

---

---

# Наш семинар: математические сюжеты

---

---

## Реализуемость гиперграфов и неотъемлемая зацепленность

А. Б. Скопенков

Мы приводим простые доказательства теоремы Конвея — Гордона — Закса о неотъемлемой зацепленности в трёхмерном пространстве, а также теорем ван Кампена — Флореса и Уммеля о неотъемлемых пересечениях. Последние связаны с нереализуемостью некоторых гиперграфов в четырёхмерном пространстве. Доказательства используют сведение к меньшим размерностям, которое позволяет показать связь между этими результатами. Используя элементарный язык, мы преподносим основные идеи без технических подробностей. Поэтому изложение доступно неспециалистам в данной области, включая студентов и школьников, знающих основы стереометрии и готовых изучить простые четырёхмерные обобщения.

### СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение . . . . .	126
1.1. Неотъемлемые пересечения и зацепленность . . . . .	126
1.2. Почему этот обзор может быть интересным? . . . . .	128
1.3. Неотъемлемые пересечения в четырёхмерном пространстве . .	130
1.4. Неотъемлемые пересечения и зацепленность в высших размерностях . . . . .	131
1.5. Кратные пересечения и зацепленность . . . . .	132
§ 2. Доказательства . . . . .	133
2.1. Плоскость: доказательство утверждения 1.1 . . . . .	133
2.2. Ослабленные версии теоремы 1.2 . . . . .	135
2.3. «Количественные» версии . . . . .	135

2.4. Трёхмерное пространство: доказательство теоремы 1.2' . . . . .	137
2.5. Четырёхмерное пространство: доказательства теорем 1.5 и 1.5' . . . . .	139
2.6. Свойства «не зацепленности» . . . . .	141
§ 3. Некоторые важные замечания . . . . .	143
§ 4. Реализуемость произведений и гипотеза Менгера . . . . .	146
4.1. Гипотеза Менгера . . . . .	146
4.2. Реализуемость произведений . . . . .	147
4.3. Реализация произведений . . . . .	149
4.4. Нереализуемость произведений в трёхмерном пространстве . .	150
4.5. Нереализуемость произведений в четырёхмерном пространстве . . . . .	153
Список литературы . . . . .	155

'It's too difficult.'

'Write simply.'

'That's hardest of all.'

*I. Murdoch, The Message  
to the Planet.*

Этот обзор основан на лекциях автора в Московском физико-техническом институте, Независимом Московском университете, Институте науки и технологии (Австрия) и в различных летних школах и математических кружках. Благодарю за перевод текста на русский язык С. Дженжера, а также за полезные обсуждения О. Виро, С. Дженжера, А. Зимина, Дж. Зунга, И. Измestьева, Р. Карасева, А. Руховича, М. Скопенкова, А. Сосинского, С. Табачникова, Г. Челнокова, А. Шаповалова и анонимного рецензента от сборника «Математическое просвещение».

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

### 1.1. НЕОТЪЕМЛЕМЫЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ И ЗАЦЕПЛЕННОСТЬ

«Невозможные конструкции», такие как невозможный куб, треугольник Пенроуза, невозможный трезубец и т. д., хорошо известны, в основном благодаря рисункам Маурица Корнелиса Эшера, см. рис. 1 и [Io], а также [Br68, CKS+, GSS+]. Эти изображения не допускают глобальной пространственной реализации из-за несоответствия локальных пространственных реализаций друг другу. В геометрии, топологии и теории графов также известны базовые примеры «невозможных конструкций» (в которых локальные части «возможны»).

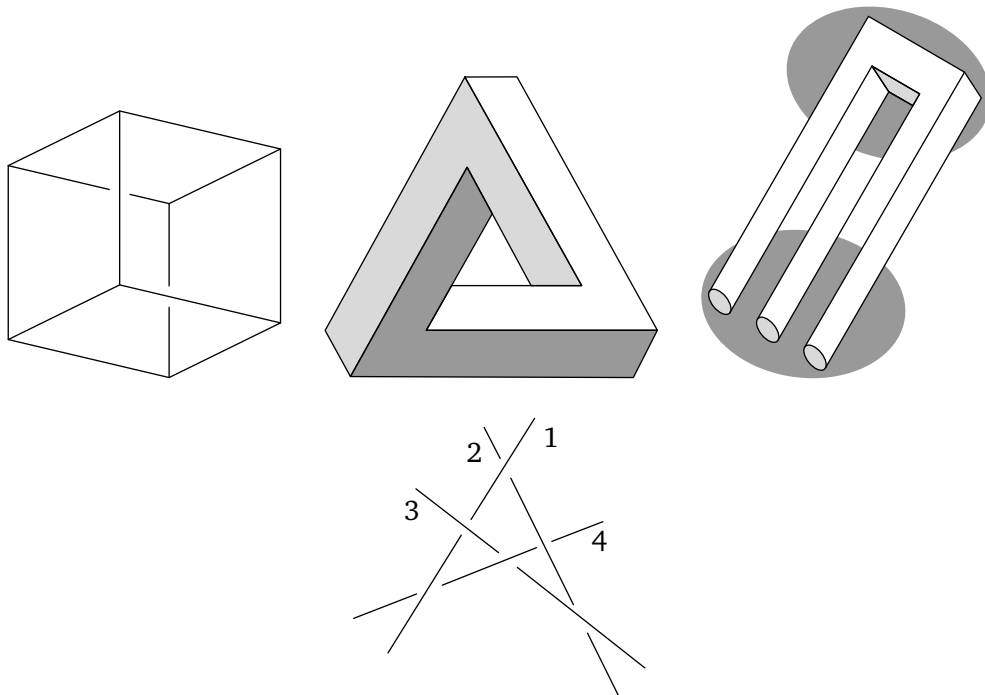


Рис. 1. Невозможный куб, треугольник Пенроуза, трезубец, невозможная проекция

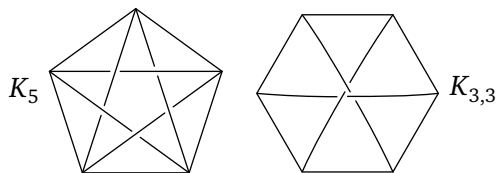


Рис. 2. Непланарные графы  $K_5$  и  $K_{3,3}$

Следующий пример «невозможной конструкции» или «неотъемлемого пересечения» уже напрямую относится к данной статье: *Ни для каких пяти точек на плоскости невозможно попарно соединить их путями так, чтобы пути пересекались только в своих начальных или конечных точках*<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Также невозможно расставить три домика и три колодца на плоскости и соединить путём каждый домик с каждым колодцем так, чтобы пути пересекались только в своих начальных или конечных точках. В терминах теории графов эти утверждения означают, что ни полный граф  $K_5$  на пяти вершинах, ни полный двудольный граф  $K_{3,3}$  не планарен, см. рис. 2. Нижеприведённое утверждение 1.1 является «линейной» версией непланарности графа  $K_5$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1.** Для любых пяти точек на плоскости найдутся два пересекающихся отрезка с концами в этих точках, не имеющие общих вершин.

Далее понадобятся следующие соглашения. Мы сокращаем «трёхмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$ » до «пространство», а « $d$ -мерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^d$ » до « $d$ -мерное пространство» или до « $\mathbb{R}^d$ » (в основном  $d = 4$ ). **Треугольником** называется часть плоскости, ограниченная замкнутой трёхзвенной ломаной.

Возьмём два треугольника в пространстве, никакие 4 из 6 вершин которых не лежат в одной плоскости. Эти треугольники называются **зацепленными**, если контур первого из них пересекает второй треугольник ровно в одной точке. Например, треугольники  $A_1A_3A_5$  и  $A_2A_4A_6$ ,  $\Delta$  и  $\Delta'$  на рис. 3 зацеплены<sup>2)</sup>.

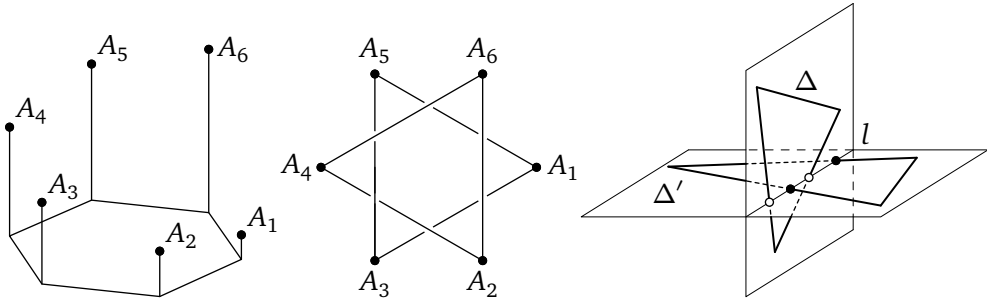


Рис. 3. Зацепленные треугольники

**ТЕОРЕМА 1.2** (Линейная теорема Конвея — Гордона — Зака; [Sa81, CG83]). Если никакие 4 из данных 6 точек в пространстве не лежат в одной плоскости, то найдутся два зацепленных треугольника с вершинами в данных 6 точках.

## 1.2. ПОЧЕМУ ЭТОТ ОБЗОР МОЖЕТ БЫТЬ ИНТЕРЕСНЫМ?

Мы представляем интересные связи между

- «неотъемлемыми пересечениями» на плоскости (утверждения 1.1 и 2.3) и «неотъемлемой зацепленностью» в трёхмерном пространстве (теоремы 1.2 и 2.7);

<sup>2)</sup> Расстояние от точки  $A_j$  до плоскости проекции равно  $j$ . Поэтому проекция на рис. 3 посередине реализуема, в отличие от рис. 1 справа.

Свойство зацепленности симметрично (это не очевидно из определения, но имеет простое доказательство [Sk, Proposition 4.1.2]). Другие вводные результаты о зацепленных треугольниках приведены в [Sk, § 4.1 'Linking of triangles in 3-space'], [Sk24, § 1.1].

- последними результатами в трёхмерном пространстве и «неотъемлемыми пересечениями» в четырёхмерном пространстве (ниже приведённые теоремы 1.5 и 4.2, обобщающие утверждение 1.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3 (о понижении размерности). Часто удобно свести результат на плоскости к результату на прямой, а трёхмерный результат к результату на плоскости. Аналогично четырёхмерный результат можно сводить к трёхмерному, см. примеры в замечании 1.4.

Утверждение 1.1 о неотъемлемых пересечениях на плоскости сводится (в п. 2.1) к утверждению 2.1 о неотъемлемой зацепленности на прямой. Аналогично теорема 1.2 о неотъемлемой зацепленности в пространстве сводится (в п. 2.4) к утверждению 1.1 (более точно, к его количественной версии, утверждению 1.1'). Аналогично ниже приведённая теорема 1.5 о неотъемлемых пересечениях в четырёхмерном пространстве сводится (в п. 2.5) к теореме 1.2. Эта связь между неотъемлемой зацепленностью и неотъемлемыми пересечениями в последовательных размерностях обобщается на высшие размерности (теорема 1.6; мы упоминаем размерности выше четырёх только в этой теореме).

Благодаря такому «понижению размерности» читатель, незнакомый с четырёхмерным пространством, не должен пугаться.

Результаты о неотъемлемых пересечениях дают естественное обобщение непланарности графов: примеры *двумерных* аналогов графов, не реализуемых ни в трёхмерном, ни в четырёхмерном пространствах. Это разъяснено в замечании 3.1.

Мы приводим упрощённое изложение, доступное неспециалистам в этой области. Результаты формулируются в терминах систем точек. Поэтому мы не используем понятия реализуемости гиперграфа (но упоминаем это понятие, поскольку оно важно для *мотивировки*). Для понимания большей части статьи достаточно знать основы стереометрии, а также знать или быть готовым изучить простейшие четырёхмерные обобщения. Мы уверены, что элементарное описание простых приложений топологических методов делает эти методы более доступными. О сравнении с другими доказательствами см. замечание 3.2.

