Линейные семейства треугольников и ортологичность

Е. В. Бакаев, П. А. Кожевников

Два треугольника называются *ортологичными*, если перпендикуляры, проведённые через вершины одного из них к сторонам другого, пересекаются в одной точке (рис. 1). В этой статье мы посмотрим на отношение ортологичности с разных точек зрения. В основном изложение будет в рамках элементарной геометрии на обычной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, а в последнем разделе свяжем рассматриваемые понятия с геометрией в $\mathbb{R}^4$. Будет многократно использоваться следующая идея. Два ортологичных треугольника порождают однопараметрическое (линейное) семейство, и любые два треугольника из этого семейства ортологичны. Работа с таким семейством может дать естественный подход к решению некоторых вопросов.

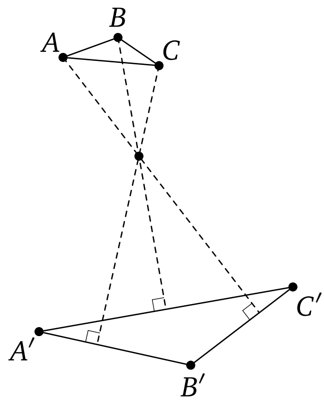

Рис. 1. Треугольники ABC и $A'B'C'$ ортологичны

§ 1. Линейные семейства треугольников и классов гомотетов

Начнём с рассмотрений, связанных с линейным движением.

1.1. Одна точка

Пусть точка A движется по плоскости *линейно*, т. е. прямолинейно и с постоянной скоростью. Формально это движение задаётся отображением $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, так что точка $A_t = A(t)$ определяется радиус-вектором $\overrightarrow{OA_t} = \overrightarrow{OA_0} + t \cdot \vec{v}_a$, где O — начало отсчёта, а $\vec{v}_a$ — *вектор скорости*. При $\vec{v}_a \neq \vec{0}$ *траекторией* $\{A_t\}$ точки A является некоторая прямая a

с направляющим вектором $\vec{v}_a$, а *графиком* линейного движения точки будет являться прямая $\{(t, A_t)\}$ в $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

1.2. Пара точек

Рассмотрим пару точек A, B, каждая из которых движется линейно, соответственно со скоростями $\vec{v}_a$ и $\vec{v}_b$. Заметим, что

$$\overrightarrow{A_tB_t} = \overrightarrow{A_0B_0} + t(\vec{v}_b - \vec{v}_a).$$

В случае $\overrightarrow{A_0B_0} \parallel (\vec{v}_b - \vec{v}_a)$ все векторы $\overrightarrow{A_tB_t}$ коллинеарны между собой или, эквивалентно, графики движения точек A и B в $\mathbb{R}^3$ лежат в одной плоскости. Назовём описанную ситуацию и соответствующую пару движущихся точек A, B *особой*. В особой ситуации при $\vec{v}_b \neq \vec{v}_a$ в какой-то момент точки сталкиваются (т. е. $A_{t_0} = B_{t_0}$ для некоторого $t = t_0$).

В *неособом* случае $\overrightarrow{A_0B_0} \nparallel (\vec{v}_b - \vec{v}_a)$ все векторы в семействе $\{\overrightarrow{A_tB_t}\}$ ненулевые. Доопределив $\overrightarrow{A_\infty B_\infty} \parallel \vec{v}_b - \vec{v}_a$, можно заметить, что для каждого направления существует единственный вектор вида $\overrightarrow{A_tB_t}$, параллельный этому направлению (под *направлением* мы понимаем класс параллельных прямых).

Легко видеть, что для неособой пары A, B при $\vec{v}_b \parallel \vec{v}_a$ все прямые A_tB_t проходят через одну точку. Если же $\vec{v}_b \nparallel \vec{v}_a$, то известны следующие факты (см., например, [1]): огибающей для семейства прямых A_tB_t является парабола (при этом прямые a и b, по которым движутся точки A и B, также являются прямыми вида A_tB_t и касаются этой параболы). Далее, всякая окружность, проходящая через точки A_t, B_t и $a \cap b$, проходит через фокус этой параболы M_{AB}. Тем самым M_{AB} является *точкой Микеля* для любой четвёрки из семейства прямых A_tB_t. Также M_{AB} является центром поворотных гомотетий, совмещающих пары векторов вида $\overrightarrow{A_tB_t}$. Кроме того, M_{AB} является центром поворотной гомотетии, переводящей прямую a в b и совмещающей точки A_t и B_t при фиксированном t.

В $\mathbb{R}^3$ графики линейного движения неособой пары представляют собой пару скрещивающихся прямых, а прямые вида (t, A_tB_t) образуют семейство прямолинейных образующих гиперболического параболоида.

1.3. Тройка точек

Далее рассмотрим тройку точек A, B, C, каждая из которых движется линейно, соответственно со скоростью $\vec{v}_a$, $\vec{v}_b$ и $\vec{v}_c$. Такую тройку называем *неособой*, если в ней каждая пара точек неособая. Тройка линейно движущихся точек A, B, C определяет множество треугольников $\{A_tB_tC_t\}$ $(t \in \mathbb{R})$, которое будем называть *линейным семейством треугольников*. Как правило, далее будем рассматривать *неособые линейные семейства треугольников*, т. е. неособый случай линейного движения трёх точек.

Для неособого случая в любом треугольнике $A_tB_tC_t$ никакие две из трёх вершин не совпадают, однако A_t, B_t, C_t могут лежать на одной прямой; в этом случае называем $A_tB_tC_t$ *вырожденным треугольником*.

Ясно, что линейное семейство можно породить произвольными двумя его треугольниками (скажем, взяв их в качестве $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$), при этом любые два треугольника линейного семейства определяют всё семейство.

Укажем ещё некоторые известные геометрические факты, связанные с неособым линейным семейством $\{A_tB_tC_t\}$. Центры поворотных гомотетий M_{AB}, M_{BC}, M_{AC} (определённые в п. 1.2) лежат на так называемой окружности подобия трёх фигур (в качестве фигур можно взять просто векторы $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{B_0B_1}$, $\overrightarrow{C_0C_1}$). Прямая, соединяющая $a \cap b$ с M_{AB}, и две аналогичные прямые пересекаются в одной точке, лежащей на окружности подобия. По окружности подобия движется общая точка P_t трёх окружностей — окружности, проходящей через A_t, B_t, $a \cap b$, и двух аналогичных окружностей. Указанные факты можно найти, например, в [5], § 19.8 «Окружность подобия трёх фигур». (Эти факты стали достаточно популярными и вошли во многие задачники и листки по поворотной гомотетии.)

1.4. Тройка точек $\longleftrightarrow$ пара векторов

Треугольник ABC с точностью до параллельного переноса (сдвига) можно задать упорядоченной парой (свободных) векторов $(\vec{b}, \vec{c}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Для линейного семейства $A_tB_tC_t$ положим $\vec{b}_t = \overrightarrow{A_tB_t}$, $\vec{c}_t = \overrightarrow{A_tC_t}$. Нетрудно видеть, что справедливы векторные равенства

$$\vec{b}_t = (1-t)\vec{b}_0 + t\vec{b}_1, \quad \vec{c}_t = (1-t)\vec{c}_0 + t\vec{c}_1, \tag{1}$$

из которых, в частности, ясно, что после замены треугольников $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ на некоторые их сдвиги семейство $\{A_tB_tC_t\}$ останется неизменным, т. е. будет состоять из тех же треугольников с точностью до сдвига.

1.5. Классы гомотетов

Далее рассмотрим эквивалентность относительно гомотетий и параллельных переносов. Скажем, что на плоскости два множества S_1 и S_2 эквивалентны, если S_2 получается из S_1 некоторым сдвигом или гомотетией. Класс эквивалентности $[S]$ множества S состоит из гомотетов и сдвигов множества S; этот класс для краткости можно называть *классом гомотетов* множества S. Для невырожденного треугольника ABC его класс $[ABC]$ однозначно определяется упорядоченной тройкой направлений, параллельных BC, CA, AB.

Эквивалентность треугольников ABC и $A'B'C'$ соответствует пропорциональности пар векторов $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ и $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$. Так, классу $[ABC]$ соответствует множество пар вида $(t\overrightarrow{AB}, t\overrightarrow{AC})$. По неособому линейному семейству треугольников $A_tB_tC_t$ определим *линейное семейство классов* $\{[A_tB_tC_t]\}$, дополненное классом «треугольника на бесконечности» $[A_\infty B_\infty C_\infty]$, который можно задать парой векторов $(\overrightarrow{A_\infty B_\infty}, \overrightarrow{A_\infty C_\infty})$, пропорциональной паре $(\vec{v}_b - \vec{v}_a, \vec{v}_c - \vec{v}_a)$.

Правые части равенства (1), записанные в «однородной форме»

$$(x_0\vec{b}_0 + x_1\vec{b}_1,\ x_0\vec{c}_0 + x_1\vec{c}_1), \tag{2}$$

где x_0, x_1 — произвольные константы, не равные одновременно 0, описывают линейное семейство классов, порождённое классами $[A_0B_0C_0]$ и $[A_1B_1C_1]$. Случай $x_0 + x_1 = 0$ будет соответствовать классу $[A_\infty B_\infty C_\infty]$ «треугольника на бесконечности».

Из формул (2) нетрудно понять, что линейное семейство классов не изменится от замены треугольников $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$ на их гомотеты. Кроме того, линейное семейство классов определяется любыми своими двумя (различными) классами, поэтому верно следующее: два несовпадающих линейных семейства классов либо не пересекаются, либо пересекаются ровно по одному классу.

1.6. Вырожденные треугольники

Хорошо известно следующее утверждение (этот факт предлагался, например, в виде задачи про пешеходов на Всесоюзной олимпиаде, см. [2, задача 228]).

В линейном семействе треугольников либо не более двух вырожденных треугольников, либо все треугольники этого семейства вырожденные.

Доказательство. Доказать это утверждение можно, например, исходя из равенства (1). Пусть в линейном семействе нашлись два вырожденных треугольника. Не умаляя общности можно считать, что это треугольники $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$. Тогда $\vec{b}_0 \parallel \vec{c}_0$ и $\vec{b}_1 \parallel \vec{c}_1$. Если коэффициенты пропорциональности одинаковы, т. е. $\vec{b}_t = \lambda\vec{c}_t$ для $t = 0$ и $t = 1$, то согласно (1) равенство будет выполнено для всех t. (В этом случае можно сказать, что всё семейство состоит из вырожденных «подобных» друг другу треугольников.) Иначе несложно видеть, что $\vec{b}_t \nparallel \vec{c}_t$ при $t \neq 0$ и $t \neq 1$. □

Если все треугольники семейства вырожденные, то семейство называем *вырожденным*. Для вырожденного неособого семейства треугольников три графика движения его вершин принадлежат одному гиперболическому параболоиду.

