X. Точка A_X должна лежать на окружности ω, построенной на отрезке XB как на диаметре. Значит, из условия теоремы следует, что A_X — единственная отличная от C_X точка пересечения прямой B_XC_X с окружностью ω. Но тогда и точка C определяется однозначно как точка пересечения прямых BA_X и l.

Таким образом, в рассматриваемом семействе существует не более одного треугольника, удовлетворяющего условию теоремы 3. Но по теореме 2 этому условию удовлетворяет треугольник, вписанный в описанную окружность треугольника ABX.

Теорема 3 доказана. □

В определённом смысле доказательства теорем 1, 2 и 3 очень похожи. Во всех трёх доказательствах используется тот факт, что некая вспомогательная задача имеет мало решений (в случае теоремы 3 — одно). Только при доказательстве теорем 1 и 2 такие факты получались из алгебраических соображений, а при доказательстве теоремы 3 аналогичный факт устанавливался с помощью техники построения циркулем и линейкой. У меня есть подозрение, что такой приём тоже может быть использован при решении разных задач. Но это уже выходит за рамки данной статьи.

В данном случае «перевести» доказательство с языка геометрических построений на язык алгебры не сложно. Но, видимо, после этого оно не станет проще.

Упражнение 2 (Московская математическая олимпиада, 1940 г.). Точки A, B, C — вершины вписанного в окружность равностороннего треугольника. Точка D лежит на меньшей дуге AB. Докажите, что $DC = AD + BD$.

Упражнение 3. Пусть точка X движется по окружности ω, не концентрической с описанной окружностью треугольника ABC. Докажите, что тогда площадь S_X треугольника $A_XB_XC_X$ пропорциональна расстоянию от точки X до радикальной оси окружности ω и описанной окружности треугольника ABC.

Упражнение 4 (Папп). Докажите, что произведение расстояний от какой-нибудь точки на окружности до двух противоположных сторон вписанного в эту окружность четырёхугольника равно произведению расстояний от той же точки до двух других сторон этого четырёхугольника.

§ 3. Ещё одна формула

Из теоремы 1 можно получить ещё одно важное следствие.

Пусть u, v, w, d — расстояния от точки X до точек A, B, C, O соответственно, а a, b, c — как обычно, длины сторон треугольника ABC.

Выразим стороны треугольника $A_XB_XC_X$ через эти параметры.

Дважды применяя теорему синусов, получим $B_XC_X = u\sin\alpha = u\dfrac{a}{2R}$ (рис. 7).

Аналогично находятся две другие стороны.

Если теперь воспользоваться формулой Герона для треугольника $A_XB_XC_X$ и теоремой 1, то получим следующую формулу:

$$16S^2(d^2-R^2)^2=2(a^2u^2b^2v^2+a^2u^2c^2w^2+b^2v^2c^2w^2)-(a^4u^4+b^4v^4+c^4w^4),$$

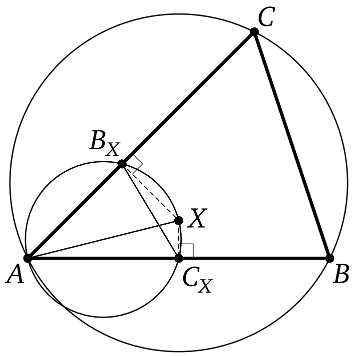

Рис. 7

связывающую расстояние от точки X до центра описанной около треугольника окружности с расстояниями от этой точки до его вершин.

О многочисленных следствиях этой формулы рассказано в [1]. Среди этих приложений теорема Птолемея и её обобщение — теорема Пурсера, теорема Фейербаха, теорема Понселе для случаев треугольников и четырёхугольников и многое другое.

§ 4. Японская теорема

Разумеется, область применимости рассматриваемых идей не ограничивается доказанными теоремами. Вот ещё один пример.

Теорема 4. *Если четырёхугольник $ABCD$ вписанный, то сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABD и BCD, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABC и ACD* (рис. 8 *а* и 8 *б*).