Поразительная связь между «неотъемлемыми пересечениями» и «неотъемлемой зацепленностью» не только даёт простые доказательства классических результатов. Она также подводит читателя к переднему краю науки, в частности, к доказательству обобщённой гипотезы Менгера (объяснённой в § 4). Изложенные результаты о неотъемлемой зацепленности являются отправной точкой (*рамсеевской*)

теории неотъемлемых зацеплений. См. обзоры [RA05, PS05, FMM+, Na20] и ссылки в них; о многомерных аналогах см. [SS92, Sk03, KS20]. Изложенные результаты о неотъемлемых пересечениях обобщаются до *нереализуемости гиперграфов*. См. обзоры [Sk06, § 4, § 5], [MTW, § 1], [Sk18, § 3.2], [Sk23', § 3] и ссылки в них, а также недавние работы [Pa15, Sk18o, AKM, PS20, Pa21, Me22, Sk23]. Об аналогичных проблемах, относящихся к вложениям динамических систем, см. [LT14] и ссылки в этой работе.

История вопроса изложена в замечании 3.3.

**О независимости.** Формально, замечания в дальнейшем не используются и могут быть пропущены. То же верно для п. 1.4 и п. 1.5. Параграфы 2, 3 и 4 независимы друг от друга, так что их можно читать в любом порядке. Ссылки на последующий текст, как и ссылки на другие работы, могут быть проигнорированы при первом чтении.

### 1.3. НЕОТЪЕМЛЕМЫЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ В ЧЕТЫРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Замечание 1.4 (наглядные результаты о четырёхмерном пространстве). (а) «Типичное» пересечение

- двух отрезков на плоскости — либо пустое множество, либо точка (здесь под «типичностью» подразумевается, что никакие три из концов отрезков не лежат на одной прямой);
- отрезка и треугольника в пространстве — либо пустое множество, либо точка;
- двух треугольников в четырёхмерном пространстве — либо пустое множество, либо точка.

(б) Для любых двух точек

- плоскости, отличных от некоторой точки  $A$ , найдётся ломаная, соединяющая эти две точки и не проходящая через  $A$ ;
- пространства, не лежащих на некоторой прямой  $l$ , найдётся ломаная, соединяющая эти две точки и не пересекающаяся с  $l$ ;
- четырёхмерного пространства, не лежащих в некоторой двумерной плоскости  $\alpha$ , найдётся ломаная, соединяющая эти две точки и не пересекающаяся с  $\alpha$ .

(с) Более продвинутая интуиция о четырёхмерном пространстве не является здесь необходимой, однако она может быть развита изучением, например, [Sk, § 5.1 «Как работать с четырёхмерным пространством»], [Sk24, § 2.1].

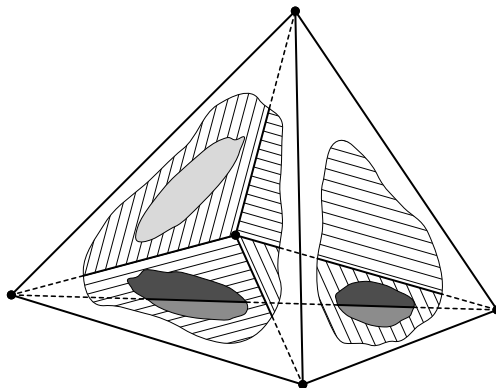


Рис. 4. Пять точек в  $\mathbb{R}^3$  (реализация полного 3-однородного гиперграфа на 5 вершинах)

**ТЕОРЕМА 1.5** (линейная теорема ван Кампена — Флореса; [vK32, Fl34]). *Для любых 7 точек в четырёхмерном пространстве найдутся два пересекающихся треугольника с вершинами в этих точках, не имеющие общих вершин.*

Аналоги теоремы 1.5 верны для 5 точек на плоскости и для 6 точек в пространстве (утверждения 1.1 и 2.4.b). Аналоги утверждения 1.1 и теоремы 1.5 неверны для 4 точек на плоскости и 6 точек в четырёхмерном пространстве соответственно: в  $\mathbb{R}^{2k}$  возьмём  $2k + 1$  вершину и внутреннюю точку  $2k$ -симплекса, ср. рис. 4.

#### 1.4. НЕОТЪЕМЛЕМЫЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ И ЗАЦЕПЛЕННОСТЬ В ВЫСШИХ РАЗМЕРНОСТЯХ

Подмножество в  $\mathbb{R}^d$  называется *выпуклым*, если для любых двух точек этого подмножества отрезок, их соединяющий, также лежит в этом подмножестве. *Выпуклой оболочкой* множества  $X \subset \mathbb{R}^d$  называется минимальное выпуклое множество, содержащее  $X$ .

**ТЕОРЕМА 1.6.** *Даны  $d + 3$  точки в  $\mathbb{R}^d$ .*

*Если  $d = 2k$ , то среди них найдутся два непересекающихся  $(k + 1)$ -элементных подмножества, выпуклые оболочки которых пересекаются.*

*Если  $d = 2k - 1$  и никакие  $2k$  из данных точек не лежат в одной  $(2k - 2)$ -мерной гиперплоскости, то найдётся зацепленная пара  $(k + 1)$ -элементных подмножеств с вершинами в данных точках (зацепленность означает, что выпуклая оболочка первого подмножества пересекает границу выпуклой оболочки второго подмножества в нечётном числе точек).*

Эта теорема обобщает утверждение 1.1 (возьмите  $d = 2$ ), теорему 1.2 (возьмите  $d = 3$ ) и теорему 1.5 (возьмите  $d = 4$ ). Она принадлежит ван Кампену — Флоресу для чётных  $d > 2$  [vK32, Fl34] и Сегалу — Спешу — Ловасу — Шриверу — Танияме для нечётных  $d > 3$  [LS98, Corollary 1.1], [Ta00] (рассуждение про индексы в [SS92, § 1] допускает простое обобщение до теоремы 1.6; поэтому теорема 1.6 для нечётных  $d > 3$  неявно доказана в [SS92]).

Теорема 1.6 доказывается индукцией по  $d$ . База  $d = 1$  тривиальна. Шаг индукции доказан в § 2 для  $d = 2, 3, 4$ ; доказательство для общего случая аналогично.

Аналог теоремы 1.6 для  $d + 2$  точек

- не имеет смысла для  $d = 2k - 1$ , поскольку среди  $2k + 1$  точек в  $\mathbb{R}^{2k-1}$  невозможно взять два зацепленных подмножества;
- неверен для чётных  $d$  аналогично контрпримеру к соответствующему аналогу теоремы 1.5.

Для нечётных  $d$  имеется утверждение 2.4.b о неотъемлемых пересечениях и его многомерный аналог. Они слабее соответствующих теорем 1.2 и 1.6 о неотъемлемой зацепленности. Другие результаты приведены в [Sk16, § 4].

## 1.5. Кратные пересечения и зацепленность

Сформулируем аналог вышеприведённых результатов для трёхкратных неотъемлемых пересечений.

**ТЕОРЕМА 1.7** [Sa91g]. *Для любых 11 точек в пространстве найдутся три треугольника с вершинами в этих точках, имеющие общую точку, никакие два из которых не имеют общих вершин.*

Удивительно, что известное доказательство такого элементарного результата использует алгебраическую топологию. Интересно найти элементарное доказательство.

**ПРИМЕР 1.8.** В пространстве возьмём вершины тетраэдра и его центр, см. рис. 4. Либо возьмём каждую из этих 5 точек с кратностью два, либо для каждой из них возьмём близкую к ней. Получим 10 точек, для которых аналог теоремы 1.7 неверен.

О многомерном  $r$ -кратном аналоге теорем 1.6 и 1.7 см. [Sk16, Theorem 1.6], [Sk23', гипотеза 3.1.4 и текст после неё].

Сформулируем аналоги вышеприведённых результатов для неотъемлемой тройной зацепленности.



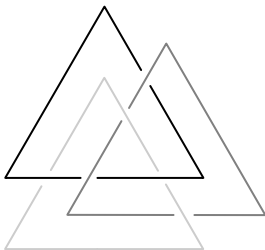


Рис. 5. Борромеевская тройка треугольников

Найдутся три попарно незацепленных треугольника в пространстве, которые вместе «зацеплены» (рис. 5; можно проверить, что эта проекция реализуема, в отличие от рис. 1 справа). Такая тройка называется *борромеевской*, ср. [Val] и [Sk, § 4.6].

**ТЕОРЕМА 1.9 [Ne91].** *Существует целое  $N > 0$  такое, что если никакие 4 из данных  $N$  точек в пространстве не лежат в одной плоскости, то найдётся борромеевская тройка треугольников с вершинами в данных точках.*

См. также [PS05, FNP]. Было бы интересно получить аналог теоремы 1.9 с конкретным  $N$ . Ввиду примера 1.8, взять  $N = 10$  нельзя. Можно ли взять  $N = 11$  (как в теореме 1.7)? Можно поставить компьютерный эксперимент, чтобы решить эту задачу, используя эквивалентное определение борромеевности [Ko19]. Было бы интересно получить многомерные  $r$ -кратные аналоги теоремы 1.9, ср. [BL, FFN+].

## § 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Под  $k$  точками в  $\mathbb{R}^d$  (в этой статье в основном  $d \leq 4$ ) подразумевается  $k$  попарно различных точек. Обозначим  $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ .

### 2.1. Плоскость: доказательство утверждения 1.1

Утверждение 1.1 легко доказывается перебором количества вершин в выпуклой оболочке 5 точек. Чтобы продемонстрировать идею «понижения размерности» (см. замечание 1.3) в наипростейшей ситуации, мы также выведем утверждение 1.1 из следующего очевидного одномерного результата.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1.** *Из любых 4 точек на прямой можно покрасить две в красный, а две в синий цвет так, что цвета будут чередоваться: красный–синий–красный–синий или синий–красный–синий–красный (иными словами, «красная пара зацеплена с синей»).*

Доказательство утверждения 1.1. Существует прямая, относительно которой ровно одна точка  $O$  из данных 5 лежит по одну сторону, а остальные точки  $A, B, C, D$  — по другую. Если для некоторых двух точек  $X, Y \in \{A, B, C, D\}$  точка  $X$  лежит на отрезке  $OY$ , то утверждение доказано. В противном случае можно считать, что точки  $A, B, C, D$  видны из точки  $O$  именно в таком порядке, см. рис. 6. Тогда получаем нужное по нижеприведённой лемме 2.2.  $\square$

ЛЕММА 2.2 (о понижении размерности; см. рис. 6 слева). Даны два треугольника на плоскости, имеющие единственную общую вершину. Прямая  $l$  отделяет её от оснований треугольников. Пересечения прямой  $l$  с контурами треугольников чередуются вдоль прямой. Тогда некоторые две стороны треугольников пересекаются, не имея общих вершин.

Эта лемма тривиальна. Она сформулирована явно для удобства её применения (здесь и в п. 2.5) и для иллюстрации её многомерного обобщения (лемма 2.8).

Следующие утверждения доказываются аналогично утверждению 1.1. Они используются для некоторых трёхмерных результатов (утверждения 4.1.ab и теорема 2.7).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. (а) (См. рис. 2 справа.) Даны две тройки точек на плоскости. Тогда найдутся два пересекающихся отрезка, не имеющие общих вершин, каждый из которых соединяет точки из разных троек.