1.7. Примеры

(1) «Поворотно-гомотетичное семейство»

Пусть неособое линейное семейство порождено подобными и одинаково ориентированными (в невырожденном случае) треугольниками $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ (рис. 2). Из равенств (1) следует, что тогда в се-

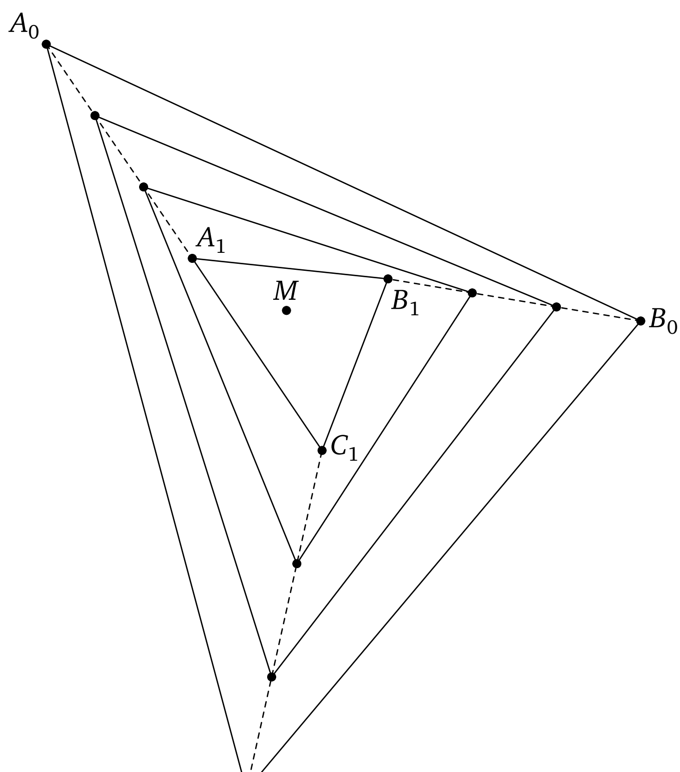

Рис. 2. Четыре подобных треугольника одного «поворотно-гомотетичного семейства»

мействе любой треугольник $A_tB_tC_t$ тоже подобен $A_0B_0C_0$ и одинаково ориентирован с ним.

При этом для всех треугольников семейства имеется общая соответственная точка M. Она является центром поворотной гомотетии, совмещающей любую пару векторов вида $\overrightarrow{A_tB_t}$, а значит, и любую пару треугольников нашего семейства. Таким образом, в рассматриваемом частном случае в обозначениях п. 1.2 и 1.3 имеем $M_{AB} = M_{BC} = M_{CA} = M$.

(2) «Педальное семейство»

Пусть даны фиксированные прямые a, b, c, а точка P движется линейно. Тогда проекции A_t, B_t, C_t точки P_t на прямые a, b, c движутся линейно и образуют линейное семейство *педальных* треугольников. Если прямые a, b, c образуют треугольник Δ, то педальный треугольник точки P может вырождаться (в прямую Симсона), и происходит это тогда и только тогда, когда P лежит на окружности, описанной около Δ.

Конструкцию педального семейства можно обобщить, если вместо педального треугольника точки P_t рассматривать точки A_t, B_t, C_t на прямых a, b, c такие, что каждый из направленных углов $\angle(P_tA_t, a)$, $\angle(P_tB_t, b)$, $\angle(P_tC_t, c)$ равен одному и тому же фиксированному значению α, так что направления прямых P_tA_t, P_tB_t, P_tC_t фиксированы; в таком случае треугольник $A_tB_tC_t$ можно назвать «α-педальным».

В случае α-педального семейства окружность подобия (по которой движется P_t) вырождается в прямую, и точки M_{AB}, M_{BC}, M_{CA} оказываются фиксированными точками на этой прямой (при этом прямые, соединяющие пары точек M_{AB} и $a \cap b$, M_{BC} и $b \cap c$, M_{CA} и $c \cap a$, параллельны).

И наоборот, коллинеарным точкам M_{AB}, M_{BC}, M_{CA} соответствует «α-педальное» семейство: можно двигать линейно точку P_t по прямой $M_{AB}M_{BC}M_{CA}$. Тогда точка A_t пересечения окружностей, проходящих через тройки точек P_t, $a \cap c$, M_{CA} и P_t, $a \cap b$, M_{AB}, будет двигаться линейно по прямой a, при этом прямая A_tP_t сохраняет своё направление.

1.8. Геометрия $\{T_t\}$ в случае двух вырожденных треугольников

Пусть в линейном неособом семействе треугольников $A_tB_tC_t$ имеются два вырожденных треугольника, лежащих на прямых x и y, пересекающихся в точке O. Для краткости треугольник $A_tB_tC_t$ обозначаем T_t. Перепараметризуем семейство так, чтобы на прямой y находились вершины треугольника T_0, а на прямой x — вершины треугольника T_1. Условия $f(A_0) = A_1$, $f(B_0) = B_1$, $f(C_0) = C_1$ определяют единственное отображение $f: y \to x$, сохраняющее двойные отношения точек (здесь считаем, что x и y пополнены бесконечно удалёнными точками). Для фиксированной константы λ на каждой прямой вида $Pf(P)$ (где P пробегает прямую y) отмечаем точку P_λ такую, что $\overrightarrow{PP_\lambda} = \lambda\overrightarrow{Pf(P)}$, в частности, $P_0 = P$, $P_1 = f(P)$. (Заметим, что эти обозначения согласуются с обозначением A_λ, B_λ, C_λ вершин треугольника семейства.)

1) В случае равенства отношений $\overrightarrow{A_0B_0}/\overrightarrow{A_0C_0} = \overrightarrow{A_1B_1}/\overrightarrow{A_1C_1}$ (иначе говоря, когда $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ — вырожденные подобные треугольники), в соответствии с п. 1.6, все треугольники в семействе $\{T_t\}$ — вырожденные и подобные между собой. В рассматриваемом случае f линейно (т. е. сохраняет отношения), и согласно п. 1.2 прямые вида $Pf(P)$ касаются фиксированной параболы (в частности, её касаются прямые x и y). При фиксированном λ точки P_λ лежат на прямой, также касающейся той же параболы.

2) Пусть теперь $\overrightarrow{A_0B_0}/\overrightarrow{A_0C_0} \neq \overrightarrow{A_1B_1}/\overrightarrow{A_1C_1}$. Тогда верно следующее:

При фиксированном $\lambda \neq 0, 1$ точки вида P_λ образуют гиперболу γ_λ с асимптотами, параллельными прямым x и y.

Доказательство. В аффинной системе координат Oxy (с осями координат x и y) можно задать координаты точки P как $(0, \tau)$ и соответственно точки $f(P)$ как $(\alpha(\tau), 0)$, где α — дробно-линейная функция (поскольку f сохраняет двойные отношения). (Заметим, что при этом α не является линейной функцией, так как этот случай соответствует равенству $\overrightarrow{A_0B_0}/\overrightarrow{A_0C_0} = \overrightarrow{A_1B_1}/\overrightarrow{A_1C_1}$.) Следовательно, P_λ имеет координаты $(\lambda\alpha(\tau), (1-\lambda)\tau)$. Тем самым P_λ образуют гиперболу $x = \lambda\alpha\Big(\dfrac{y}{1-\lambda}\Big)$. □

Отметим, что гипербола γ_λ однозначно задаётся следующими условиями: она содержит вершины $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$ и её асимптоты параллельны прямым x и y.

При $\lambda \neq 0, 1$, $\mu \neq 0, 1$ существует единственное аффинное преобразование $g_{\lambda,\mu}$ плоскости, переводящее вершины $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$ в A_μ, B_μ, C_μ соответственно. Видим, что в координатах Oxy преобразование $g_{\lambda,\mu}$ можно задать как

$$x^* = \frac{\mu}{\lambda}x, \quad y^* = \frac{1-\mu}{1-\lambda}y,$$

где (x^*, y^*) — образ точки (x, y). При этом каждая точка P_λ переходит в P_μ, и соответственно гипербола γ_λ переходит в гиперболу γ_μ.

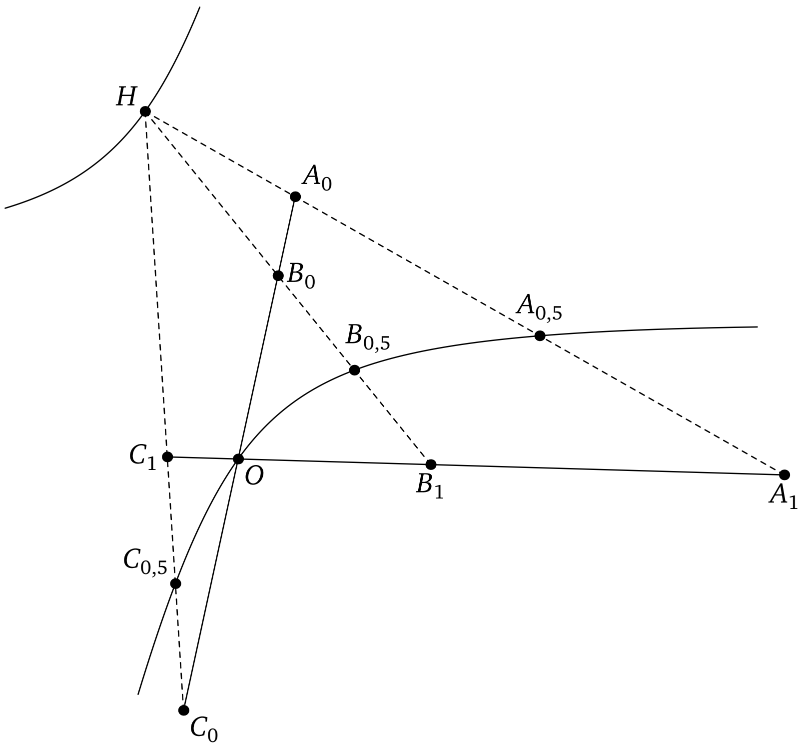

Рис. 3. Иллюстрация к случаю 2.1. Гипербола γ_λ при $\lambda = 0{,}5$

2.1) Рассмотрим *конкурентный* случай, когда прямые a, b, c (по которым движутся вершины треугольников T_t) пересекаются в одной точке H (рис. 3). Тогда отображение $f\colon y \to x$ совпадает с центральным проектированием с центром H, поэтому все прямые вида $Pf(P)$ проходят через H. Заметим, что при фиксированном $\lambda \neq 0, 1$ точка H имеет вид P_λ для некоторой точки P, и также $O = P_\lambda$ для $P = O$, поэтому

гиперболы γ_λ проходят через H и O.

Этот факт можно установить и непосредственной подстановкой в уравнение: находим

$$\alpha(\tau) = \frac{x_0}{1 - \frac{y_0}{\tau}},$$

где (x_0, y_0) — координаты точки H, откуда уравнение γ_λ имеет вид

$$x = \frac{\lambda x_0 y}{y - (1-\lambda) y_0}.$$

Кроме того, γ_λ имеет асимптоты $y = (1-\lambda) y_0$ и $x = \lambda x_0$ (геометрически описать положение асимптот можно, рассмотрев направления прямых $Pf(P)$, близкие к направлению прямых x и y). Отметим, что все гиперболы γ_λ имеют пару общих точек и параллельные асимптоты, поэтому входят в один пучок.

2.2) В *неконкурентном* случае известно, что прямые вида $Pf(P)$ (когда P пробегает прямую y, а $f(P)$ прямую x, с сохранением двойных отношений) касаются некоторой коники ε, в частности, прямые x и y — касательные к ε. На самом деле ε — эллипс или гипербола, случай параболы возникает выше в п. 1. Отметим, что гиперболы γ_λ дважды касаются коники ε (касание γ_λ и ε соответствует касанию прямой $Pf(P)$ и ε в точке P_λ).