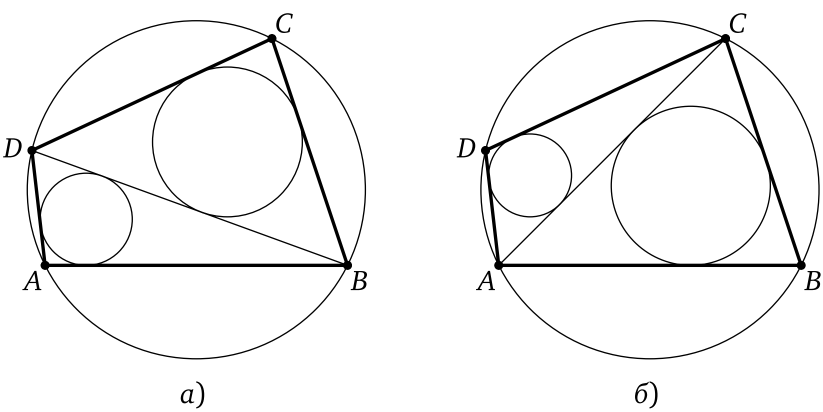

Рис. 8

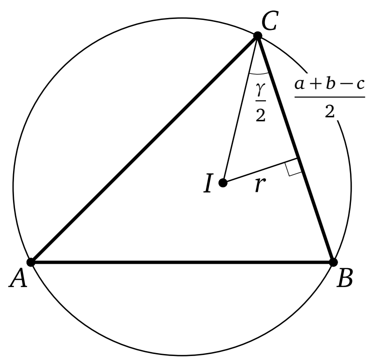

Рис. 9

Доказательство. Начнём с небольшой заготовки. Рассмотрим треугольник ABC, вписанный в данную окружность. Пусть вершины A и B фиксированы, а вершина C движется по одной из дуг с концами A и B. Выясним характер зависимости радиуса вписанной в треугольник ABC окружности от положения точки C.

Будем характеризовать положение точки C на дуге AB величиной t угла CAB (рис. 9). По теореме синусов длина a стороны BC выражается тригонометрическим полиномом первой степени от переменной t. По тем же причинам длина b стороны AC — тригонометрический полином первой степени. А длина c стороны AB постоянна. Если умножить величину $(a+b-c)/2$ на постоянную величину $\operatorname{tg}(\gamma/2)$ (где γ — величина угла ACB), то получится радиус r вписанной в треугольник ABC окружности. Значит, r — тригонометрический полином первой степени от переменной t.

Теперь можно вернуться к доказательству теоремы.

Начнём с частного случая. Пусть диагонали AC и BD четырёхугольника проходят через центр O описанной около него окружности. Тогда четырёхугольник является прямоугольником, все треугольники ABC, DCD, CDA и DAB равны и утверждение теоремы очевидно (рис. 10 *а* и 10 *б*).

Теперь рассмотрим случай, когда диагональ AC проходит через точку O (рис. 11). Фиксируем вершины A, B и C и будем характеризовать положение вершины D на дуге AC, не содержащей точку B, величиной t угла DAC. Как установлено выше, радиусы r_A, r_B и r_C окружностей, вписанных в треугольники BCD, CDA и DAB соответственно, описываются тригонометрическими полиномами первой степени от переменной t. А радиус r_D окружности, вписанной в треугольник ABC, постоянен. Следовательно, $\varphi(t) = r_A + r_C - r_B - r_D$ — тригонометриче-