(б) (См. рис. 6 справа.) Даны четыре красных и две синих точки  $B_1, B_2$  на плоскости, для которых любые два отрезка с разноцветными концами либо не пересекаются, либо пересекаются по общему концу. Тогда найдутся две красные точки  $R_1, R_2$  такие, что четырёхугольник

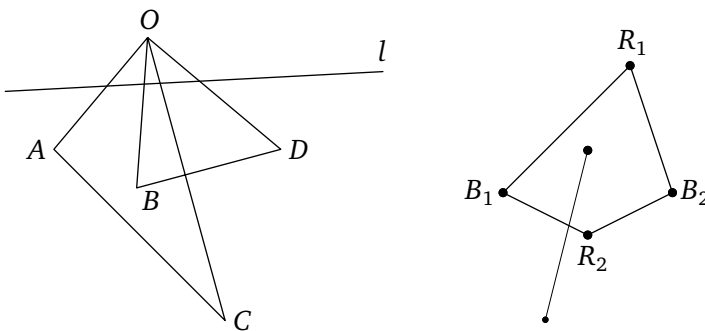


Рис. 6. Слева: к доказательству утверждения 1.1.  
Справа: к утверждению 2.3.b

$R_1B_1R_2B_2$  несамопересекающийся, а две оставшиеся красные точки лежат по разные стороны от этого четырёхугольника. («По разные стороны» означает, что ломаная общего положения, соединяющая две оставшиеся красные точки, пересекает контур четырёхугольника в нечётном числе точек.)

### 2.2. ОСЛАБЛЕННЫЕ ВЕРСИИ ТЕОРЕМЫ 1.2

Сначала мы проиллюстрируем идею «понижения размерности» (см. замечание 1.3) доказательством следующих ослабленных версий теоремы 1.2.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4. Среди любых 6 точек в пространстве найдутся  
 (а) 5 точек  $O, A, B, C, D$ , для которых треугольники  $OAB$  и  $OCD$  имеют общую точку, отличную от  $O$ ;

(б) непересекающиеся пара и тройка, для которых отрезок, соединяющий вершины пары, пересекает треугольник, образованный тройкой.

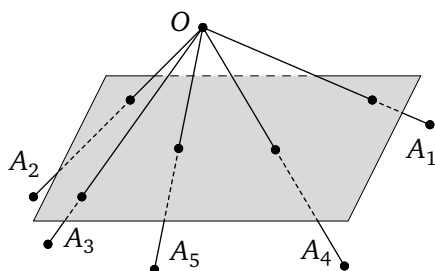


Рис. 7. К доказательствам утверждения 2.4.а и теоремы 1.2'.  
 Плоскость в  $\mathbb{R}^3$  пересекает отрезки  $OA_1, \dots, OA_5$  по точкам  $A'_1, \dots, A'_5$

Доказательство части (а). Существует плоскость, по одну сторону от которой лежит ровно одна точка  $O$  из данных, а остальные 5 точек — по другую. Рассмотрим пересечение этой плоскости с объединением треугольников  $OAB$  для всех пар  $A, B$  данных точек. Теперь часть (а) следует из утверждения 1.1.  $\square$

Часть (б) вытекает из (а) (и наоборот).

Часть (б) является пространственным аналогом утверждения 1.1.

Рисунок 4 показывает, что аналог части (а) для 5 точек неверен.

### 2.3. «КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ» ВЕРСИИ

Мы доказываем следующие усиленные «количественные» (алгебраические) версии результатов из § 1. (Вывод теоремы 1.2 из утвер-

ждения 1.1, а не из его «количественной» версии, содержит перебор, который трудно обобщить на высшие размерности.)

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1'** (очевидное). Любые 4 точки на прямой можно единственным (с точностью до порядка) способом разбить на две незацепленные пары.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1'**. Даны 5 точек на плоскости, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Тогда количество точек пересечения внутренностей отрезков, соединяющих данные 5 точек, нечётно.

Это легко доказывается перебором выпуклых оболочек данных 5 точек, или вытекает из утверждения 2.1' и следующей леммы.

**ЛЕММА 2.2'**. (а) Даны два треугольника на плоскости, имеющие единственную общую вершину  $O$ . Никакие 3 из их 5 вершин не лежат на одной прямой. Прямая  $l$  отделяет вершину  $O$  от оснований треугольников. Тогда контуры треугольников пересекаются в чётном числе точек тогда и только тогда, когда пересечения прямой  $l$  с контурами треугольников чередуются вдоль прямой (т. е. когда пересечение одного треугольника с контуром другого содержит ровно один отрезок с концом в  $O$ ).

(б) Даны 5 точек  $O, A_1, A_2, A_3, A_4$  на плоскости, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Тогда количество из утверждения 1.1' равно сумме количеств точек пересечения внутренностей сторон треугольников  $OPQ$  и  $ORS$  по всем неупорядоченным разбиениям точек  $A_1, A_2, A_3, A_4$  на две неупорядоченные пары  $P, Q$  и  $R, S$ .

(с) [DGN+, Proposition 7.5.a] Обозначим через  $X = \binom{[5]}{2}$  множество всех неупорядоченных пар двухэлементных подмножеств множества  $[5]$ . Для каждого (из всех трёх) неупорядоченного разбиения  $\sigma \sqcup \tau = [4]$  на двухэлементные множества обозначим

$$T_{\{\sigma, \tau\}} := \{ \{\alpha, \beta\} \in X : \alpha \subset \sigma \sqcup \{5\}, \beta \subset \tau \sqcup \{5\} \}.$$

При этих обозначениях пара  $\{\alpha, \beta\} \in X$  лежит в нечётном числе множеств  $T_{\{\sigma, \tau\}}$  (т. е. в одном или в трёх из этих трёх множеств) тогда и только тогда, когда<sup>3)</sup>  $\alpha \cap \beta = \emptyset$ .

Часть (а) аналогична лемме 2.2 (и тривиальна). Часть (б) следует из (с). Несложное доказательство части (с) оставляем читателю.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.5.** Утверждение 1.1' действительно сильнее утверждения 1.1, поскольку достаточно доказать утверждение 1.1 при до-

<sup>3)</sup> Иными словами, сумма по модулю 2 (симметрическая разность) множеств  $T_{\{\sigma, \tau\}}$  по всем таким разбиениям  $\sigma \sqcup \tau = [4]$  равна  $\{ \{\alpha, \beta\} \in X : \alpha \cap \beta = \emptyset \}$ .

полнительном условии, что никакие 3 из 5 точек не лежат на одной прямой

(а) во-первых, так как иначе утверждение 1.1 очевидно: если точки  $A, B, C$  среди данных пяти лежат на одной прямой,  $B$  лежит между  $A$  и  $C$ , а  $D$  — любая другая оставшаяся точка, то отрезки  $AC$  и  $BD$  пересекаются,

(б) во-вторых, так как можно немного пошевелить данные точки, чтобы никакие 3 из 5 пошевелённых точек не лежали на одной прямой и чтобы не добавилось точек пересечения отрезков с различными концами.

Аналогично рассуждению (б) получаем, что нижеприведённые теоремы 1.2' и 1.5' сильнее теорем 1.2 и 1.5.

Треугольники, отличающиеся перестановкой вершин, считаются одинаковыми.

**ТЕОРЕМА 1.2'** [Sa81, CG83]. *Даны 6 точек в пространстве, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости. Тогда количество неупорядоченных пар зацепленных треугольников с вершинами в данных 6 точках нечётно.*

**ТЕОРЕМА 1.5'** [vK32, Fl34]. *Даны 7 точек в  $\mathbb{R}^4$ , никакие 5 из которых не лежат в одной трёхмерной гиперплоскости. Тогда количество точек пересечения пар треугольников с вершинами в данных 7 точках нечётно.*

Теорема 1.6 имеет аналогичную количественную версию.

Другие количественные версии приведены в п. 2.6. О контрпримерах к «целочисленным версиям» см. [KS20, Proposition 1.2 and Theorem 1.4].

#### 2.4. ТРЁХМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2'

В пространстве отрезок  $p$  ниже отрезка  $q$  (при взгляде из точки  $O$ ), если существует точка  $X \in p$ , для которой отрезки  $OX$  и  $q$  пересекаются.

**ЛЕММА 2.6** (о понижении размерности). *Даны 6 точек  $O, A_1, \dots, A_5$  в пространстве, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости. Тогда треугольники  $OA_1A_2$  и  $A_3A_4A_5$  зацеплены тогда и только тогда, когда отрезок  $A_1A_2$  ниже ровно одной стороны треугольника  $A_3A_4A_5$ .*

Лемма следует из того, что количество сторон треугольника  $A_3A_4A_5$ , ниже которых отрезок  $A_1A_2$ , равно количеству точек пересечения контура треугольника  $A_3A_4A_5$  с треугольником  $OA_1A_2$ .

Доказательство теоремы 1.2'. Существует плоскость  $\alpha$ , по одну сторону от которой лежит ровно одна точка  $O$  из данных, а остальные точки  $A_1, \dots, A_5$  — по другую (рис. 7). Возьмём 5 точек пересечения плоскости  $\alpha$  с отрезками  $OA_1, \dots, OA_5$ . Так как никакие 4 из данных 6 точек не лежат в одной плоскости, то никакие 3 из взятых 5 точек не лежат на одной прямой. На плоскости  $\alpha$  мы получаем картину, аналогичную рис. 3 посередине. Тогда следующие числа имеют одинаковую чётность:

- количество  $P$  зацепленных неупорядоченных пар треугольников, образованных данными 6 точками;
- количество  $Q$  отрезков  $A_i A_j$ , лежащих ниже нечётного количества сторон их «дополнительных» треугольников  $A_k A_l A_m$ ,  $\{i, j, k, l, m\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ;
- количество «проходов», т. е. таких упорядоченных пар  $(A_i A_j, A_k A_l)$  отрезков, у которых первый отрезок ниже второго;
- количество точек пересечения внутренностей отрезков с концами в 5 взятых точках в  $\alpha$ .

Здесь числа  $P$  и  $Q$  имеют одинаковую чётность ввиду леммы 2.6 о понижении размерности: отрезок не может пересекать треугольник более, чем по двум точкам, поэтому в лемме можно заменить «ровно одной стороны» на «нечётного числа сторон».

По утверждению 1.1' последнее число нечётно. Следовательно,  $P$  также нечётно.  $\square$

Следующая версия теоремы 1.2 аналогично сводится к утверждению 2.3.b [Zi13]. Эта версия используется для некоторого четырёхмерного результата (теорема 4.2) в п. 4.5.

Возьмём два пространственных четырёхугольника (т. е. две замкнутые четырёхзвенные ломаные)  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$ , никакие 4 из 8 вершин которых не лежат в одной плоскости. Четырёхугольники называются *зацепленными по модулю 2*, если количество точек пересечения четырёхугольника  $ABCD$  с объединением треугольников  $A'B'C'$  и  $A'D'C'$  нечётно.

(В отличие от случая треугольников, в пространстве существуют *зацепленные* четырёхугольники, не являющиеся при этом зацепленными по модулю 2, см. рис. 8. Ср. с определением в начале п. 4.5.)