1.9. Случай двух вырожденных треугольников, один из которых T_∞

Пусть в линейном неособом семействе $\{T_t\}$ ровно два вырожденных треугольника, первый из которых лежит на прямой y, а второй T_∞.

Согласно п. 1.5 случай вырожденного треугольника T_∞ соответствует параллельности разностей скоростей $(\vec{v}_b - \vec{v}_a) \parallel (\vec{v}_c - \vec{v}_a)$. Иначе говоря, в аффинной системе координат Oxy с осью Ox, параллельной вектору $(\vec{v}_b - \vec{v}_a)$, векторы скоростей $\vec{v}_a$, $\vec{v}_b$, $\vec{v}_c$ будут иметь равные ординаты.

Введём аффинную систему координат, принимая за ось ординат прямую y, а ось абсцисс Ox проводя параллельно вектору $(\vec{v}_b - \vec{v}_a)$. Перепараметризуем семейство так, чтобы на прямой y находились вершины треугольника T_0, так что

$$A_0 = (0, \tau_a), \quad B_0 = (0, \tau_b), \quad C_0 = (0, \tau_c).$$

Кроме того, считаем, что (равные) ординаты векторов $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{B_0B_1}$, $\overrightarrow{C_0C_1}$ равны 1, так что

$$\overrightarrow{A_0A_1} = (\xi_a, 1), \quad \overrightarrow{B_0B_1} = (\xi_b, 1), \quad \overrightarrow{C_0C_1} = (\xi_c, 1)$$

(при этом абсциссы ξ_a, ξ_b, ξ_c различны, иначе семейство $\{T_t\}$ — особое). Тогда A_λ имеет координаты $(\lambda\xi_a, \tau_a + \lambda)$, аналогично записываются координаты точек B_λ и C_λ.

Условия $\alpha(\tau_a) = \xi_a$, $\alpha(\tau_b) = \xi_b$, $\alpha(\tau_c) = \xi_c$ определяют единственную дробно-линейную функцию α. Соответственно для каждой точки $P = P_0(0, \tau)$ прямой y определим $P_\lambda = (\lambda\alpha(\tau), \tau + \lambda)$ (что согласуется с координатами A_λ, B_λ, C_λ). Отметим, что тогда отображение, сопоставляющее точке P прямую $\{P_\lambda\}$, фактически задаёт единственное отображение f с прямой y на бесконечно удалённую прямую, сохраняющее двойные отношения и такое, что $f(A_0) = a$, $f(B_0) = b$, $f(C_0) = c$.

Справедливо следующее утверждение:

При фиксированном $\lambda \neq 0$ точки вида P_λ образуют гиперболу γ_λ с асимптотами, параллельными x и y.

Доказательство. Из координат $P_\lambda = (\lambda\alpha(\tau), \tau + \lambda)$ в нашей аффинной системе координат Oxy видим, что P_λ движется по гиперболе $x = \lambda\alpha(y - \lambda)$. (Нетрудно заметить, что случай, когда α оказывается линейной функцией, соответствует коллинеарности точек A_1, B_1, C_1, что противоречит нашим условиям.) □

Гипербола γ_λ однозначно задаётся следующими условиями: она содержит вершины $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$ и её асимптоты параллельны прямым x и y.

При $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$ существует единственное аффинное преобразование $g_{\lambda,\mu}$ плоскости, переводящее вершины $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$ в A_μ, B_μ, C_μ соответственно. Видим, что в координатах Oxy преобразование $g_{\lambda,\mu}$ можно задать как

$$x^* = \frac{\mu}{\lambda}x, \quad y^* = y + \mu - \lambda.$$

При этом каждая точка P_λ переходит в P_μ, и соответственно гипербола γ_λ переходит в гиперболу γ_μ.

0.1) Рассмотрим *конкурентный случай*, когда прямые a, b, c пересекаются в одной точке $H(x_0, y_0)$. Тогда упомянутое отображение f совпадает с центральным проектированием с центром H, поэтому все прямые вида $\{P_\lambda\}$ (с фиксированной точкой P) также проходят через H. Покажем, что

гиперболы γ_λ проходят через H и имеют асимптоту y.

Доказательство. Действительно, запишем условие того, что для данного P прямая $\{P_\lambda\}$ проходит через точку $H(x_0, y_0)$: $\lambda_0\alpha(\tau) = x_0$, $\tau + \lambda_0 = y_0$ выполнено для некоторого λ_0. Исключая λ_0, получаем

$$\alpha(\tau) = \frac{x_0}{y_0 - \tau} \quad \text{(при всех } \tau\text{)}.$$

Значит, при фиксированном λ гипербола γ_λ имеет уравнение

$$x = \frac{\lambda x_0}{\lambda + y_0 - y}.$$

Как видим, $x = 0$ — асимптота, и (x_0, y_0) удовлетворяет уравнению. □

0.2) В *неконкурентном* случае прямые вида $\{P_\lambda\}$ (для фиксированной точки P) касаются некоторой параболы ε, в частности, её касаются прямая y и бесконечно удалённая прямая. Отметим, что, как и в п. 1.8, гиперболы γ_λ дважды касаются параболы ε.

§ 2. Отношение ортологичности

2.1. Определение ортологичности

Ещё раз скажем, что два треугольника ABC и $A'B'C'$, где $A'B'C'$ — невырожденный (а ABC — возможно, вырожденный), называются *ортологичными*, если перпендикуляры из A на $B'C'$, из B на $C'A'$ и из C на $A'B'$ пересекаются в одной точке. Факт ортологичности треугольников ABC и $A'B'C'$ будем обозначать $ABC \stackrel{\perp}{-} A'B'C'$. Если треугольники ABC и $A'B'C'$ (с фиксированным порядком вершин) обозначить T и T', то получим более короткую запись ортологичности: $T \stackrel{\perp}{-} T'$. Общая точка перпендикуляров, указанных выше, называется *центром* ортологии; будем обозначать его $O_{T,T'}$.

2.2. Рефлексивность

Очевидно, ортологичность рефлексивна: $T \stackrel{\perp}{-} T$, и центр ортологии $O_{T,T}$ — это ортоцентр треугольника T.

2.3. Взаимность (симметричность)

Как известно, условие ортологичности для невырожденных треугольников симметрично, т. е. $T \stackrel{\perp}{-} T' \Rightarrow T' \stackrel{\perp}{-} T$. Значит, если $T \stackrel{\perp}{-} T'$, то существует второй центр ортологии $O_{T',T}$, вообще говоря, отличный от $O_{T,T'}$ (рис. 4).

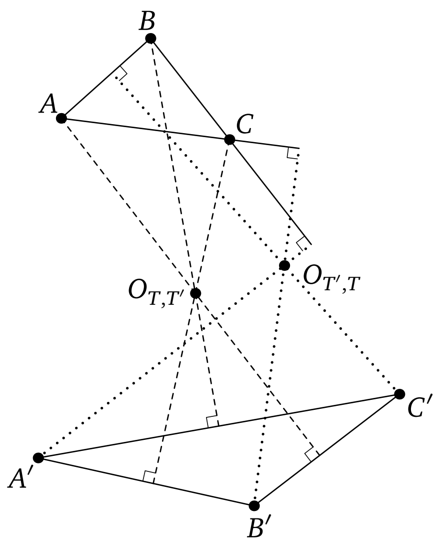

Рис. 4. Треугольники ABC и $A'B'C'$ ортологичны.
Точки $O_{T',T}$ и $O_{T,T'}$ — их центры ортологии

Симметричность отношения ортологичности следует, например, из известного условия Карно — Штейнера

$$A'B^2 - A'C^2 + B'C^2 - B'A^2 + C'A^2 - C'B^2 = 0, \tag{3}$$

эквивалентного условию ортологичности $ABC \stackrel{\perp}{-} A'B'C'$.

Понятно, что если вершину одного треугольника двигать вдоль перпендикуляра к соответствующей стороне другого треугольника (скажем, точку A двигать вдоль перпендикуляра к $B'C'$), то как условие ортологичности, так и левая часть (3) остаются неизменными.

Равенство (3) возьмём в качестве определения ортологичности для пары вырожденных треугольников.

2.4. Ортологичные четвёрки

Пусть $D = O_{T,T'}$ и $D' = O_{T',T}$ — центры ортологии для невырожденных ортологичных треугольников ABC и $A'B'C'$. Имеем $AB \perp C'D'$, $AC \perp B'D'$ и т. д. — шесть перпендикулярностей для четвёрок точек A, B, C, D и A', B', C', D'. Как видим, в этой конструкции четыре пары точек A и A', B и B', C и C', D и D' равноправны. Поэтому, например, A и A' — центры ортологии для ортологичных треугольников BCD и $B'C'D'$, и т. д. Можно назвать четвёрки A, B, C, D и A', B', C', D' ортологичными. Шесть указанных выше перпендикулярностей берутся за определение ортологичных тетраэдров $ABCD$ и $A'B'C'D'$ в пространстве (см., например, [7]), в этом смысле ортологичные четвёрки на плоскости можно считать вырожденными ортологичными тетраэдрами. Нетрудно понять (например, из симметрии отношения ортологичности), что из пяти указанных выше перпендикулярностей следует шестая.

Докажем, что *ортологичные четвёрки аффинно эквивалентны*, иначе говоря, аффинное преобразование, переводящее A, B, C соответственно в A', B', C', переводит $D = O_{T,T'}$ в $D' = O_{T',T}$. Этот факт известен как теорема Ридо (см., например, [3]).

Доказательство. Положим $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{D'A'} = \vec{a}'$, $\overrightarrow{D'B'} = \vec{b}'$, $\overrightarrow{D'C'} = \vec{c}'$. Случай, когда среди векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$ есть нулевой, легко разбирается. Далее считаем, что все эти векторы ненулевые.

Из перпендикулярностей вытекает $\vec{a}'(\vec{b} - \vec{c}) = 0$, поэтому скалярные произведения $\vec{a}'\vec{b}$ и $\vec{a}'\vec{c}$ равны. И все шесть аналогичных скалярных произведений равны одной и той же величине, обозначим её p. Заметим также, что $\vec{a}\vec{a}' \neq p$, иначе из равенств $\vec{a}\vec{a}' = \vec{b}\vec{a}' = \vec{c}\vec{a}' = p$ последовала бы коллинеарность точек A, B, C.

Пусть $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$ и $\alpha'\vec{a}'+\beta'\vec{b}'+\gamma'\vec{c}'=\vec{0}$, где $\alpha+\beta+\gamma=\alpha'+\beta'+\gamma'=1$. Чтобы завершить доказательство и установить нужную аффинную эквивалентность, нам достаточно показать, что $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$. Домножив скалярно первое равенство на $\vec{a}'$, имеем $\alpha\vec{a}\cdot\vec{a}'+(\beta+\gamma)p=0$, откуда $\alpha(\vec{a}\cdot\vec{a}'-p)+(\alpha+\beta+\gamma)p=0$, и α однозначно находится как $\alpha=p/(p-\vec{a}\vec{a}')$. Проведя аналогичные рассуждения, получим, что α' равно тому же значению. □

Приведём также обобщение теоремы Ридо, обнаруженное А. Мякишевым [8, задача 4.2]: если пары треугольников $A_iA_jA_k$ и $B_iB_jB_k$ ортологичны для всех $\{i,j,k\}\subset\{1,2,3,4\}$, то четырёхугольники $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$ аффинно эквивалентны.