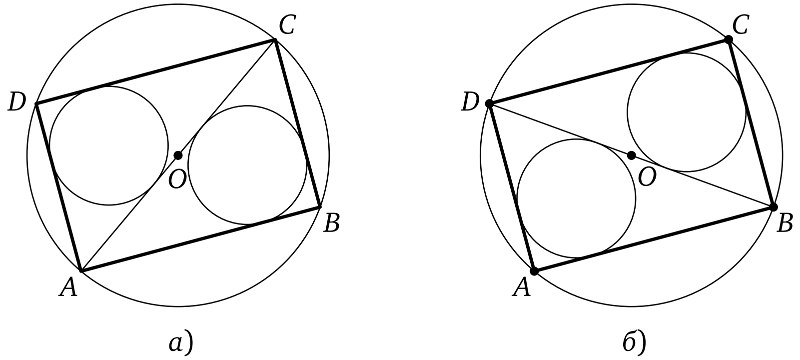

Рис. 10

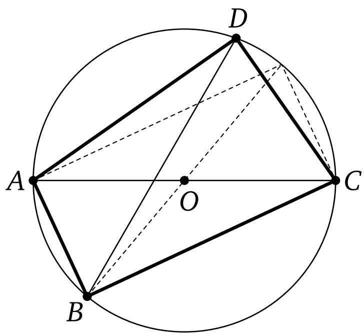

Рис. 11

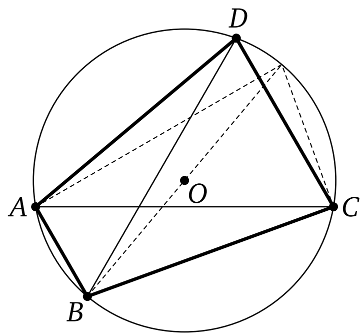

Рис. 12

ский полином первой степени. Нужно доказать, что он тождественно равен нулю. Очевидно, $\varphi(0) = 0$: в этом случае точка D совпадает с точкой C и потому $r_D = r_C$, а $r_A = r_B = 0$. По аналогичной причине $\varphi(t)$ обращается в нуль, когда точка D совпадает с точкой A. А третий корень соответствует случаю, когда диагональ BD проходит через центр O. Поскольку полином $\varphi(t)$ имеет три корня, он тождественно равен нулю.

Общий случай рассматривается аналогично, только нужно аккуратно выбрать обозначения. Пусть вершины четырёхугольника обозначены так, что точки B и O расположены по разные стороны от прямой AC (рис. 12). Используем обозначения предыдущего абзаца. Тогда два корня полинома $\varphi(t)$ соответствуют случаям, когда вершина D совпадает с вершинами A или C. А третий корень соответствует случаю, когда диагональ BD проходит через точку O (такая точка D найдётся, если вершины обозначены так, как сказано выше). Полином первой степени имеет три корня, значит, он тождественно равен нулю.

Теорема доказана. $\square$

Упражнение 5 (Л. Карно). Пусть задан треугольник ABC, R и r — радиусы его описанной и вписанной окружностей, d_a, d_b, d_c — расстояния от центра O описанной окружности до сторон $a = BC$, $b = AC$ и $c = AB$ соответственно. Докажите, что если треугольник остроугольный, то

$$d_a + d_b + d_c = R + r,$$

а если угол C треугольника тупой, то имеет место равенство

$$d_a + d_b - d_c = R + r.$$

§ 5. Заключение

Читатель может сравнить сложность приведённых доказательств со сложностью традиционных [2, 6]. Разумеется, сложность — понятие субъективное. Например, в моём возрасте уже утомительно считать многочисленные вписанные углы.

Во всяком случае, не вызывает сомнения, что приведённые доказательства не лежат в «выпуклой оболочке» традиционных [7]. Уже этим они представляют интерес.

Понятно, что такие доказательства сложно «встроить» в систематический курс геометрии, особенно если планировать его отдельно от курса алгебры. Но как-то привести их в качестве демонстрации тезиса о единстве математики, вероятно, стоит.

Подобными методами, но сложнее, в книге [4] доказываются теоремы Паппа и Паскаля.

И ещё одно, надеюсь, преходящее замечание. Опыт показывает, что современные школьники неважно владеют понятием функции. Именно поэтому приведённые доказательства могут быть для них сложными. Но по той же причине на них стоит обратить внимание.

Список литературы

[1] *Горелов М. А.* Формула и содержание // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 26. М.: МЦНМО, 2020. С. 83–110.

[2] *Ефремов Д. Д.* Новая геометрия треугольника. М.: Ленанд, 2015.

[3] *Полиа Г., Сегё Г.* Задачи и теоремы из анализа. Т. II. М.: Наука, 1978.

[4] *Прасолов В. В., Соловьев Ю. П.* Эллиптические функции. М.: Факториал, 1997.

[5] *Шарыгин Г. И.* Лекции по элементарной геометрии. М.: МЦНМО, 2014.

[6] *Шарыгин И. Ф.* Геометрия. 9–11 кл. От учебной задачи к творческой. М.: Дрофа, 1997.

[7] *Conway J. H., Shipman J.* Extreme Proofs I: The Irrationality of $\sqrt{2}$ // Math Intelligencer. 2013. Vol. 35, № 3. P. 2–7.

Михаил Александрович Горелов, ФИЦ ИУ РАН
griefer62@gmail.com