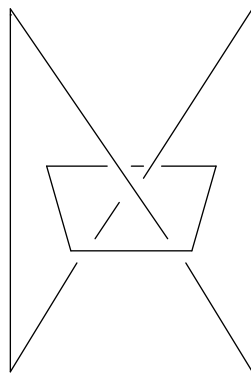


Рис. 8. Зацепление Уайтхеда, образованное пространственными четырёхугольниками

**ТЕОРЕМА 2.7 [Sa81].** *Даны 4 красные и 4 синие точки в пространстве. Никакие 4 из этих 8 точек не лежат в одной плоскости. Тогда найдутся два зацепленных по модулю 2 пространственных четырёхугольника, состоящие из отрезков с разноцветными концами.*

**2.5. ЧЕТЫРЁХМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО:  
ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1.5 И 1.5'**

**Доказательство теоремы 1.5.** Существует трёхмерная гиперплоскость  $\alpha$ , по одну сторону от которой лежит ровно одна точка  $O$  из данных, а остальные 6 точек — по другую (рис. 9). Возьмём 6 точек пересечения плоскости  $\alpha$  с отрезками, соединяющими  $O$  с остальными точками. Можно считать, что никакие 5 из данных 7 точек не лежат в одной трёхмерной гиперплоскости (аналогично замечанию 2.5.b). Значит, никакие 4 из взятых 6 точек в  $\alpha$  не лежат в одной плоскости. Тогда по теореме 1.2 имеются два зацепленных треугольника с вершинами во взятых точках. Теперь получаем нужное по нижеприведённой лемме 2.8. □

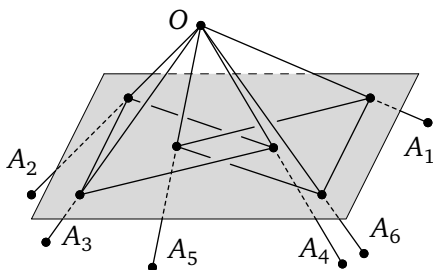


Рис. 9. К доказательству теоремы 1.5; гиперплоскость  $\alpha$  в  $\mathbb{R}^4$  изображена как плоскость в  $\mathbb{R}^3$

**ЛЕММА 2.8 (о понижении размерности).** *Даны два тетраэдра  $\tau$  и  $\tau'$  в  $\mathbb{R}^4$ , имеющие единственную общую вершину. Трёхмерная гиперплоскость  $\alpha$  отделяет её от оснований тетраэдров. Контуры треугольников  $\alpha \cap \tau$  и  $\alpha \cap \tau'$  не пересекаются и зацеплены в гиперплоскости  $\alpha$ . Тогда некоторые две грани тетраэдров пересекаются, не имея общих вершин.*

Эта лемма не так очевидна, как её маломерные аналоги (лемма 2.2 и аналогичный результат для треугольника и тетраэдра в пространстве), поскольку поверхность тетраэдра в  $\mathbb{R}^4$  не разбивает пространство  $\mathbb{R}^4$  (ср. с замечанием 1.4.b).

**Доказательство леммы 2.8.** Обозначим через  $\gamma$  плоскость пересечения трёхмерных гиперплоскостей, натянутых на тетраэдры. Тогда

$\alpha \cap \gamma$  — прямая пересечения плоскостей зацепленных треугольников  $\alpha \cap \tau$  и  $\alpha \cap \tau'$ . Значит,  $\tau \cap \gamma$  и  $\tau' \cap \gamma$  — треугольники с общей вершиной  $O$ , являющейся общей вершиной тетраэдров (рис. 6 слева). Так как  $\alpha$  отделяет  $O$  от оснований тетраэдров, то  $\alpha \cap \gamma$  отделяет  $O$  от оснований этих треугольников. Так как треугольники  $\alpha \cap \tau$  и  $\alpha \cap \tau'$  зацеплены, то точки пересечения прямой  $\alpha \cap \gamma$  с контурами треугольников  $\tau \cap \gamma$  и  $\tau' \cap \gamma$  чередуются вдоль этой прямой [Sk, утверждение 4.1.3.b] (ср. рис. 3 справа). Следовательно, по лемме 2.2 две стороны треугольников  $\tau \cap \gamma$  и  $\tau' \cap \gamma$  пересекаются, не имея общих вершин. Не более одной из этих сторон содержит точку  $O$ . Поэтому найденные стороны лежат в пересекающихся гранях тетраэдров, не имеющих общих вершин.  $\square$

Теорема 1.5' вытекает из теоремы 1.2' и следующей леммы 2.8'.

ЛЕММА 2.8'. (а) Даны два тетраэдра  $\tau$  и  $\tau'$  в  $\mathbb{R}^4$ , имеющие единственную общую вершину  $O$ . Никакие 5 из их 7 вершин не лежат в одной трёхмерной гиперплоскости. Трёхмерная гиперплоскость  $\alpha$  отделяет  $O$  от оснований тетраэдров. Тогда поверхности тетраэдров  $\tau$  и  $\tau'$  пересекаются в чётном числе точек тогда и только тогда, когда треугольники  $\alpha \cap \tau$  и  $\alpha \cap \tau'$  зацеплены в гиперплоскости  $\alpha$  (т. е. когда пересечение одного тетраэдра с поверхностью другого содержит ровно один отрезок с концом в  $O$ ).

(б) Даны 7 точек  $O, A_1, \dots, A_6 \in \mathbb{R}^4$ , никакие 5 из которых не лежат в одной трёхмерной гиперплоскости. Тогда количество из теоремы 1.5' равно сумме количеств точек пересечения внутренних граней тетраэдров  $O\Delta$  и  $O\Delta'$  по всем неупорядоченным разбиениям точек  $A_1, \dots, A_6$  на две неупорядоченные тройки  $\Delta$  и  $\Delta'$ . (Внутренностью треугольника называется дополнение до его контура.)

(с) Обозначим через  $X = \binom{[7]}{3 \atop 2}$  множество всех неупорядоченных пар трёхэлементных подмножеств множества  $[7]$ . Для каждого (из всех десяти) неупорядоченного разбиения  $\sigma \sqcup \tau = [6]$  на трёхэлементные множества обозначим

$$T_{\{\sigma, \tau\}} := \{ \{ \alpha, \beta \} \in X : \alpha \subset \sigma \sqcup \{7\}, \beta \subset \tau \sqcup \{7\} \}.$$

При этих обозначениях пара  $\{ \alpha, \beta \} \in X$  лежит в нечётном числе множеств  $T_{\{\sigma, \tau\}}$  тогда и только тогда, когда<sup>4)</sup>  $\alpha \cap \beta = \emptyset$ .

<sup>4)</sup> Иными словами, сумма по модулю 2 множеств  $T_{\{\sigma, \tau\}}$  по всем таким разбиениям равна  $\{ \{ \alpha, \beta \} \in X : \alpha \cap \beta = \emptyset \}$ .



Часть (а) аналогична лемме 2.8. Часть (б) следует из (с). Несложное доказательство части (с) оставляем читателю.

Следующая четырёхмерная версия утверждения 2.3.а связана (аналогично теореме 1.5) с некоторым трёхмерным результатом о неотъемлемой зацепленности [DS22, Remark 2.5].

**ТЕОРЕМА 2.9** [vK32, Fl34]. *Даны три тройки точек в  $\mathbb{R}^4$ . Тогда найдутся два пересекающихся треугольника без общих вершин, вершины каждого из которых лежат в трёх разных тройках.*

## 2.6. СВОЙСТВА «НЕ ЗАЦЕПЛЕННОСТИ»

Здесь мы приводим количественные версии, утверждающие чётность количества пересечений (или зацепленностей), ср. п. 2.3.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.10.** (2) *Существуют 5 точек плоскости, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой, и такие, что любой отрезок, соединяющий две из них, пересекает контур треугольника, образованного остальными тремя, в чётном числе точек. (То есть каждая пара точек «не зацеплена» с треугольником, образованным остальными тремя.)*

(2') *Даны 5 точек на плоскости, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Тогда количество отрезков, их соединяющих и пересекающих ровно в одной точке контур треугольника, образованного остальными тремя точками, чётно.*

В пространстве вместо свойств не зацепленности 2.10.2,2' есть свойство зацепленности (теорема 1.2) и следующие свойства не зацепленности.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.11.** (3) *Существуют 6 точек в пространстве, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости, и такие, что любой отрезок, соединяющий две из них, пересекает поверхность тетраэдра, образованного остальными четырьмя, в чётном числе точек. (То есть каждая пара точек «не зацеплена» с тетраэдром, образованным остальными четырьмя.)*

(3') *Даны 6 точек в пространстве, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости. Тогда количество отрезков, их соединяющих и пересекающих ровно в одной точке поверхность тетраэдра, образованного остальными четырьмя точками, чётно.*

**НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.** (3) Возьмём точки, близкие к вершинам правильного октаэдра, или точки, близкие к вершинам треугольной призмы, или точки на кривой моментов.

(3') Любые два треугольника, натянутых на две непересекающиеся тройки данных точек, либо не пересекаются, либо пересекаются по отрезку (не вырожденному в точку). Концов таких отрезков чётное число. Концы таких отрезков — в точности точки пересечения отрезков, соединяющих данные точки, с поверхностями «дополнительных» тетраэдров.

ДРУГОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\sum_{\{A,B\}} |AB \cap \partial T_{AB}|_2 = \sum_{\{A,B\}} (|A \cap T_{AB}|_2 + |B \cap T_{AB}|_2) = \sum_A \sum_{B \neq A} |A \cap T_{AB}|_2 = 0.$$

Здесь

- $|S|_2$  — чётность количества элементов в конечном множестве  $S$ ;
- $T_{AB}$  — тетраэдр, образованный четырьмя данными точками, отличными от  $A, B$ ;
- последнее равенство верно, поскольку для любой точки  $A$  множество  $\{T_{AB}\}_{B \neq A}$  является 3-циклом, ср. [Sk23, замечание 1.3.6b].  $\square$

Утверждения 1.1, 1.1', 2.4.b и 2.11.3' показывают, что при переходе от размерности 2 к размерности 3 свойство существования пересечения сохраняется, а чётность числа пересечений меняется. Трёхмерные аналоги утверждений 1.1, 1.1' имеют более сильную форму: теоремы 1.2 и 1.2'.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.12.** (4–3) *Существуют 7 точек в  $\mathbb{R}^4$ , никакие 5 из которых не лежат в одной трёхмерной гиперплоскости, и такие, что любой треугольник, образованный тремя из них, пересекает поверхность тетраэдра, образованного остальными четырьмя точками, в чётном числе точек [St]. (То есть никакой треугольник, образованный тремя из этих точек, «не зацеплен» с тетраэдром, образованным остальными четырьмя.)*

(4'–3) *Даны 7 точек в  $\mathbb{R}^4$ , никакие 5 из которых не лежат в одной трёхмерной гиперплоскости. Тогда количество треугольников, образованных тремя из них и пересекающих ровно в одной точке поверхность тетраэдра, образованного остальными четырьмя точками, чётно.*

(4–2) (гипотеза) *Существуют 7 точек в  $\mathbb{R}^4$ , никакие 5 из которых не лежат в одной трёхмерной гиперплоскости, и такие, что любой отрезок, соединяющий две из них, пересекает поверхность четырёхмерного симплекса, образованного остальными пятью точками, в чётном числе точек. (То есть никакая пара точек «не зацеплена» с четырёхмерным симплексом, образованным остальными пятью.)*

(4'–2) Даны 7 точек в  $\mathbb{R}^4$ , никакие 5 из которых не лежат в одной трёхмерной гиперплоскости. Тогда количество точек пересечения отрезков, их соединяющих, с трёхмерными поверхностями четырёхмерных симплексов, образованных остальными пятью точками, чётно.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. (4–3) Возьмём точки на кривой моментов [St].

(4'–3) Пометим все точки пересечения пар треугольников, натянутых на две непересекающиеся тройки данных точек (это точки из теоремы 1.5'). Тогда искомое количество равно удвоенному числу помеченных точек. Следовательно, это количество чётно.

(4–2) Попробуйте взять точки на кривой моментов.

(4'–2) Аналогично другому доказательству утверждения 2.11.3'.  $\square$

ГИПОТЕЗА 2.13. ( $d-k$ ) Для любого  $d \neq 2k - 1$  существуют  $d + 3$  точек в  $\mathbb{R}^d$ , никакие  $d + 1$  из которых не лежат в одной  $(d - 1)$ -мерной гиперплоскости, и такие, что любой  $k$ -симплекс, натянутый на  $k + 1$  из них, пересекает поверхность  $(d + 1 - k)$ -симплекса, натянутого на остальные  $d + 2 - k$  точек, в чётном числе точек.

Указание. Попробуйте взять точки на кривой моментов.

( $d-k$ ) Даны  $d + 3$  точек в  $\mathbb{R}^d$ , никакие  $d + 1$  из которых не лежат в одной  $(d - 1)$ -мерной гиперплоскости. Тогда при  $d \neq 2k - 1$  количество  $k$ -симплексов, натянутых на  $k + 1$  из них и пересекающих ровно в одной точке поверхность  $(d + 1 - k)$ -симплекса, натянутого на остальные  $d + 2 - k$  точек, чётно.