2.5. Ортологичность как отношение на классах гомотетов

Из определения ясно, что факт $T\stackrel{\perp}{=}T'$ сохраняется при замене треугольника T' на его сдвиг или гомотет. В силу симметрии ортологичности, то же верно для T. Поэтому отношение ортологичности треугольников $T\stackrel{\perp}{=}T'$ поднимается до отношения $[T]\stackrel{\perp}{=}[T']$ на классах гомотетов или, эквивалентно, на (упорядоченных) тройках направлений.

Ясно, что если к одному из двух ортологичных треугольников, скажем к ABC, применить сдвиг или гомотетию, этому сдвигу или гомотетии подвергнется вся четвёрка $A, B, C, O_{T,T'}$ (при этом четвёрка $A', B', C', O_{T',T}$ остаётся неизменной).

2.6. Ортологичность как отношение на парах векторов

Поскольку факт ортологичности $ABC\stackrel{\perp}{=}A'B'C'$ не меняется при сдвиге одного из треугольников, отношение ортологичности можно понимать как отношение на множестве упорядоченных пар векторов (как и ранее, здесь треугольнику ABC ставим в соответствие пару векторов $(\vec{b},\vec{c})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$).

Соотношение (3) может быть преобразовано ко многим эквивалентным формам с использованием скалярного произведения. В частности, (3) эквивалентно равенству

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C'}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{A'B'}=0.$$

Таким образом, отношение ортологичности на парах векторов $(\vec{b},\vec{c})\stackrel{\perp}{=}(\vec{b}',\vec{c}')$ можно задать равенством

$$\vec{b}\vec{c}'-\vec{b}'\vec{c}=0. \tag{4}$$

2.7. Ортологичность вырожденных треугольников

Пусть ABC и $A'B'C'$ — вырожденные треугольники, так что $\vec{c} = \alpha\vec{b}$ и $\vec{c}' = \alpha'\vec{b}'$. Тогда согласно (4) имеем

$$ABC \stackrel{\perp}{-} A'B'C' \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b}\cdot(\alpha'\vec{b}') - (\alpha\vec{b})\cdot\vec{b}' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha - \alpha')\vec{b}\vec{b}' = 0.$$

Видим, что $ABC \stackrel{\perp}{-} A'B'C'$ выполняется в двух случаях: при $\vec{b}\perp\vec{b}'$, т. е. когда прямые ABC и $A'B'C'$ перпендикулярны, а также в случае $\alpha = \alpha'$, — иначе говоря, когда вырожденные треугольники ABC и $A'B'C'$ «подобны».

2.8. Случай совпадения центров ортологии

Пусть ABC и $A'B'C'$ — два ортологичных треугольника с совпадающими центрами ортологии (рис. 5): $O = O_{T,T'} = O_{T',T}$, тогда $OA \perp B'C'$, $OB \perp C'A'$, $OC \perp A'B'$, $OA' \perp BC$, $OB' \perp CA$, $OC' \perp AB$. Положим $C_0 = AB \cap OC'$, $C_0' = A'B' \cap OC$ и т. д., так что $A_0B_0C_0$ — педальный треугольник точки O относительно треугольника ABC и аналогично $A_0'B_0'C_0'$ — педальный треугольник точки O относительно $A'B'C'$. Тогда OC_0B и $OB_0'C'$ — подобные прямоугольные треугольники, откуда получаем

$$\overrightarrow{OB_0'}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC_0}\cdot\overrightarrow{OC'}.$$

Все аналогичные произведения также равны. Эту ситуацию можно описать например, так: $A'B'C'$ и ABC — образы соответственно педальных треугольников $A_0'B_0'C_0'$ и $A_0B_0C_0$ при инверсии (возможно,

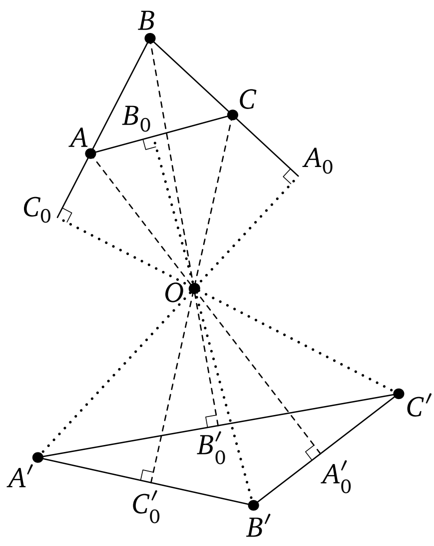

Рис. 5. Случай совпадения центров ортологии

мнимого радиуса) с центром O. Или, эквивалентно, прямые, содержащие стороны одного из треугольников T, T', являются полярами соответствующих вершин другого треугольника относительно окружности с центром O.

Известно (см., например, задачу 20 из [1]), что *в случае* $O_{T,T'} = O_{T',T}$ *треугольники* T *и* T' *перспективны* (*т. е.* AA', BB' CC' *конкурентны*).

Согласно п. 2.5, из общего случая ортологичных треугольников ABC и $A'B'C'$ можно получить случай совпадения центров ортологии сдвигом одной из четвёрок $A, B, C, O_{T,T'}$ и $A', B', C', O_{T',T}$.

2.9. Ортологичность и теорема Максвелла

Можно ввести ещё одно отношение (его можно назвать *гармоничностью*) на классах гомотетов невырожденных треугольников (или на тройках различных направлений). Скажем, что класс $[ABC]$ гармоничен классу $[A'B'C']$, если прямые, проходящие через A, B, C и параллельные соответственно прямым $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, пересекаются в одной точке.

Пусть классу $[ABC]$ соответствует тройка направлений a, b, c, а классу $[A'B'C']$ — тройка направлений a', b', c'. Тогда ортологичность тройки (a, b, c) тройке (a', b', c') равносильна гармоничности тройки (a, b, c) тройке $(a'^{\perp}, b'^{\perp}, c'^{\perp})$ (здесь через $x^{\perp}$ обозначено направление, перпендикулярное x). Последнее равносильно гармоничности тройки $(a^{\perp}, b^{\perp}, c^{\perp})$ тройке (a', b', c'), поскольку одновременный поворот всех направлений на один и тот же угол сохраняет как гармоничность, так и ортологичность. Видим, что факты о симметричности отношений ортологичности и гармоничности равносильны. Факт о симметричности отношения гармоничности известен как теорема Максвелла [6].

Приведём одну из возможных схем *аффинного* доказательства теоремы Максвелла без использования ортологичности.

Пусть прямые a, b, c, a', b', c', параллельные соответственно сторонам BC, CA, AB, $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ треугольников ABC и $A'B'C'$, проходят через одну точку O. Пересечём эти прямые с произвольной прямой l и получим в пересечении точки $A_0, B_0, C_0, A'_0, B'_0, C'_0$. Условие гармоничности ABC и $A'B'C'$ равносильно равенству

$$\frac{\overrightarrow{A_0B'_0}}{\overrightarrow{B'_0C_0}} \cdot \frac{\overrightarrow{C_0A'_0}}{\overrightarrow{A'_0B_0}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_0C'_0}}{\overrightarrow{C'_0A_0}} = -1 \tag{5}$$

(это можно доказать, например, используя теорему Чевы в синусной форме), откуда видна взаимность. □

Термин *гармоничность* был выбран нами из-за того, что равенство (5) имеет вид «циклическое отношение $2n$ точек равно -1», а, как известно, аналогичное равенство при $n=2$ определяет гармоническую четвёрку.

Рассмотрим две четвёрки точек A, B, C, D и A', B', C', D', в которых нет тройки коллинеарных точек. Пусть $AB \parallel C'D'$, $AC \parallel B'D'$, $AD \parallel B'C'$, $BC \parallel A'D'$, $BD \parallel A'C'$, $CD \parallel A'B'$ (так что тройки ABC и $A'B'C'$ — гармоничные, или, эквивалентно, тройки ABD и $A'B'D'$ — гармоничные, и т. д.). Тогда четвёрки A, B, C, D и A', B', C', D' аффинно эквивалентны. Этот факт равносилен теореме Ридо об аффинной эквивалентности ортологичных четвёрок (но, конечно, может быть доказан и в рамках аффинной геометрии, без использования ортологичности).

2.10. α-ортологичность

Скажем, что треугольник ABC является *α-ортологичным* треугольнику $A'B'C'$, если существует точка P такая, что

$$\angle(AP, B'C') = \angle(BP, C'A') = \angle(CP, A'B') = \alpha.$$

Тогда «обычная» ортологичность — это $\frac{\pi}{2}$-ортологичность, а введённое выше отношение гармоничности совпадает с 0-ортологичностью.

Если треугольник ABC α-ортологичен треугольнику $A'B'C'$, то после поворота на α (или на $\alpha + \pi/2$) он становится соответственно гармоничным (ортологичным) треугольнику $A'B'C'$.

Отсюда ясно, что если ABC α-ортологичен треугольнику $A'B'C'$, то $A'B'C'$ $(-\alpha)$-ортологичен треугольнику ABC.

2.11. Примеры

(1) Педальный треугольник

Пусть T — педальный треугольник точки P для треугольника ABC (рис. 6). Тогда $T \perp ABC$, при этом центры ортологии — это точка P и её изогонально сопряжённая точка.

Более общо, α-педальный треугольник точки P α-ортологичен треугольнику ABC (с теми же центрами α-ортологии и $(-\alpha)$-ортологии).

(2) Радикальные оси

Радикальная ось двух окружностей с центрами O_1 и O_2 и радиусами R_1 и R_2 — это множество точек X таких, что $XO_1^2 - XO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$. Радикальная ось — это прямая, перпендикулярная O_1O_2. В случае пересекающихся окружностей радикальная ось проходит через точки пересечения окружностей.

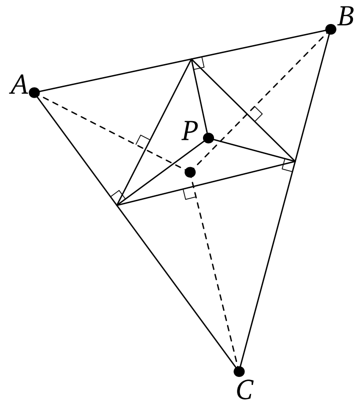

Рис. 6. Педальный треугольник точки P

Пусть даны три окружности ω_i, $i = 1, 2, 3$, с центрами O_i, не лежащими на одной прямой. Пусть X_{ij} — произвольная точка на радикальной оси окружностей ω_i и ω_j. Тогда $O_1O_2O_3 \stackrel{\perp}{=} X_{23}X_{31}X_{12}$ (например, легко проверяется (3)). Этот факт эквивалентен тому, что три радикальные оси пересекаются в одной точке (радикальном центре).

(3) Замена на гомотет

Идея о том, что ортологичность не меняется при замене одного из треугольников на гомотет, весьма полезна. Здесь проиллюстрируем её решением следующей задачи.