Указание. Индукция по  $k$ ; аналогично другому доказательству утверждения 2.11.3'.

### § 3. НЕКОТОРЫЕ ВАЖНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1 (связь с гиперграфами). (а) Двумерными аналогами (конечных) графов являются 3-однородные, или двумерные гиперграфы, определяемые как системы трёхэлементных подмножеств конечного множества<sup>5)</sup>. Для краткости мы опускаем «3-однородный» и «двумерный». Например, полным гиперграфом на  $k$  вершинах называется семейство всех трёхэлементных подмножеств  $k$ -элементного множества. Реализуемость (также называемая вложимостью) гипер-

<sup>5)</sup> В топологии такие объекты называются чистыми, или размерностно однородными, двумерными симплицальными комплексами. Термин «гиперграф» знаком большинству математиков и специалистам по компьютерным наукам.

графа в  $d$ -мерном пространстве определяется аналогично реализуемости графа на плоскости: надо «рисовать» треугольники для каждого трёхэлементного подмножества. См. рис. 4, 10 и 11; на последних рисунках подразбиение четырёхугольников, аналогичное рис. 10 слева, не показано. См. строгие определения, например, в [Sk18, § 3.2], [Sk23', § 3].

Гиперграфы (и симплициальные комплексы) играют важную роль в математике. Без них невозможно представить топологию и комбинаторику. Кроме того, они применяются в компьютерных науках и биоинформатике, см. например [PS11].

Соображения «малого шевеления» (или «общего положения») показывают, что любой граф реализуем в  $\mathbb{R}^3$ . Несложное обобщение показывает, что любой гиперграф реализуем в  $\mathbb{R}^5$ .

Полный гиперграф на 6 вершинах содержит «конус над  $K_5$ », а потому не реализуем в  $\mathbb{R}^3$  (утверждение 2.4.а). Уже в ранней истории топологии (1920-е гг.) математики пытались построить гиперграфы, не реализуемые в  $\mathbb{R}^4$ . Эгберт ван Кампен и Алехандро Флорес в 1932–1934 гг. доказали, что полный гиперграф на 7 вершинах не реализуем в  $\mathbb{R}^4$  (теорема 1.5). Этот результат является и ранним приложением *комбинаторной топологии* (сегодня она называется алгебраической топологией), и одним из первых результатов *топологической комбинаторики* (также являющейся областью современных активных исследований).

(b) Реализациями (= вложениями) называются отображения без самопересечений. Для топологической комбинаторики и дискретной геометрии интересно изучать отображения, самопересечения которых непусты (в отличие от вложений), но «не слишком замысловаты». Важным частным случаем является изучение отображений *без тройных пересечений* и вообще отображений *без  $r$ -кратных пересечений*, см. п. 1.5 и обзоры [Sk16], [Sk18, § 3.3], [Sk23', § 3].

(c) Мы представляем *линейные* версии результатов. О *кусочно-линейной (PL) и топологической реализуемости гиперграфов* см., например, [Sk18, § 3.2], [Sk23', § 3], [Sk, § 5]. Приводимые доказательства интересны тем, что они легко обобщаются до PL версий [Sk03, Zi13], в отличие от доказательств из [BM15, So12].

Из PL версий «количественных» результатов (см. п. 2.3) вытекают PL версии для *почти-вложений* (см. PL случай теорем 1.4.1 и 3.1.6 из [Sk18], [Sk23']). Последние влекут *топологические* версии (см. объяснения в [Sk18, абзац после теоремы 1.4.1]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2 (сравнение с другими доказательствами). Теорема 1.6 для чётного  $d$  (а потому и её частные случаи — утверждение 1.1 и теорема 1.5) имеет другое простое доказательство, использующее число ван Кампена, см. например [Sk18, § 1.4], [Sk23', § 1.4], [Sk, § 1.4, § 6]. Эти два доказательства предположительно являются простейшими из известных («доказательства из Книги»); они проходят для количественной, PL и топологической версий, ср. замечание 3.1.с.

Обычно теорема 1.6 для чётного  $d$  (точнее, топологическая версия её и теоремы 2.9) доказывается при помощи теоремы Борсука — Улама [Sk20, § 8], [Ma03, § 5]. В отличие от доказательства в данной статье (и от альтернативного доказательства, использующего число ван Кампена), это требует некоторого знания алгебраической топологии. Это знание не упрощает жизнь: известные доказательства теоремы Борсука — Улама (см. [Ma03] и ссылки там) не проще, чем обсуждённые выше прямые доказательства теоремы 1.6 для чётного  $d$ . (Теорема Борсука — Улама доказывается с использованием понятия степени аналогично прямому доказательству теоремы 1.6 для чётного  $d$ , использующему число ван Кампена.)

В [BM15] представлено короткое алгебраическое доказательство теоремы 1.6 (и тем самым её частных случаев). Это доказательство в духе алгебраического доказательства теоремы Радона<sup>6)</sup>.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3 (историческое). Общие идеи «понижения размерности» или «линка вершины» просты и хорошо известны (см. замечание 1.3). О доказательствах теоремы Радона, основанных на этой идее, см. [Pe72, Ko18, RRS]. О приложении в компьютерной науке см. [DE94, proof of 2.3.i]. Также известна связь между зацепленностью и пересечениями<sup>7)</sup>. Развитие этой идеи до связи между неотъемлемой зацепленностью и нереализуемостью нетривиально (ср. с разницей

<sup>6)</sup> См. формулировку теоремы Радона, например, в [Sk23', § 3], [Sk16, § 1]. О связях между теоремой Радона и теоремами 1.2, 1.5, 1.6 см. [Sk23', § 3], [Sk16, § 4]. Доказательство в [BM15], по-видимому, является прямой (т. е. не использующей преобразования Гейла) версией доказательства теоремы 1.6 для чётного  $d$  (это [So12, Theorem 5] для  $k = 1$ ).

<sup>7)</sup> Например, коэффициент зацепления двух непересекающихся замкнутых ломаных в трёхмерной сфере  $\partial D^4$  равен алгебраическому числу пересечений двух двумерных дисков общего положения в четырёхмерном шаре  $D^4$ , натянутых на эти ломаные. Индуктивное доказательство, включающее утверждение о зацепленности в нечётных размерностях и утверждение о пересечениях в чётных размерностях, приведено в [RS72, Whitney Lemma 5.12 and Theorem 5.16].

между утверждением 2.4.a и теоремой 1.2). Доказательства, открывшие и использовавшие эту связь, видимо, не были опубликованы

- до [RST, RST', Sh03, RSS+, Zi13] — для доказательства теоремы Конвея — Гордона — Закса 1.2 сведением неотъемлемой зацепленности к неотъемлемым пересечениям в низшей размерности;
- до [Sk03, Example 2, Lemmas 2 and 1'], [RSS+] — для доказательств теоремы 1.5 и гипотезы Менгера (см. п. 4.1) сведением неотъемлемых пересечений к неотъемлемой зацепленности в низшей размерности.

## § 4. РЕАЛИЗУЕМОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЙ И ГИПОТЕЗА МЕНГЕРА

### 4.1. ГИПОТЕЗА МЕНГЕРА

(Декартовым) произведением  $F \times F'$  двух фигур  $F, F'$  в  $\mathbb{R}^3$  называется множество точек  $(x, y, z, x', y', z') \in \mathbb{R}^6$  таких, что  $(x, y, z) \in F$  и  $(x', y', z') \in F'$ .

Примеры реализации произведений приведены на рис. 10 и 11. Определение реализации см. например в [Sk18, § 3.2], [Sk23', § 3], [Sk, § 6]. Карл Менгер в 1929 году выдвинул гипотезу, что квадрат непланарного графа не реализуем в  $\mathbb{R}^4$  [Me29] (ср. с теоремой 4.2). Она была доказана только в 1978 году Брайаном Уммелем [Um78], использовавшим продвинутую алгебраическую топологию. Простое же доказательство, использующее *понижение размерности*, было получено в 2003 году Михаилом Скопенковым [Sk03], см. ниже. Его рассуждение доказывает обобщённую гипотезу Менгера (« $k$ -я степень непланарного графа не реализуема в  $\mathbb{R}^{2k}$ »). Оно даже даёт простую формулу для минимального  $d$  такого, что данное произведение нескольких графов реализуемо в  $\mathbb{R}^d$  [Sk03].

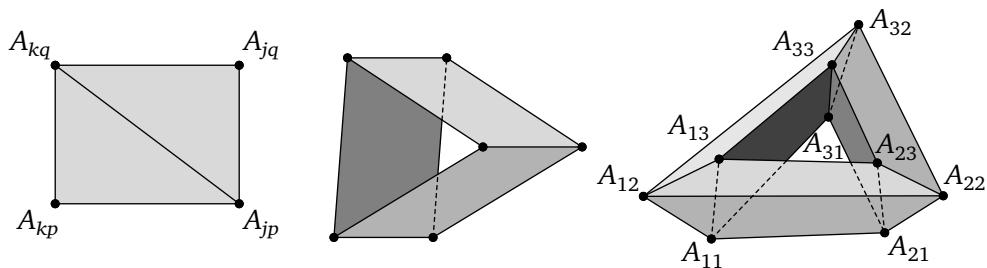


Рис. 10. Реализации произведений:  $K_2 \times K_2$  (слева),  $K_2 \times K_3$  (в центре),  $K_3 \times K_3$  (справа)

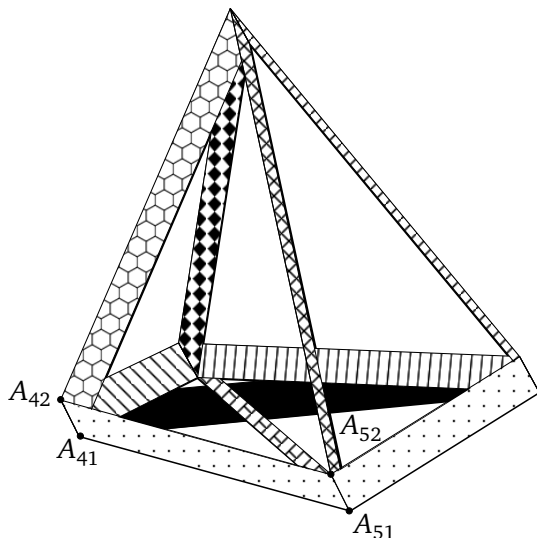


Рис. 11. Реализация произведения  $K_5 \times K_2$

Комбинаторной версией произведения является *произведение двух графов* (не обязательно планарных). Это произведение может быть рассмотрено (хотя и не канонически) как гиперграф. См. замечание 3.1.а; ср. с [DNS, § 3–6].

Из нижеприведённых утверждений 4.1.ab вытекает, что ни  $K_4 \times K_4$ , ни  $K_5 \times K_3$  не реализуемы (линейно) в  $\mathbb{R}^3$ . Доказательство утверждения 4.1.a показывает, что  $K_{3,1} \times K_{3,1}$  не реализуемо в  $\mathbb{R}^3$  (но это произведение реализуемо в  $\mathbb{R}^4$ ).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Доказательство гипотезы Менгера, использующее число ван Кампена или теорему Борсука — Улама (см. замечание 3.2), неизвестно. Доказательство гипотезы Менгера в [Um78] проходит для топологической версии, но сложно. Более простое доказательство в [Sk03] использует для топологической версии непростую *аппроксимационную теорему Брайанта*. Доказательство топологической версии можно получить, придумав количественную PL версию гипотезы Менгера (т.е., улучшив PL версию теоремы 4.2 аналогично п. 2.3, см. задачу 4.4).

#### 4.2. РЕАЛИЗУЕМОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Приведём формализацию идеи изображения в  $\mathbb{R}^3$  или в  $\mathbb{R}^4$  произведения  $K_m \times K_n$ . Пусть имеется  $mn$  точек  $A_{jp}$ , где  $j \in [m]$  и  $p \in [n]$ , в  $\mathbb{R}^3$  или в  $\mathbb{R}^4$ . Для чисел  $j, k \in [m]$ ,  $j < k$ , и  $p, q \in [n]$ ,  $p < q$ , обозначим

$$jk \times pq := \{A_{jp}A_{kq}A_{jq}, A_{jp}A_{kq}A_{kp}\}.$$

Это набор двух треугольников, имеющих общую сторону (рис. 10 слева). Их объединение может быть, но не обязательно быть, плоским четырёхугольником. Назовём  $(m, n)$ -произведением объединение наборов

$$jk \times pq, \quad 1 \leq j < k \leq m, \quad 1 \leq p < q \leq n.$$

(Всего имеется  $mn(m-1)(n-1)/2$  таких треугольников.) Объединение треугольников  $(m, n)$ -произведения называется его **телом**. Оно является многогранным, возможно, самопересекающимся

- квадратом, если  $m = n = 2$  (рис. 10 слева);
- цилиндром (точнее, боковой поверхностью цилиндра), если  $m = 3$  и  $n = 2$  (рис. 10 посередине);
- тором, если  $m = n = 3$  (рис. 10 справа).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. В пространстве

(а) в любом  $(4, 4)$ -произведении, (б) в любом  $(3, 5)$ -произведении найдутся пересекающиеся треугольник и сторона треугольника, не имеющие общих вершин.

Эти фольклорные результаты сводятся в п. 4.4 к PL аналогам утверждений 2.3.ab.

ТЕОРЕМА 4.2 (о квадрате; [Um78, Sk03]). В любом  $(5, 5)$ -произведении в  $\mathbb{R}^4$  найдутся два пересекающихся треугольника, не имеющие общих вершин.

Теорема о квадрате 4.2 сводится в п. 4.5 к версии теоремы 2.7.

ПРИМЕР 4.3. Аналоги утверждения 4.1 и теоремы 4.2 неверны для (а)  $(2, n)$ -произведения в пространстве для каждого  $n$  (для  $n \leq 4$  это очевидно; для  $n = 5$  см. рис. 11: вершины  $(2, 5)$ -произведения являются вершинами параллелограммов; для  $n \geq 6$  конструкция аналогична, см. п. 4.3; ср. [RSS', Theorem 1.5]);

(б)  $(3, n)$ -произведения в пространстве для каждого  $n \leq 4$  (для  $n \leq 3$  это очевидно, см. рис. 10 справа; для  $n = 4$  конструкция аналогична, см. п. 4.3);

(с)  $(4, n)$ -произведения в  $\mathbb{R}^4$  для каждого  $n$  (см. п. 4.3).

ЗАДАЧА 4.4 (количественная проблема Менгера). Обозначим

$$\tilde{K}_5^2 := \left\{ \{(X, Y), (X', Y')\} : X, Y, X', Y' \in \binom{[5]}{2}, \right. \\ \left. \text{либо } X \cap X' = \emptyset, \text{ либо } Y \cap Y' = \emptyset \right\}.$$

Найдите подмножество  $M \subset \tilde{K}_5^2$  такое, что для любого кусочно-линейного отображения  $f: K_5 \times K_5 \rightarrow \mathbb{R}^4$  является нечётным количество



пар  $\{(X, Y), (X', Y')\} \in M$ , для которых количество точек в пересечении  $f(X \times Y) \cap f(X' \times Y')$  нечётно, где под  $X, Y, X', Y'$  понимаются рёбра графа  $K_5$ .

### 4.3. РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Набросок доказательства примера 4.3.a. Возьмём точки  $A_{11}, \dots, A_{1n} \in \mathbb{R}^3$ , никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости. Возьмём вектор  $v$ , не параллельный никакой плоскости, проходящей через 3 из этих точек. Для каждого  $p \in [n]$  положим  $A_{2p} := v + A_{1p}$ . Если  $v$  достаточно мал, то точки  $A_{jp}, j \in \{1, 2\}, p \in [n]$ , — искомые, т. е. в образованном ими  $(2, n)$ -произведении не найдётся пересекающихся треугольника и стороны треугольника, не имеющих общих вершин.

Действительно,  $12 \times pq$  — параллелограмм для любых  $p \neq q$ . Поскольку никакие 4 из точек  $A_{11}, \dots, A_{1n}$  не лежат в одной плоскости, и по выбору вектора  $v$ , для любых попарно различных  $p, q, r, s$  отрезки  $A_{1p}A_{1q}$  и  $A_{1r}A_{1s}$  не пересекаются. Поскольку  $v$  достаточно мал, предыдущее верно и с заменой 1 на 2. Тогда любые два параллелограмма  $12 \times pq$  и  $12 \times rs$  (точнее, их выпуклые оболочки), не имеющие общей стороны, не пересекаются. Теперь можно проверить, что точки  $A_{jp}$  — искомые.  $\square$

Набросок доказательства примера 4.3.b. Обозначим

$$A_{11} = (1, 0, 1), \quad A_{12} = (-1, 0, 1), \quad A_{13} = (0, 0, 2), \quad A_{14} = (0, 0, 3).$$

Обозначим через  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  вращение на  $2\pi/3$  вокруг оси  $x$ . Положим  $A_{2p} = f(A_{1p})$  и  $A_{3p} = f(f(A_{1p}))$  для всех  $p \in [4]$  (рис. 10 справа). Тогда точки  $A_{jp}, j \in [3], p \in [4]$ , — искомые.

Действительно,  $jk \times pq$  — параллелограмм для любых  $j \neq k, p \neq q$ . Поскольку любые два отрезка, соединяющие точки  $A_{1p}$ , либо не пересекаются, либо пересекаются по общей вершине, то любые два из этих параллелограммов, не имеющие общих сторон, не пересекаются. Теперь можно проверить, что точки  $A_{jp}$  — искомые.  $\square$

Набросок доказательства ослабленной версии примера 4.3.c:  $(3, 5)$ -произведение в  $\mathbb{R}^4$ . Возьмём трёхмерную гиперплоскость в  $\mathbb{R}^4$  (показанную на рис. 12 слева как плоскость в  $\mathbb{R}^3$ ). В ней возьмём 10 точек  $A_{jp}$ , где  $j \in [5], p \in \{1, 2\}$ , показанных на рис. 11. Возьмём вектор  $v$ , не параллельный гиперплоскости. Положим  $A_{j3} := A_{j1} + v$ . (На рис. 12 слева мы видим боковую поверхность призматоида  $A_{41}A_{42}A_{43}A_{51}A_{52}A_{53}$ .) Тогда точки  $A_{jp}, j \in [5], p \in [3]$ , — искомые, т. е. в образованном ими  $(3, 5)$ -произведении не найдётся двух пересекающихся треугольников, не имеющих общих вершин.  $\square$

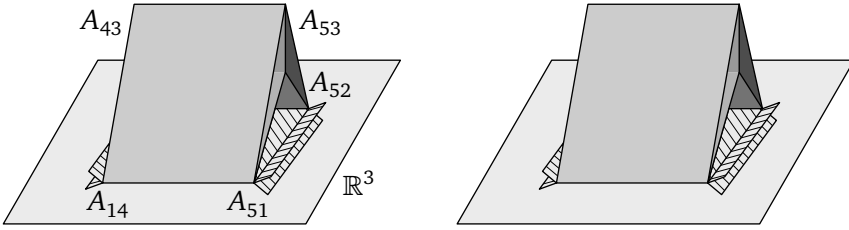


Рис. 12. Слева: к реализации произведения  $K_3 \times K_5$  в  $\mathbb{R}^3$ .  
Справа: к реализации произведения  $K_4 \times K_5$  в  $\mathbb{R}^4$

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПРИМЕРА 4.3.с. Возьмём точки  $A_{jp} \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ ,  $j \in \{1, 2\}$ ,  $p \in [n]$  из доказательства примера 4.3.а. Тогда  $\overrightarrow{A_{1p}A_{1q}} = \overrightarrow{A_{2p}A_{2q}}$  для всех  $p \neq q$ . Возьмём неколлинеарные векторы  $v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ , не параллельные гиперплоскости  $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ . Обозначим  $A_{jp} := A_{1p} + v_j$ ,  $j \in \{3, 4\}$ . Можно считать, что  $v_3, v_4$  взяты так, что  $A_{41}$  лежит внутри треугольника  $A_{11}A_{21}A_{31}$ . См. рис. 12 справа. Тогда точки  $A_{jp}$ ,  $j \in [4]$ ,  $p \in [n]$ , — искомые.  $\square$

#### 4.4. НЕРЕАЛИЗУЕМОСТЬ ПРОИЗВЕДИЙ В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Доказательство утверждения 4.1.а. (Аналогично утверждению 2.4.) Существует плоскость  $\alpha$ , по одну сторону от которой лежит ровно одна точка  $A_{jp}$  из данных, а остальные 15 точек — по другую (рис. 13 слева). Точку пересечения плоскости  $\alpha$

- с отрезком  $A_{jp}A_{kp}$  покрасим в синий для каждого  $k \in [4] - \{j\}$ ;
- с отрезком  $A_{jp}A_{jq}$  покрасим в красный для каждого  $q \in [4] - \{p\}$ .

Пересечение произведения  $jk \times pq$  с  $\alpha$  назовём дугой. Тогда дуги имеют разноцветные концы. (Пересечение плоскости  $\alpha$  с телом данного  $(4, 4)$ -произведения является PL изображением, возможно с самопересечениями, графа  $K_{2,4}$  в  $\alpha$ , т. е. образом PL отображения  $K_{3,3} \rightarrow \alpha$ .)

Значит, по PL аналогу<sup>8)</sup> утверждения 2.3.а найдутся две пересекающиеся дуги, не имеющие общих концов. Тогда найдутся  $k, k' \in [4] - \{j\}$  и  $q, q' \in [4] - \{p\}$  такие, что  $k \neq k'$ ,  $q \neq q'$ , и некоторые два треугольника — один из произведения  $jk \times pq$ , а другой из произведения

<sup>8)</sup> Этот аналог и доказывается аналогично, см. [Sk23', замечание 1.4.4b]. Можно взять  $A_{11}$  вместо  $A_{jp}$ , маленькую сферу с центром в  $A_{11}$  вместо  $\alpha$ , и сферический аналог утверждения 2.3.а вместо кусочно-линейного. Ниже аналогичные замечания в доказательствах утверждения 4.1.b и теоремы 4.2 пропускаются.

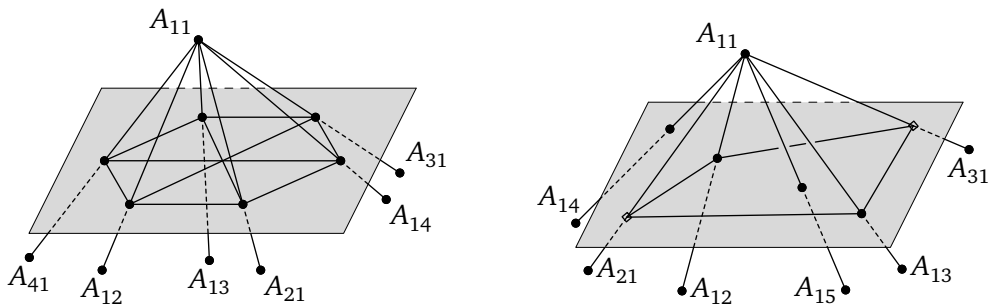


Рис. 13. К доказательствам утверждений 4.1.a (слева) и 4.1.b (справа) для  $j = p = 1$

$jk' \times pq'$  — имеют общую точку, отличную от общей вершины  $A_{jp}$  этих треугольников. Значит, один из этих треугольников пересекает сторону другого треугольника, не проходящую через  $A_{jp}$  и потому не имеющую с первым треугольником общих вершин.  $\square$

Для данных 9 точек  $A_{jp}$ ,  $j \in \{u, v, w\}$ ,  $p \in \{u', v', w'\}$ , в  $\mathbb{R}^3$  или в  $\mathbb{R}^4$ , обозначим через  $uvw \times u'v'w'$  соответствующее  $(3, 3)$ -произведение (рис. 10 справа; в отличие от рисунка,  $(3, 3)$ -произведение может «иметь самопересечения»).