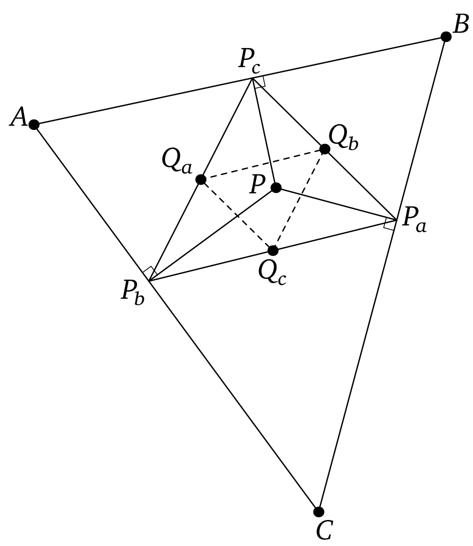

Рис. 7. К задаче о замене на гомотет

Задача. Рассмотрим проекции P_a, P_b, P_c точки P на прямые, содержащие стороны треугольника ABC (рис. 7). Через середину P_bP_c проводится прямая l_a перпендикулярно BC. Аналогично определяются прямые l_b и l_c. Докажите, что l_a, l_b, l_c конкурентны.

Решение. Обозначим Q_a, Q_b, Q_c середины соответствующих сторон треугольника $P_aP_bP_c$. Утверждение задачи означает, что $Q_aQ_bQ_c \stackrel{\perp}{-} ABC$. Но это верно, поскольку $P_aP_bP_c \stackrel{\perp}{-} ABC$, а $P_aP_bP_c$ и $Q_aQ_bQ_c$ гомотетичны.

§ 3. Ортологичность и линейные семейства

Продолжим заниматься линейными семействами треугольников.

3.1. Ортологичность данному треугольнику. Линейность $O_{T_t,\,T'}$

Пусть два треугольника из линейного семейства $\{T_t\}$ ортологичны данному треугольнику T'. Тогда $T_t \stackrel{\perp}{-} T'$ при любом t.

Кроме того, если T' невырожденный, то центр ортологии $O_{T_t,\,T'}$ движется линейно.

Доказательство. Вначале предположим, что T' невырожденный. Пусть, например, $T_\lambda \stackrel{\perp}{-} T'$ и $T_\mu \stackrel{\perp}{-} T'$ для $\lambda \neq \mu$. Пусть O_t — точка, двигающаяся линейно и такая, что $O_\lambda = O_{T_\lambda,T'}$ и $O_\mu = O_{T_\mu,T'}$. Так как $A_\lambda O_\lambda \perp B'C'$ и $A_\mu O_\mu \perp B'C'$, получаем, что $A_tO_t \perp B'C'$ для любого t. Проводя аналогичные рассуждения для других вершин, получаем, что перпендикуляры из A_t на $B'C'$, из B_t на $C'A'$, из C_t на $A'B'$ пересекаются в точке O_t, т. е. $O_t = O_{T_t,T'}$ для любого t.

Чтобы доказать первое утверждение без использования невырожденности T', достаточно воспользоваться линейностью скалярного произведения и с учётом (1) и (4) вывести из равенств $\vec{b}'\vec{c}_0 - \vec{c}'\vec{b}_0 = 0$ и $\vec{b}'\vec{c}_1 - \vec{c}'\vec{b}_1 = 0$ равенство $\vec{b}'\vec{c}_t - \vec{c}'\vec{b}_t = 0$ для произвольного t. □

Итак, для невырожденного треугольника T' траектория $O_{T_t,\,T'}$ является прямой или вырождается в точку. Легко видеть, что вырождение происходит в случае, когда векторы скорости вершин треугольника T_t перпендикулярны соответствующим сторонам треугольника T'. В частности, если треугольник T' сам принадлежит семейству $\{T_t\}$, то траектория $O_{T_t,\,T'}$ может вырождаться в точку — ортоцентр треугольника T'.

Заметим также, что траектория $O_{T_t,\,T'}$ не изменяется при замене T' на его гомотет или сдвиг.

3.2. Линейное ортологичное семейство

Линейное семейство треугольников, в котором любые два треугольника ортологичны, для краткости будем называть *ортологичным* семейством треугольников. Аналогично определим ортологичные семейства классов гомотетов.

Верно следующее достаточное условие ортологичности семейства.

Пусть два треугольника из семейства $\{T_t\}$ ортологичны друг другу. Тогда $\{T_t\}$ — ортологичное семейство.

Доказательство. Не умаляя общности считаем, что $T_0 \stackrel{\perp}{-} T_1$. Поскольку $T_0 \stackrel{\perp}{-} T_0$, из п. 3.1 следует, что $T_0 \stackrel{\perp}{-} T_t$ при всех t. Аналогично $T_1 \stackrel{\perp}{-} T_t$ при всех t. Теперь для каждого фиксированного λ доказано, что $T_1 \stackrel{\perp}{-} T_\lambda$ и $T_0 \stackrel{\perp}{-} T_\lambda$. Отсюда снова по п. 3.1 следует, что $T_t \stackrel{\perp}{-} T_\lambda$ при всех t. □

Аналогично, *если в линейном семействе классов гомотетов какие-то два различных класса, скажем $[T_0]$ и $[T_1]$, ортологичны, то это семейство ортологично.*

Более того, в таком случае (т. е. при $[T_0] \neq [T_1]$) оказывается, что *треугольник T ортологичен обоим треугольникам T_0 и T_1 тогда и только тогда, когда $[T]$ принадлежит линейному семейству, порождённому $[T_0]$ и $[T_1]$*. Поэтому ортологичные семейства классов — максимальные множества, в которых любая пара треугольников ортологична. Объяснение последнего факта мы увидим в п. 4.7 (хотя получить доказательство можно и непосредственной выкладкой).

3.3. Вырожденные треугольники ортологичных семейств

Пусть в ортологичном семействе есть два вырожденных треугольника. Тогда, согласно п. 2.7, эти треугольники либо подобны, либо лежат на перпендикулярных прямых. В первом случае, согласно п. 1.6, семейство будет вырожденным, оно будет состоять из вырожденных «подобных» треугольников.

Значит, в невырожденном ортологичном семействе два вырожденных треугольника могут лишь лежать на перпендикулярных прямых. Оказывается, это утверждение можно усилить до следующего.

Пусть $\{[T_t]\}$ — неособое невырожденное линейное ортологичное семейство классов. Тогда в нём ровно два класса вырожденных треугольников, и эти классы соответствуют перпендикулярным направлениям.

Доказательство этого факта дадим ниже в п. 4.5 (хотя доказать это можно и непосредственно).

Итак, неособое невырожденное ортологичное семейство $\{T_t\}$ содержит ровно два вырожденных треугольника, один из которых — возможно, «треугольник на бесконечности» T_∞.

В первом случае, аналогично п. 1.8, ортологичное семейство перепараметризуем так, чтобы вырожденными треугольниками были T_1 и T_0 и они лежали соответственно на осях Ox и Oy прямоугольной декартовой системы координат Oxy.

В случае вырождения T_∞ считаем, что другой вырожденный треугольник — это T_0 и он лежит на прямой y. Этот случай соответствует условиям $\vec{v}_a - \vec{v}_b \perp y$ и $\vec{v}_a - \vec{v}_c \perp y$. Иначе говоря, T_∞ вырождается, если равны проекции скоростей вершин A_t, B_t, C_t на ось y, т. е. проекция $A_tB_tC_t$ на y — это сдвиг (вдоль y) вырожденного треугольника $A_0B_0C_0$.

3.4. Примеры использования ортологичных семейств

(1) Ортопол

Пусть T_0 — проекция треугольника T_1 на некую прямую ℓ. Как известно (и легко проверяется по (3)), $T_0 \stackrel{\perp}{-} T_1$. Центр ортологии O_{T_0,T_1} известен как *ортопол* (*ортополюс*) треугольника T_1 и прямой ℓ. Ортологичное линейное семейство, порождённое T_0 и T_1, содержит образы T_1 при всевозможных растяжениях, сжатиях, отражении относительно ℓ. В частности, из этого примера видим, что любой треугольник ортологичен своему зеркальному отражению (а значит, и любому сдвигу зеркального отражения). Конечно, ортологичность треугольника и его отражения можно доказать и непосредственно — пользуясь (4) или же явно указав положение одного из центров ортологии (он лежит на описанной окружности треугольника).

В соответствии с п. 3.3, в рассмотренном семействе T_∞ вырожден.

(2) Критерий ортологичности педальных треугольников

Пусть ABC — данный треугольник, O — центр его описанной окружности, $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ — педальные треугольники точек P_0 и P_1.

Установим следующий критерий (он, в частности, предлагался в виде задачи 17 на заочном туре олимпиады им. И. Шарыгина 2009 года): $A_0B_0C_0 \stackrel{\perp}{-} A_1B_1C_1 \iff P_0, P_1, O$ лежат на одной прямой.

Треугольники $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ порождают семейство педальных треугольников $A_tB_tC_t$ точек P_t, движущихся по прямой P_0P_1. Каждый из треугольников этого семейства ортологичен ABC, значит, семейство $A_tB_tC_t$ ортологично тогда и только тогда, когда соответствующее семейство классов $[A_tB_tC_t]$ содержит класс $[ABC]$. Но педальный треугольник гомотетичен ABC только для точки O.

Другое объяснение связано с рассмотрением вырожденных треугольников семейства $A_tB_tC_t$ — прямых Симсона точек пересечения прямой P_0P_1 с окружностью (ABC). Семейство $A_tB_tC_t$ ортологично тогда и только тогда, когда две такие прямые существуют и перпендикулярны, т. е. когда точки пересечения прямой P_0P_1 с окружностью (ABC) существуют и диаметрально противоположны.

(3) Задача Л. Емельянова

Задача (Всероссийская олимпиада 2002 г.). Докажите, что прямые, проходящие через точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника параллельно соответствующим биссектрисам, пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть X_a, X_b, X_c — точки касания сторон треугольника ABC с вневписанными окружностями. Достаточно показать, что треугольник $X_aX_bX_c$ ортологичен какому-то треугольнику T, у которого стороны имеют направления внешних биссектрис треугольника ABC.

Способ 1. В качестве T возьмём треугольник $K_aK_bK_c$ с вершинами в точках касания с вписанной окружностью. Поскольку K_a и X_a симметричны относительно середины A_0 стороны BC (и аналогичное утверждение верно для пар K_b, X_b и K_c, X_c), линейное семейство, порождённое треугольниками $K_aK_bK_c$ и $X_aX_bX_c$, содержит серединный треугольник $A_0B_0C_0$. Так как $K_aK_bK_c \perp ABC$, получаем, что $K_aK_bK_c \perp A_0B_0C_0$ (замена на гомотет). Значит, наше семейство ортологично, откуда $K_aK_bK_c \perp X_aX_bX_c$.

Способ 2. На самом деле этот сюжет сводится к примеру 2, так как $K_aK_bK_c$ — педальный треугольник центра I вписанной окружности, а $X_aX_bX_c$ — педальный треугольник так называемой точки Бэвена, симметричной I относительно O.

Способ 3 (предложил А. Бучаев). В качестве T возьмём треугольник $A'B'C'$ с вершинами в серединах дуг BAC, CBA, ACB. Нетрудно доказать равенство отрезков $BX_c = CX_b$, откуда следует равенство треугольников $A'X_cB$ и $A'X_bC$. Отсюда следует равенство $A'X_c = A'X_b$. Из последнего равенства и аналогичных ему ортологичность $A'B'C' \perp X_aX_bX_c$ очевидно следует в силу (3).