Доказательство утверждения 4.1.b. Можно считать, что никакие 4 из данных 15 точек  $A_{jp}$ ,  $j \in [3]$ ,  $p \in [5]$ , не лежат в одной плоскости (аналогично замечанию 2.5.b). Существует плоскость  $\alpha$ , по одну сторону от которой лежит ровно одна точка  $A_{jp}$  из данных, а остальные 14 точек — по другую (рис. 13 справа). Точку пересечения плоскости  $\alpha$

- с отрезком  $A_{jp}A_{kp}$  покрасим в синий для каждого  $k \in [3] - \{j\}$ ;
- с отрезком  $A_{jp}A_{jq}$  покрасим в красный для каждого  $q \in [5] - \{p\}$ .

Пересечение произведения  $jk \times pq$  с  $\alpha$  назовём дугой. Тогда дуги имеют разноцветные концы. (Пересечение плоскости  $\alpha$  с телом данного  $(3, 5)$ -произведения является PL изображением, возможно с самопересечениями, графа  $K_{2,4}$  в  $\alpha$ .)

Аналогично последнему абзацу доказательства утверждения 4.1.a либо

- (1) в данном  $(3, 5)$ -произведении найдутся пересекающиеся треугольник и сторона треугольника, не имеющие общих вершин,

либо

- (2) любые две дуги пересекаются только в их общей вершине (если она есть).

Во втором случае обозначим синие точки через  $K$  и  $L$ . По PL аналогу утверждения 2.3.b найдутся две красные точки  $Q, R$  такие, что оставшиеся две красные точки  $S, T$  лежат в  $\alpha$  по разные стороны от замкнутой ломаной  $\gamma$ , являющейся объединением дуг  $QK, KR, RL, LQ$ . Возьмём  $k, l \in [3] - \{j\}$  и  $q, r, s, t \in [5] - \{p\}$  такие, что точки  $K, L$  и  $Q, R, S, T$  принадлежат отрезкам, соединяющим  $A_{jp}$  с  $A_{kp}, A_{lp}$  и  $A_{jq}, A_{jr}, A_{js}, A_{jt}$  соответственно. Тогда плоскость  $\alpha$  пересекает

- контур треугольника  $j \times pst := A_{jp}A_{js}A_{jt}$  по точкам  $S$  и  $T$  (заметим, что этот треугольник не лежит в данном  $(3, 5)$ -произведении);
- тело  $(3, 3)$ -подпроизведения  $jkl \times pqr$  (содержащегося в данном  $(3, 5)$ -произведении) по ломаной  $\gamma$ .

Если  $\gamma$  имеет самопересечения, то получаем свойство (1). Если не имеет, то, так как точки  $S, T$  лежат в  $\alpha$  по разные стороны от  $\gamma$ , по нижеприведённой лемме 4.5 получаем свойство (1).  $\square$

**Лемма 4.5** (о понижении размерности). Пусть в пространстве контур  $\partial\Delta$  треугольника  $\Delta$  и  $(3, 3)$ -произведение  $\tau$  имеют единственную общую вершину  $O$ . Никакие 4 из вершин треугольника  $\Delta$  и  $(3, 3)$ -произведения  $\tau$  не лежат в одной плоскости. Плоскость  $\alpha$  отделяет  $O$  от основания треугольника  $\Delta$  и от оставшихся 8 точек  $(3, 3)$ -произведения  $\tau$ . Плоскость  $\alpha$  пересекает

- тело  $|\tau|$  по замкнутой ломаной, не имеющей самопересечений;
- $\partial\Delta$  по двум точкам  $S, T$ , лежащим по разные стороны от ломаной.

Тогда в  $\tau$  и в  $\partial\Delta$  найдутся пересекающиеся треугольник и сторона треугольника, не имеющие общих вершин.

**Доказательство.** Обозначим через  $\langle\Delta\rangle$  плоскость треугольника  $\Delta$ . Тогда  $\alpha \cap \langle\Delta\rangle$  — прямая. Пересечение  $\alpha \cap \Delta$  — отрезок  $ST$ . Точки  $S, T$  лежат в  $\alpha$  по разные стороны от замкнутой ломаной  $\alpha \cap |\tau|$ , не имеющей самопересечений, и никакие 3 точки среди  $S, T$  и вершин ломаной  $\alpha \cap |\tau|$  не лежат на одной прямой. Поэтому отрезок  $ST$  пересекает  $|\tau| \cap \langle\Delta\rangle$  в нечётном количестве точек. Аналогично прямая  $\alpha \cap \langle\Delta\rangle$  пересекает  $|\tau| \cap \langle\Delta\rangle$  в чётном количестве точек. Кроме того, никакие 4 из вершин треугольника  $\Delta$  и тетраэдра  $\tau$  не лежат в одной плоскости. Из всего этого получаем, что  $\tau \cap \langle\Delta\rangle := \{\Gamma \cap \langle\Delta\rangle : \Gamma \in \tau\}$  является 1-циклом, т. е. набором отрезков в плоскости  $\langle\Delta\rangle$  таким, что каждая точка из  $\langle\Delta\rangle$  является концом чётного (возможно, нулевого) количества отрезков набора. В силу предположений об  $\alpha$  мы можем выбрать отрезки 1-цикла так, чтобы прямая  $\alpha \cap \langle\Delta\rangle$  отделяла  $O$  от  $S, T$  и от всех вершин отрезков 1-цикла, отличных от  $O$  (ср. рис. 6 слева).

Поэтому по аналогу леммы 2.2 для треугольника и 1-цикла, некоторые два отрезка из  $\partial\Delta$  и из  $\tau \cap \langle\Delta\rangle$  пересекаются, не имея общих вершин. Не более одного из этих отрезков содержит точку  $O$ . Поэтому найденный отрезок 1-цикла  $\tau \cap \langle\Delta\rangle$  является пересечением с плоскостью  $\langle\Delta\rangle$  треугольника из  $\tau$ , пересекающего сторону треугольника  $\Delta$ , не имея с ней общих вершин.  $\square$

#### 4.5. НЕРЕАЛИЗУЕМОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЙ В ЧЕТЫРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

*Зейфертовой цепью* (или кограницей) замкнутой ломаной  $a$  в пространстве называется конечный набор  $S$  треугольников (не вырожденных в отрезок или точку) в пространстве такой, что

- каждое ребро ломаной  $a$  является стороной ровно одного треугольника из  $S$ ;
- каждый отрезок, не являющийся ребром ломаной  $a$ , является стороной чётного (возможно, нулевого) количества треугольников из  $S$ .

Две непересекающиеся замкнутые ломаные  $a$  и  $a'$  в пространстве зацеплены по модулю 2, если для любых зейфертовых цепей  $S$  для  $a$  и  $S'$  для  $a'$  таких, что контур любого треугольника из  $S$  не пересекается с контуром любого треугольника из  $S'$ , количество зацепленных по модулю 2 пар  $(\Delta, \Delta')$  треугольников  $\Delta$  из  $S$  и  $\Delta'$  из  $S'$  нечётно. Эквивалентность другим определениям зацепленности по модулю 2 (в частности, определению, приведённому перед теоремой 2.7) доказана в [Sk, Lemma 4.8.3].

Доказательство теоремы о квадрате 4.2. Можно считать, что никакие 5 из данных 25 точек  $A_{jp}$ ,  $j, p \in [5]$ , не лежат в одной трёхмерной гиперплоскости (аналогично замечанию 2.5.b). Существует трёхмерная гиперплоскость  $\alpha$ , по одну сторону от которой лежит ровно одна

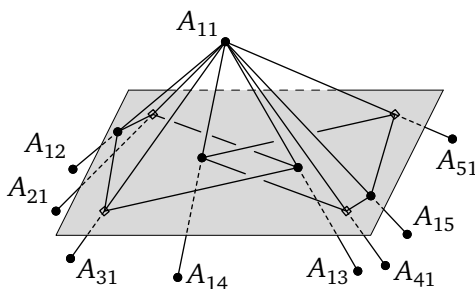


Рис. 14. К доказательству теоремы о квадрате 4.2

точка  $A_{jp}$  из данных, а остальные 24 точки — по другую (рис. 14). Точку пересечения гиперплоскости  $\alpha$

- с отрезком  $A_{jp}A_{kp}$  покрасим в синий для каждого  $k \in [5] - \{j\}$ ;
- с отрезком  $A_{jp}A_{jq}$  покрасим в красный для каждого  $q \in [5] - \{p\}$ .

Пересечение произведения  $jk \times pq$  с  $\alpha$  назовём дугой. Тогда дуги имеют разноцветные концы.

Аналогично последнему абзацу доказательства утверждения 4.1.а либо

(1) в данном  $(5, 5)$ -произведении найдутся два пересекающихся треугольника, не имеющих общих вершин,

либо

(2) любые две дуги пересекаются только в их общей вершине (если она есть).

В случае (2) пересечение плоскости  $\alpha$  с телом данного  $(5, 5)$ -произведения является PL изображением без самопересечений графа  $K_{4,4}$  в  $\alpha$ . Воспользуемся следующим PL аналогом теоремы 2.7: в любом PL изображении без самопересечений графа  $K_{4,4}$  в  $\mathbb{R}^3$  найдутся два зацепленных по модулю 2 цикла длины 4 (см. доказательство в [Sa81, Zi13]). Получаем две зацепленные по модулю 2 замкнутые ломаные в  $\alpha$ , каждая из которых составлена из четырёх дуг. Возьмём  $\{a, b, a', b'\} = [5] - \{j\}$  и  $\{c, d, c', d'\} = [5] - \{p\}$  такие, что дуги

- первой ломаной содержатся в произведениях  $ja \times pc, jb \times pc, ja \times pd, jb \times pd$ ,
- второй ломаной содержатся в произведениях  $ja' \times pc', jb' \times pc', ja' \times pd', jb' \times pd'$ .

Значит, ломаные являются пересечениями гиперплоскости  $\alpha$  с телами  $(3, 3)$ -произведений  $jab \times pcd$  и  $ja'b' \times pc'd'$ . Тогда получаем нужное по нижеприведённой лемме 4.6.  $\square$

**ЛЕММА 4.6** (о понижении размерности). *Даны два  $(3, 3)$ -произведения в  $\mathbb{R}^4$ , имеющие единственную общую вершину  $O$ , причём никакие 5 из их 17 вершин не лежат в одной трёхмерной гиперплоскости. Трёхмерная гиперплоскость  $\alpha$  отделяет  $O$  от оставшихся 16 точек  $(3, 3)$ -произведений. Эта гиперплоскость  $\alpha$  пересекает их тела по двум непересекающимся замкнутым ломаным, зацепленным по модулю 2 в  $\alpha$ . Тогда в этих  $(3, 3)$ -произведениях найдутся два пересекающихся треугольника, не имеющие общих вершин.*

**Доказательство.** Обозначим через  $S$  (через  $S'$ ) множество всех тех треугольников из первого (из второго)  $(3, 3)$ -произведения, которые

не содержат точку  $O$ . Так как никакие 5 из 17 вершин  $(3, 3)$ -произведений не лежат в одной трёхмерной гиперплоскости, то никакие 4 из их 16 проекций на  $\alpha$  с центром  $O$  не лежат в одной плоскости. Поэтому контуры треугольников  $\alpha \cap O\Delta$  и  $\alpha \cap O\Delta'$  не пересекаются для любых  $\Delta \in S$  и  $\Delta' \in S'$ . Обозначим через  $\gamma$  и  $\gamma'$  непересекающиеся замкнутые ломаные из условия. Так как  $\gamma$  и  $\gamma'$  зацеплены по модулю 2, то количество зацепленных по модулю 2 пар  $(\Delta, \Delta')$  таких треугольников нечётно. По лемме 2.8'.а такие треугольники зацеплены по модулю 2 тогда и только тогда, когда поверхности тетраэдров  $O\Delta$  и  $O\Delta'$  пересекаются в чётном количестве точек (включая  $O$ ). Для любой стороны  $MN$  треугольника из  $S$ , не лежащей в  $\gamma$ , и стороны  $M'N'$  треугольника из  $S'$ , не лежащей в  $\gamma'$ , пересечение  $OMN \cap OM'N'$  входит в ровно два пересечения боковых поверхностей тетраэдров  $O\Delta$  и  $O\Delta'$ . Поэтому количество пар пересекающихся треугольников одного из трёх следующих типов нечётно:

- пар  $(\Delta, \Delta')$  для  $\Delta \in S$  и  $\Delta' \in S'$ ;
- пар  $(OMN, \Delta')$  для стороны  $MN$  ломаной  $\gamma$  и треугольника  $\Delta' \in S'$ ;
- пар  $(\Delta, OM'N')$  для стороны  $M'N'$  ломаной  $\gamma'$  и треугольника  $\Delta \in S$ .