(4) Задача о серединах высот

Задача (Европейский математический кубок 2013 г.). Точки X, Y и Z — середины высот AD, BE и CF треугольника ABC соответственно. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из D на YZ, из E на ZX и из F на XY, пересекаются в одной точке.

Решение. Так как X, Y, Z лежат на высотах треугольника ABC, получаем, что $ABC \stackrel{\perp}{-} XYZ$. Значит, ABC и XYZ порождают ортологичное линейное семейство. В этом семействе содержится и треугольник DEF (если ABC отвечает значению $t=0$, а XYZ — значению $t=1$, то DEF — значению $t=2$). Поскольку в этом семействе любые два треугольника ортологичны, имеем $DEF \stackrel{\perp}{-} XYZ$, что и требуется.

(5) Доказательство теоремы Сонда

Пусть $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ — два данных ортологичных и перспективных треугольника. Теорема Сонда утверждает, что тогда центры ортологии и перспектор лежат на одной прямой, причём эта прямая перпендикулярна оси перспективы (прямой Дезарга) данных треугольников (рис. 8).

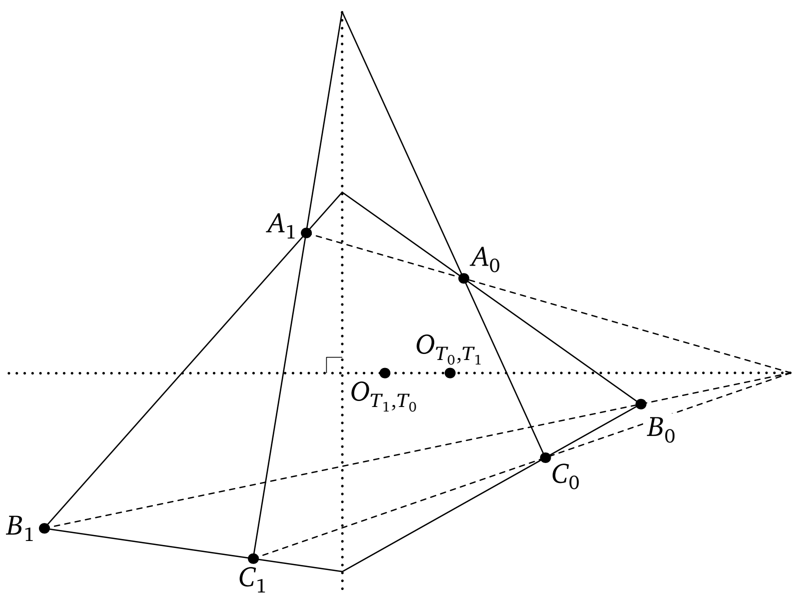

Рис. 8. Иллюстрация к теореме Сонда

Доказательство. Треугольники $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ порождают ортологичное семейство $A_tB_tC_t$. Пусть H — перспектор треугольников $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ (он же — перспектор любых двух треугольников семейства). Достаточно показать, что при $t \neq 0$ вектор $\overrightarrow{HO_{T_t,T_0}}$ перпендикулярен оси перспективы треугольников $A_0B_0C_0$ и $A_tB_tC_t$. Тогда для $t=1$ получим, что $\overrightarrow{HO_{T_1,T_0}}$ перпендикулярен оси перспективы треугольников $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$. Меняя T_0 и T_1 ролями, также докажем, что $\overrightarrow{HO_{T_0,T_1}}$ перпендикулярен оси перспективы треугольников $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$, и это докажет теорему Сонда.

Заметим, что так как точка O_{T_t,T_0} движется линейно, вектор $\vec{u}(t) = \overrightarrow{HO_{T_t,T_0}}$ зависит линейно от t (то есть координаты этого вектора в любой декартовой системе координат — линейные функции от t).

Далее покажем, что точка $A_0B_0 \cap A_tB_t$ движется линейно (по прямой A_0B_0). Аналогично устанавливается, что $A_0C_0 \cap A_tC_t$ движется линейно, и тогда направляющий вектор оси перспективы $\vec{v}(t)$, соединяющий эти точки, тоже зависит линейно от t.

Для доказательства выберем систему координат, в которой прямая A_0B_0 совпадает с осью y, так что точка $A_0B_0 \cap A_tB_t$ имеет координаты $(0, y_1)$, а точки A_t и B_t — координаты $(\alpha t, \beta t + \gamma)$ и $(\alpha' t, \beta' t + \gamma')$ для некоторых констант α, β, γ, α', β', γ'. Условие коллинеарности векторов, соединяющих A_t и B_t с $A_0B_0 \cap A_tB_t$ записывается как

$$\alpha t(\beta' t + \gamma' - y_1) = \alpha' t(\beta t + \gamma - y_1),$$

откуда после сокращения на t видно, что y_1 зависит линейно от t.

Итак, нам нужно доказать, что $\vec{u}(t) \perp \vec{v}(t)$ для всех t, или, эквивалентно, $(\vec{u}(t), \vec{v}(t)) \equiv 0$, где векторы $\vec{u}(t)$ и $\vec{v}(t)$ зависят от t линейно. Так как скалярное произведение $(\vec{u}(t), \vec{v}(t))$ — многочлен от t степени не более чем 2, достаточно найти три различных значения t_i, $i = 1, 2, 3$, для которых выполнено $\vec{u}(t_i) \perp \vec{v}(t_i)$. Пусть t_1 соответствует положению $A_{t_1} = H$. Тогда, как легко видеть, ось перспективы треугольников $A_0B_0C_0$ и $A_{t_1}B_{t_1}C_{t_1}$ совпадает с прямой B_0C_0, а вектор $\overrightarrow{HO_{T_{t_1},T_0}} = \overrightarrow{A_{t_1}O_{T_{t_1},T_0}}$ перпендикулярен B_0C_0, что и требуется установить. Аналогично, пусть t_2 и t_3 соответствуют положениям $B_{t_2} = H$ и $C_{t_3} = H$. В случае неособого семейства $A_tB_tC_t$ три значения параметра t_1, t_2, t_3 попарно различны, поскольку точки A_t, B_t, C_t попарно различны, и в этом случае теорема доказана.

Если же семейство $A_tB_tC_t$ особое, то у треугольников этого семейства одна из сторон не меняет направления, $A_0B_0 \parallel A_tB_t$ для любого t. Тогда в рассуждениях выше можно сделать следующие упрощения: вектор $\vec{v}(t)$ не меняет направления и будет параллелен A_0B_0, и надо понять, что вектор $\vec{u}(t)$ всегда перпендикулярен A_0B_0. Так как $\vec{u}(t)$ зависит от t линейно, достаточно проверить это для двух различных значений параметра. Подходят $t = t_2$ и $t = t_3$, соответствующие положениям $B_{t_2} = H$ и $C_{t_3} = H$, кроме случая, когда $A_{t_2} = B_{t_2} = C_{t_2} = H$ и семейство $A_tB_tC_t$ состоит из гомотетичных треугольников. Но в последнем случае теорема очевидна. □

(6) Задача о мухах на высотах

Приведём формулировку задачи Е. Бакаева, которая на самом деле и послужила отправной точкой для написания этой работы.

Задача. Три мухи сели в разные вершины треугольника ABC и поползли по прямым, содержащим его высоты, с постоянными скоростями. В какой-то момент все мухи оказались на одной прямой x. Ещё через какое-то время они все оказались на одной прямой y. Докажите, что $x \perp y$.

Решение 1. Движение мух определяет линейное ортологичное семейство треугольников $A_tB_tC_t$. Действительно, $A_0B_0C_0 = ABC$ и, очевидно, $A_tB_tC_t \stackrel{\perp}{-} ABC$ для любого t. Поэтому утверждение задачи сразу следует из п. 3.3.

Приведём, однако, и авторское элементарно-геометрическое решение, которое заодно доказывает в условиях задачи в случае неособого семейства $A_tB_tC_t$ существование прямых x и y (т. е. вырожденных треугольников семейства $A_tB_tC_t$).

Решение 2. Считаем, что ABC — это $A_0B_0C_0$.

Пусть перпендикуляры к высотам a, b, c треугольника $A_0B_0C_0$, проведённые соответственно через точки A_t, B_t, C_t, образуют треугольник Δ_t. Тогда $A_tB_tC_t$ — педальный треугольник точки H для треугольника Δ_t. Заметим, что $\{\Delta_t\}$ — линейное (особое) семейство гомотетичных (или совмещаемых параллельным переносом) треугольников. Эти треугольники имеют общий центр гомотетии P, который одновременно является вырожденным треугольником семейства $\{\Delta_t\}$ (в случае параллельного переноса можно считать P бесконечно удалённой точкой).

Тогда все окружности Ω_t, описанные около треугольников Δ_t, гомотетичны с центром в P, а центр S_t окружности Ω_t движется линейно вдоль прямой, проходящей через P. Заметим, что $H = S_0$, поэтому S_t движется по прямой PH. (Отметим, что $P \neq H$, иначе все треугольники $A_tB_tC_t$ гомотетичны с центром в H.)

Вырожденность педального треугольника $A_tB_tC_t$ (в прямую Симсона) эквивалентна принадлежности H окружности Ω_t. Видим (из гомотетии с центром P), что $H \in \Omega_t$ для двух различных значений $t = t_1$ и $t = t_2$, причём в этих положениях гомотетия, переводящая Δ_{t_1} в Δ_{t_2}, отправляет точку H окружности Ω_{t_1} в точку, диаметрально противоположную точке H на окружности Ω_{t_2}. Как известно, прямые Симсона треугольника, отвечающие диаметрально противоположным точкам, перпендикулярны (а гомотетия не меняет направлений прямых), поэтому вырожденные треугольники $A_{t_1}B_{t_1}C_{t_1}$ и $A_{t_2}B_{t_2}C_{t_2}$ лежат на перпендикулярных прямых.

3.5. Траектория O_{T', T_t} — коника

Пусть $\{T_t\}$ — неособое линейное семейство треугольников, ортологичных данному треугольнику T'. Тогда центр ортологии O_{T', T_t} движется по конике, проходящей через вершины A', B', C' треугольника T'.

Доказательство. Координаты векторов сторон треугольника T_t зависят линейно от t. Повернув эти векторы на 90°, получим направляющие векторы $\vec{u}_a(t)$, $\vec{u}_b(t)$, $\vec{u}_c(t)$ перпендикуляров $A'O_{T', T_t}$, $B'O_{T', T_t}$, $C'O_{T', T_t}$, проведённых соответственно через A', B', C' к B_tC_t, C_tA_t, A_tB_t. Эти векторы тоже зависят линейно от t. Поэтому существует аффинное преобразование f плоскости, переводящее A' в B' и $\vec{u}_a(t)$ в $\vec{u}_b(t)$, так что f переводит прямую $A'O_{T', T_t}$ в $B'O_{T', T_t}$ (для любого t).

Как известно (см., например, [1]), если f — проективное преобразование, переводящее пучок прямых $\Pi(X)$ (с центром X) в пучок $\Pi(Y)$ (где $Y \neq X$), то точки пересечения $l \cap f(l)$, где $l \in \Pi(X)$, лежат на фиксированной прямой или на конике, проходящей через X и Y. В нашем случае получается, что O_{T', T_t} движется по прямой или по конике, проходящей через точки A' и B' (и аналогично, через C'). □

Понятно, что множество $\{O_{T', T_t}\}$ не изменяется при замене семейства $\{T_t\}$ на другое семейство, задающее то же семейство классов $\{[T_t]\}$. При сдвиге или гомотетии треугольника T' множество $\{O_{T', T_t}\}$ соответственно подвергается этому сдвигу или гомотетии.

Если треугольник T' — вырожденный, то $\{O_{T', T_t}\}$ можно считать вырожденной квадрикой — объединением прямой $A'B'C'$ с прямой, по которой движется точка O_{T', T_t}.

Заметим, что асимптотические направления коники $\{O_{T', T_t}\}$ перпендикулярны прямым, содержащим вырожденные треугольники семейства $\{T_t\}$. Поэтому из п. 3.3 следует утверждение:

Линейное неособое невырожденное семейство $\{T_t\}$ является ортологичным тогда и только тогда, когда коника центров ортологии $\{O_{T', T_t}\}$ имеет пару перпендикулярных асимптотических направлений (т. е. это прямоугольная гипербола или пара перпендикулярных прямых).

Пусть $\{T_t\}$ — невырожденное неособое ортологическое семейство, а T_λ — его фиксированный невырожденный треугольник. Из сказанного выше следует, что $\{O_{T_\lambda, T_t}\}$ — это гипербола с асимптотами, параллельными прямым, содержащим вырожденные треугольники семейства. Кроме того, эта гипербола очевидно содержит точки $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$. Таким образом, $\{O_{T_\lambda, T_t}\}$ удовлетворяет условиям, однозначно задающим гиперболу γ_λ из рассмотрений в п. 1.8 и 1.9, т. е.

$$\{O_{T_\lambda,T_t}\} \textit{ совпадает с } \gamma_\lambda.$$

Пример: образ прямой при изогональном сопряжении

Пусть дан треугольник ABC, и пусть $\{T_t\}$ — педальное семейство треугольников (см. п. 1.7) для точки P_t, линейно движущейся вдоль прямой p. Тогда ABC ортологичен каждому из треугольников T_t и, в соответствии с примером 1 из п. 2.11, коника $\{O_{ABC,T_t}\}$ — это образ прямой p при изогональном сопряжении относительно ABC.

Из примера 2 в п. 3.4 мы знаем, что педальное семейство T_t ортологично тогда и только тогда, когда p проходит через O, или, эквивалентно, когда $\{O_{ABC,T_t}\}$ проходит через ортоцентр H треугольника ABC. В этом случае $\{O_{ABC,T_t}\}$ — прямоугольная гипербола или пара перпендикулярных прямых, что согласуется с п. 3.5.

Например, если p — прямая OL, где L — точка пересечения симедиан (точка Лемуана), то $\{O_{ABC,T_t}\}$ — гипербола Киперта. Ту же гиперболу можно получить как множество центров ортологии для другого семейства треугольников (которое, конечно, задаёт то же семейство классов гомотетов). Это семейство $\{A_tB_tC_t\}$ породим серединным треугольником $A_0B_0C_0$ треугольника ABC и треугольником $A_1B_1C_1$ с вершинами в центрах квадратов, построенных на сторонах треугольника ABC вне его. Таким образом, A_t, B_t, C_t — вершины подобных равнобедренных треугольников, построенных на сторонах треугольника ABC вне его или внутрь него. Известно, что множество центров ортологии $O_{ABC,A_tB_tC_t}$ — гипербола Киперта. Также гипербола Киперта — множество перспекторов ABC и $A_tB_tC_t$. Нетрудно показать, что $AA_{1/t} \perp B_tC_t$, так что перспектор ABC и $A_{1/t}B_{1/t}C_{1/t}$ является центром ортологии $O_{ABC,A_tB_tC_t}$, и наоборот. Отметим также, что точки $O_{ABC,A_tB_tC_t}$ и $O_{ABC,A_{1/t}B_{1/t}C_{1/t}}$ лежат на одной прямой с O (см. [4]).

3.6. Прямая, соединяющая центры ортологии O_{T_λ,T_μ} и O_{T_μ,T_λ}

Пусть $\{T_t\}$ — невырожденное неособое ортологическое семейство, а T_λ и T_μ — два его невырожденных треугольника.

Как отмечено в п. 3.5, центры ортологии O_{T_λ,T_μ} и O_{T_μ,T_λ} лежат на соответствующих гиперболах γ_λ и γ_μ, определённых в п. 1.8 и 1.9. При этом аффинное преобразование $g_{\lambda,\mu}$, переводящее A_λ, B_λ, C_λ соответственно в A_μ, B_μ, C_μ, согласно теореме Ридо (см. п. 2.4) переводит O_{T_λ,T_μ} в O_{T_μ,T_λ}. Но тогда в обозначениях п. 1.8 и 1.9, точки O_{T_λ,T_μ}

и O_{T_μ,T_λ} — это соответственно P_λ и P_μ (для одной и той же точки P прямой y). Отсюда получаем такие следствия.

1) Пусть $\{T_t\}$ — конкурентное семейство. Тогда прямая P_0P_1 (она же $P_\lambda P_\mu$) проходит через перспектор H. Тем самым получаем, что

$$O_{T_\lambda,T_\mu},\ O_{T_\mu,T_\lambda}\ \text{ и } H \text{ коллинеарны.}$$

Фактически мы получили ещё одно доказательство утверждения о коллинеарности из теоремы Сонда.

2) Пусть $\{T_t\}$ — неконкурентное семейство. Из п. 1.8 и 1.9 мы знаем, что прямые P_0P_1 касаются коники ε (т. е. той же коники, которой касаются прямые a, b, c и прямые, содержащие вырожденные треугольники семейства). Значит,

$$\text{прямая } O_{T_\lambda,T_\mu}O_{T_\mu,T_\lambda} \text{ касается коники } \varepsilon.$$

В некотором смысле это утверждение можно считать обобщением утверждения о коллинеарности из теоремы Сонда.

Далее, заметим, что

$$\text{прямая } \{O_{T_t,T_\lambda}\} \text{ также является касательной к конике } \varepsilon.$$

Действительно, пусть прямая $\{O_{T_t,T_\lambda}\}$ (при фиксированном λ) и гипербола $\{O_{T_\lambda,T_t}\}$, имеющие общую точку O_{T_λ,T_λ}, повторно пересекаются в точке X. Тогда X имеет вид O_{T_λ,T_r}. Но точка O_{T_r,T_λ} также лежит на прямой $\{O_{T_t,T_\lambda}\}$. Тем самым прямая $\{O_{T_t,T_\lambda}\}$ совпадает с прямой $O_{T_r,T_\lambda}O_{T_\lambda,T_r}$, и нужное нам утверждение следует из предыдущего.

3.7. Дополнительные замечания о конкурентном ортологическом семействе

Продолжим рассматривать неособое невырожденное ортологичное семейство треугольников $\{T_t\}$. Далее в этом разделе считаем, что точки A_t, B_t, C_t движутся линейно по трём различным прямым a, b, c, пересекающимся в точке H, так что любые два треугольника нашего семейства перспективны с перспектором H.

Перспектор как ортоцентр

Докажем, что

Для семейства $\{T_t\}$ существует единственное h (возможно, $h = \infty$) такое, что $A_hB_h \perp c$, $B_hC_h \perp a$, $C_hA_h \perp b$.

Иначе говоря, если $h \neq \infty$, в семействе есть треугольник, для которого H является ортоцентром, в таком случае перспективное ортологичное семейство описывается примером 6 из п. 3.4.

Доказательство. Если $A_\infty B_\infty \perp c$, $B_\infty C_\infty \perp a$, $C_\infty A_\infty \perp b$, то всё доказано.

Иначе пусть для определённости $A_\infty B_\infty$ не перпендикулярно c. Тогда из п. 1.2 следует, что найдётся ровно одно вещественное h, для которого $A_h B_h \perp c$. Если ортоцентр треугольника $A_h B_h C_h$ совпадает с H, то всё доказано. Иначе пусть он находится в точке $H' \neq H$ — очевидно, $H' \in c$. Пусть $H'' = O_{T_s,T_h}$ для некоторого $s \neq h$. Так как $C_s H'' \perp A_h B_h$, получаем, что $H'' \in c$. Тогда есть гомотетия с центром в H, переводящая треугольник $A_s H'' B_s$ в треугольник $A_h H' B_h$. Отсюда $A_s B_s \parallel A_h B_h$, что противоречит тому, что $\{T_t\}$ неособое. □

Таким образом, для найденного параметра h верно $H = O_{T_\lambda,T_h}$ при любом λ. В частности, мы получаем ещё одно объяснение того факта, что гиперболы $\{O_{T_\lambda,T_t}\}$ проходят через H.

Совпадение центров ортологии $O_{T_\lambda,T_\mu} = O_{T_\mu,T_\lambda}$ в точке O

Пусть наше семейство содержит два вырожденных треугольника T_0 и T_1, лежащих на перпендикулярных прямых x и y. Покажем, что точка $O = x \cap y$ лежит на прямой $\{O_{T_t,T_\lambda}\}$ для всех $\lambda \neq 0, 1$, кроме случая $\lambda = h$, когда H — ортоцентр $A_h B_h C_h$. Более того, покажем, что

O является общим центром ортологии для данного треугольника T_λ $(\lambda \neq 0, 1, h)$ и ещё одного треугольника T_μ из нашего семейства, при этом соответствие $\lambda \longleftrightarrow \mu$ дробно-линейно.

Доказательство. Положим $a \cap x = (x_a, 0)$, $a \cap y = (0, y_a)$ и т. д. Тогда для координат вершин треугольника T_λ имеем $A_\lambda = (\lambda x_a, (1-\lambda) y_a)$ и т. д. Условие $OA_\mu \perp B_\lambda C_\lambda$ запишется как

$$\mu\lambda x_a(x_c - x_b) + (1-\mu)(1-\lambda) y_a(y_c - y_b) = 0.$$

Как видим, это равенство симметрично относительно λ и μ, т. е. равносильно перпендикулярности $OA_\lambda \perp B_\mu C_\mu$. Если

$$\lambda \neq \frac{1}{k_a + 1}, \quad \text{где } k_a = \frac{x_a(x_c - x_b)}{y_a(y_c - y_b)},$$

то это равенство преобразуется к виду

$$\mu = \frac{1-\lambda}{1-\lambda(k_a+1)}.$$

Выкладка показывает, что условие равенства аналогичных коэффициентов $k_a = k_b$ (или $k_a = k_c$) эквивалентно конкурентности прямых a, b, c (уравнения которых $x/x_a + y/y_a = 1$ и т. д.). □

Несложно видеть, что особое значение $\lambda = 1/(k_a + 1)$ как раз соответствует тому, что H — ортоцентр треугольника T_λ.

В полученном выше соответствии $\lambda \longleftrightarrow \mu$ возможно равенство $\lambda = \mu$ для не более чем двух значений λ. Это равенство соответствует тому, что O служит ортоцентром для T_λ.

Отметим, что совпадение центров ортологии $O_{T_\mu,T_\lambda} = O_{T_\lambda,T_\mu}$ в принципе возможно не более чем в двух точках пересечения $\{O_{T_t,T_\lambda}\}$ и гиперболы $\{O_{T_\lambda,T_t}\}$. Одна из этих точек — O, и в ней, как мы видели, при $\lambda \neq 0, 1, h$ действительно имеем совпадение центров ортологии, а другая точка — ортоцентр треугольника T_λ.

Случай вырождения T_∞

Рассмотрим случай вырожденного треугольника T_∞. Пусть T_0 — второй вырожденный треугольник, лежащий на прямой y. Покажем, что в этом случае при $\lambda \neq 0$

прямая $\{O_{T_t,T_\lambda}\}$ *параллельна прямой* y.

Доказательство. Непосредственная выкладка в аффинной системе координат Oxy из п. 1.9 показывает, что O_{T_μ,T_λ} (т. е. точка пересечения перпендикуляров, проведённых из A_μ на $B_\lambda C_\lambda$ и из B_μ на $A_\lambda C_\lambda$) имеет абсциссу, не зависящую от μ. □

Видим, что в данном случае гипербола $\{O_{T_\lambda,T_t}\}$ и прямая $\{O_{T_t,T_\lambda}\}$ имеют только одну общую точку (ортоцентр треугольника T_λ).

Пример: задача о мухах на жергоннианах

Задача (Е. Бакаев). Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон в точках A_1, B_1, C_1. Три мухи ползли по прямым AA_1, BB_1, CC_1 с постоянными скоростями так, что в какой-то момент были в точках A, B, C, в другой момент были в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что в моменты, когда мухи были на одной прямой, на этой же прямой лежал центр вписанной окружности, при этом таких моментов два и соответствующие им прямые перпендикулярны. (Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке Жергонна, поэтому их можно назвать жергоннианами.)

Ослабленная версия этой задачи (в которой уже дано, что было два момента коллинеарности) предлагалась на кубке памяти Колмогорова в 2017 г.

Решение. В задаче мы имеем дело с перспективным ортологичным семейством, порождённым треугольниками ABC и $A_1B_1C_1$. Заметим, что ABC и $A_1B_1C_1$ ортологичны, причём оба центра ортологии совпадают с I. Отсюда (или же непосредственно показывая, что $(\overrightarrow{BB_1}-\overrightarrow{AA_1})\nparallel(\overrightarrow{CC_1}-\overrightarrow{AA_1})$) мы видим, что это не случай вырождения T_∞. Тогда из доказанного выше в п. 3.7 мы знаем, что I — точка пересечения перпендикулярных прямых x и y, на которых лежат вырожденные треугольники нашего семейства.

§ 4. Интерпретация в $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}P^3$

Треугольник ABC с точностью до параллельного переноса (сдвига) мы задавали упорядоченной парой (свободных) векторов $(\vec{b},\vec{c})=$ $=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. Пару $(\vec{b},\vec{c})$ можно отождествлять с вектором в $\mathbb{R}^4=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$.

Обсудим, как некоторые предыдущие сюжеты переносятся на эту модель и что они означают на языке линейной алгебры.

4.1. Классы гомотетов

Класс эквивалентности $[ABC]$ также можно однозначно задать парами вида $(\alpha\overrightarrow{AB},\alpha\overrightarrow{AC})$, так что $[ABC]$ соответствует одномерному подпространству в векторном пространстве $\mathbb{R}^4$. Таким образом, множество классов (фактормножество) можно теперь отождествить с проективным пространством $\mathbb{R}P^3$.

4.2. Линейные семейства

Из формул (1), (2) видим, что линейному семейству треугольников $\{A_tB_tC_t\}$ соответствует прямая (т. е. одномерное линейное подмногообразие) в $\mathbb{R}^4=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$, а линейному семейству классов (содержащему хотя бы два различных класса) — двумерное подпространство в $\mathbb{R}^4=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$, которое является линейной оболочкой векторов $(\vec{b}_0,\vec{c}_0)$ и $(\vec{b}_1,\vec{c}_1)$.

4.3. Линейное семейство классов как график

Формуле (2) можно придать следующий вид:

$$(\vec{b},\vec{c})=(\vec{v},\varphi(\vec{v})),\tag{6}$$

где $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ — линейный биективный оператор (автоморфизм) на $\mathbb{R}^2$, определяемый действием на векторах базиса: $\varphi(\vec{b}_t)=\vec{c}_t$, $t=0,1$ (здесь, как и ранее, полагаем $\vec{b}_t=\overrightarrow{A_tB_t}$, $\vec{c}_t=\overrightarrow{A_tC_t}$). Скажем, для примера 1 из п. 1.7 соответствующий оператор φ является поворотной гомотетией.

То, что $(\vec{b}_0, \vec{b}_1)$ и $(\vec{c}_0, \vec{c}_1)$ — действительно базисы, эквивалентно тому, что пары движущихся точек A, B и A, C неособые.

Условие того, что пара B, C особая, означает, что $\overrightarrow{B_0C_0} \parallel \overrightarrow{B_1C_1}$, что равносильно $\varphi(\vec{b}_0) - \vec{b}_0 \parallel \varphi(\vec{b}_1) - \vec{b}_1$, а это эквивалентно вырожденности оператора $\varphi - \mathrm{Id}$ или наличию у φ собственного значения $\lambda = 1$. Наоборот, согласно (6) биективный линейный оператор φ, для которого $\lambda = 1$ не является собственным значением, однозначно задаёт неособое линейное семейство классов треугольников.

4.4. Вырожденные треугольники

Рассмотрим координаты (x_1, x_2, x_3, x_4), где $\vec{b} = (x_1, x_2)$, $\vec{c} = (x_3, x_4)$. Условие вырожденности соответствующего треугольника ABC будет записываться как $x_1x_4 - x_2x_3 = 0$. Как видим, вырожденным треугольникам ABC при соответствии $ABC \mapsto (\vec{b}, \vec{c})$ соответствует асимптотический конус квадратичной формы сигнатуры $(2, 2)$.

Можно переформулировать условие вырожденности треугольника и по-другому, исходя из (6). Видим, что вырожденный треугольник соответствует собственному вектору введённого выше оператора φ (а класс гомотетов вырожденного треугольника соответствует одномерному инвариантному подпространству оператора φ).

Как мы отмечали в п. 1.6, либо в линейном семействе треугольников не более двух вырожденных треугольников, либо все треугольники этого семейства вырожденные. Соответственно, в линейном семействе гомотетов либо не более двух классов вырожденных треугольников, либо все классы состоят из вырожденных треугольников. Теперь доказать это можно другим способом, исходя из φ: либо φ — гомотетия (и тогда соответствующий класс состоит только из вырожденных треугольников), либо φ имеет не более двух собственных векторов с точностью до пропорциональности.

4.5. Ортологичность и самосопряжённый оператор

Получим условие на оператор φ из (6), эквивалентное ортологичности семейства классов.

Условие ортологичности любых двух треугольников ABC, $A'B'C'$ из нашего семейства: $\vec{b}\vec{c}' - \vec{b}'\vec{c} = 0$ означает выполнение равенства

$$\vec{b}\varphi(\vec{b}') - \vec{b}'\varphi(\vec{b}) = 0$$

при любых $\vec{b}$ и $\vec{b}'$, т. е. эквивалентно тому, что φ — самосопряжённый оператор. Таким образом, ортологичным семействам классов соответствуют в точности графики самосопряжённых операторов $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Полученное соответствие позволяет теперь доказать утверждение из п. 3.3 о вырожденных треугольниках ортологичного семейства следующим образом. Известная теорема линейной алгебры гласит: линейный оператор в n-мерном евклидовом пространстве является самосопряжённым тогда и только тогда, когда у него есть ортогональный базис из собственных векторов. В нашем случае $n = 2$ оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ является самосопряжённым тогда и только тогда, когда у него есть пара ортогональных собственных векторов.

4.6. Ортологичность как косоортогональность в $\mathbb{R}^4$

Как мы помним (см. п. 2.5), ортологичность треугольника ABC можно понимать как отношение на $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Зададим на $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \{(\vec{b}, \vec{c})\}$ умножение $*$ равенством

$$(\vec{b}, \vec{c}) * (\vec{b}', \vec{c}') = \vec{b}\vec{c}' - \vec{b}'\vec{c}. \tag{7}$$

Умножение $*$ задаёт на $\mathbb{R}^4$ билинейную кососимметричную невырожденную форму. Согласно (4) отношение ортологичности соответствует «косоортогональности» относительно $*$:

$$ABC \stackrel{\perp}{-} A'B'C' \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{b}, \vec{c}) * (\vec{b}', \vec{c}') = 0. \tag{8}$$

4.7. Косоортогональные дополнения

Будем обозначать ортогональное дополнение к подпространству U относительно введённого билинейного умножения $*$ (или косоортогональное дополнение) через $U^{\perp}$.

Теперь описать в $\mathbb{R}^4$ множество треугольников, ортологичных данному треугольнику ABC, можно так: это (трёхмерное) косоортогональное дополнение к (одномерному) подпространству, порождённому $(\vec{b}, \vec{c})$, т. е. подпространство $\langle(\vec{b}, \vec{c})\rangle^{\perp}$.

Множество треугольников, ортологичных треугольникам ABC и $A'B'C'$ из разных классов $[ABC]$ и $[A'B'C']$ — это (двумерное) подпространство $\langle(\vec{b}, \vec{c}), (\vec{b}', \vec{c}')\rangle^{\perp}$.

Случай $ABC \stackrel{\perp}{-} A'B'C'$ характеризуется тем, что ограничение умножения $*$ на подпространство $\langle(\vec{b}, \vec{c}), (\vec{b}', \vec{c}')\rangle$ — нулевое, а значит, подпространство $\langle(\vec{b}, \vec{c}), (\vec{b}', \vec{c}')\rangle$ совпадает со своим косоортогональным дополнением. Иначе говоря, в этом случае треугольник, ортологичный обоим треугольникам ABC и $A'B'C'$, обязательно принадлежит линейному семейству классов, порождённому классами $[ABC]$ и $[A'B'C']$.

Подпространства со свойством $U^{\perp} = U$ называются *лагранжевыми* (относительно $*$). Так в терминах ортологичности мы пришли к известному соответствию между графиками самосопряжённых операторов и лагранжевыми подпространствами.

Список литературы

[1] *Акопян А. В., Заславский А. А.* Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2011.

[2] *Васильев Н. Б., Егоров А. А.* Задачи Всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука, 1988.

[3] *Заславский А. А.* Теорема Сонда // Математика в задачах. М.: МЦНМО, 2009. С. 135–139.

[4] *Zaslavsky A. A.* Geometry of Kiepert and Grinberg — Myakishev hyperbolas // Journal of Classical Geometry. Vol. 1. P. 65–71.

[5] *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2018.

[6] http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Maxwell.shtml.

[7] Перспективно-ортологические треугольники и тетраэдры // 16-я Летняя конференция Турнира городов, 2004 г. https://www.turgor.ru/lktg/2004/persor.ru/index.htm.

[8] Замечательные точки многоугольников // 30-я Летняя конференция Турнира городов, 2018 г. https://www.turgor.ru/lktg/2018/2/index.html.

Егор Владимирович Бакаев

egor.bakaev@gmail.com

Павел Александрович Кожевников, МФТИ

p.kozhevn@gmail.com