Теперь лемма следует из того, что в указанных парах треугольники не имеют общих вершин, а также содержатся в треугольниках из данных  $(3, 3)$ -произведений.  $\square$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

В этом списке звёздочками отмечены книги, обзоры и популярные статьи.

- [AKM] *Abrahamsen M., Kleist L., Miltzow T.* Geometric Embeddability of Complexes is  $\exists \mathbb{R}$ -complete. arXiv:2108.02585.
- [BL] \* [https://ru.wikipedia.org/wiki/Брунново\\_зацепление](https://ru.wikipedia.org/wiki/Брунново_зацепление).
- [BM15] *Bogdanov I., Matushkin A.* Algebraic proofs of linear versions of the Conway — Gordon — Sachs theorem and the van Kampen — Flores theorem. arXiv:1508.03185.
- [Br68] *Bruegel P.* 1568, [https://ru.wikipedia.org/wiki/Сорока\\_на\\_виселице](https://ru.wikipedia.org/wiki/Сорока_на_виселице).
- [CG83] *Conway J. H., Gordon C. M. A.* Knots and links in spatial graphs // J. Graph Theory. 1983. Vol. 7:4. P. 445–453.
- [CKS+] \* Новые способы плетения корзинок, представили И. Богданов, А. Каибханов, Ю. Кудряшов, А. Скопенков, А. Сосинский и Г. Челноков, <http://www.turgor.ru/lktg/2004/lines.ru/index.htm>.
- [DE94] *Dey T. K., Edelsbrunner H.* Counting triangle crossings and halving planes // Discrete Comput. Geom. 1994. Vol. 12, № 3. P. 281–289.

- [DGN+] \* Минимизация ранга восполнением матриц, представляли А. Воропаев, Т. Гараев, С. Дженжер, О. Никитенко, А. Петухов и А. Скопенков, [https://www.mccme.ru/circles/oim/netflix\\_rus.pdf](https://www.mccme.ru/circles/oim/netflix_rus.pdf).
- [DNS] \* Дженжер С., Никитенко О., Скопенков А. Циклы в графах и в гиперграфах, <https://www.mccme.ru/circles/oim/cyclesg-jour.pdf>.
- [DS22] Dzhenzher S., Skopenkov A. To the Kühnel conjecture on embeddability of  $k$ -complexes into  $2k$ -manifolds. arXiv:2208.04188.
- [FFN+] Flapan E., Foisy J., Naimi R., Pommersheim J. Intrinsically  $n$ -linked graphs // J. Knot Theory Ramifications. 2001. Vol. 10, № 8. P. 1143–1154.
- [F134] Flores A. Über  $n$ -dimensionale Komplexe die im  $E^{2n+1}$  absolut selbstverschlungen sind // Ergebnisse Math. Kolloq. 1934. Bd. 6. S. 4–7.
- [FMM+] \* Flapan E., Mattman T., Mellor B., Naimi R., Nikkuni R. Recent Developments in Spatial Graph Theory // Knots, links, spatial graphs, and algebraic invariants. Providence, RI: AMS, 2017. (Contemp. Math.; Vol. 689). P. 81–102. arXiv:1602.08122.
- [FNP] Flapan E., Naimi R., Pommersheim J. Intrinsically triple linked complete graphs // Topology Appl. 2001. Vol. 115, № 2. P. 239–246.
- [GSS+] \* Проекция скрещивающихся прямых, представили А. А. Гайфуллин, А. Б. Скопенков, М. Б. Скопенков, А. В. Шаповалов, <http://www.turgor.ru/lktg/2001/index.php>.
- [Io] \* [https://ru.wikipedia.org/wiki/Категория:Невозможные\\_объекты](https://ru.wikipedia.org/wiki/Категория:Невозможные_объекты).
- [Ko19] Kogan E. Linking of three triangles in 3-space. arXiv:1908.03865.
- [Ko18] \* Колпаков Е. Доказательство теоремы Радона при помощи понижения размерности // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 23. М.: МЦНМО, 2018. С. 130–133. arXiv:1903.11055.
- [KS20] Karasev R., Skopenkov A. Some “converses” to intrinsic linking theorems // Discrete Comp. Geom. 2023. Vol. 70, № 3. P. 921–930. arXiv:2008.02523.
- [LS98] Lovasz L., Schrijver A. A Borsuk theorem for antipodal links and a spectral characterization of linklessly embeddable graphs // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. Vol. 126, № 5. P. 1275–1285.
- [LT14] Lindenstrauss E., Tsukamoto M. Mean dimension and an embedding problem: an example // Israel J. Math. 2014. Vol. 199, № 2. P. 573–584.
- [Ma03] \* Matoušek J. Using the Borsuk — Ulam theorem: Lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Springer Verlag, 2008.
- [Me29] Menger K. Über plättbare Dreiergraphen und Potenzen nicht plättbarer Graphen // Ergebnisse Math. Kolloq. 1929. Bd. 2. S. 30–31.



- [Me22] *Melikhov S. A.* Embeddability of joins and products of polyhedra // *Topol. Methods in Nonlinear Anal.* 2022. Vol. 60, № 1. P. 185–201. arXiv:2210.04015.
- [MTW] *Matoušek J., Tancer M., Wagner U.* Hardness of embedding simplicial complexes in  $\mathbb{R}^d$  // *J. Eur. Math. Soc.* 2011. Vol. 13, № 2. P. 259–295. arXiv:0807.0336.
- [Na20] \* *Naimi R.* A brief survey on intrinsically knotted and linked graphs. arXiv:2006.07342.
- [Ne91] *Negami S.* Ramsey theorems for knots, links and spatial graphs // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1991. Vol. 324, № 2. P. 527–541.
- [Pa15] *Parsa S.* On links of vertices in simplicial  $d$ -complexes embeddable in the Euclidean  $2d$ -space // *Discrete Comput. Geom.* 2018. Vol. 59, № 3. P. 663–679. This is arXiv:1512.05164v4 up to numbering of sections, theorems etc.; we refer to numbering in arxiv version. Correction: *Discrete Comput. Geom.* 2020. Vol. 64, № 3. P. 227–228.
- [Pa20] *Parsa S.* On the Smith classes, the van Kampen obstruction and embeddability of  $[3] * K$ . arXiv:2001.06478.
- [Pa21] *Parsa S.* Instability of the Smith index under joins and applications to embeddability // *Trans. Amer. Math. Soc.* 2022. Vol. 375, № 10. P. 7149–7185. arXiv:2103.02563.
- [Pe72] \* *Peterson B. B.* The Geometry of Radon’s Theorem // *Amer. Math. Monthly.* 1972. Vol. 79. P. 949–963.
- [PS05] \* *Прасолов В. В., Скопенков М. Б.* Рамсеевская теория зацеплений // *Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 9.* М.: МЦНМО, 2005. С. 108–115.
- [PS20] *Parsa S., Skopenkov A.* On embeddability of joins and their “factors” // *Topology Appl.* 2023. Vol. 326. Paper № 108409, 4. arXiv:2003.12285.
- [PS11] *Ponty Y., Saule C.* A combinatorial framework for designing (pseudo-knotted) RNA algorithms // *Proc. of the 11th Intern. Workshop on Algorithms in Bioinformatics, WABI’11.* P. 250–269.
- [RA05] \* *Ramírez Alfonsín J. L.* Knots and links in spatial graphs: a survey // *Discrete Math.* 2005. Vol. 302. P. 225–242.
- [RRS] \* *Ретинский В., Рябичев В., Скопенков А.* Мотивированное доказательство теоремы Тверберга // *Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 27.* М.: МЦНМО, 2021. С. 166–169. arXiv:2008.08361.
- [RS72] \* *Рурк К. П., Сандерсон Б. Дж.* Введение в кусочно-линейную топологию. М.: Мир, 1974.
- [RSS’] *Repovš D., Skopenkov A. B., Ščepin E. V.* On embeddability of  $X \times I$  into Euclidean space // *Houston J. Math.* 1995. Vol. 21, № 1. P. 199–204.

- [RSS+] \* Реализуемость гиперграфов: примеры и алгоритмы, представляли А. Зимин, А. Рухович, А. Скопенков, М. Скопенков, <https://www.turgor.ru/lktg/2013/1/1-1ru.pdf>.
- [RST] \* *Robertson N., Seymour P., Thomas R.* A survey of linkless embeddings // *Graph Structure Theory* (Seattle, WA, 1991). Providence, RI: AMS, 1993. (Contemp. Math.; Vol. 147). P. 125–136.
- [RST'] *Robertson N., Seymour P., Thomas R.* Linkless embeddings of graphs in 3-space // *Bull. of the Amer. Math. Soc. (N. S.)*. 1993. Vol. 28, № 1. P. 84–89.
- [Sa81] *Sachs H.* On spatial representation of finite graphs, in: *Finite and infinite sets* (Eger, 1981), 649–662, *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*, 37, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [Sa91g] *Sarkaria K. S.* A generalized van Kampen — Flores theorem // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1991. Vol. 111, № 2. P. 559–565.
- [Sh03] *Шаповалов А.* Решение олимпиадной задачи о 6 точках в пространстве. 2003. (Не опубликовано.)
- [Sk] \* *Скопенков А.* Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, <http://www.mccme.ru/circles/oim/algorg.pdf>.
- [Sk03] *Skopenkov M.* Embedding products of graphs into Euclidean spaces // *Fund. Math.* 2003. Vol. 179, № 3. P. 191–198. arXiv:0808.1199.
- [Sk06] \* *Skopenkov A.* Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces // *Surveys in contemporary mathematics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; Vol. 347). P. 248–342. arXiv:math/0604045.
- [Sk16] \* *Skopenkov A.* A user's guide to the topological Tverberg Conjecture. arXiv:1605.05141v4. (Ранее опубликован сокращённый вариант: *Russian Math. Surveys*. 2018. Vol. 73, № 2. P. 323–353.)
- [Sk18] \* *Skopenkov A.* Invariants of graph drawings in the plane // *Arnold Math. J.* 2020. Vol. 6, № 1. P. 21–55. Full version: arXiv:1805.10237.
- [Sk18o] \* *Skopenkov A.* A short exposition of S. Parsa's theorems on intrinsic linking and non-realizability // *Discrete Comp. Geom.* 2021. Vol. 65, № 2. P. 584–585. Full version: arXiv:1808.08363.
- [Sk20] \* *Скопенков А.* Алгебраическая топология с геометрической точки зрения / 2-е изд. М.: МЦНМО, 2020. Часть книги: <http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf>.
- [Sk23] *Skopenkov A.* To S. Parsa's theorem on embeddability of joins. arXiv:2302.11537.
- [Sk23'] \* *Скопенков А.* Инварианты изображений графов на плоскости // *Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 31.* М.: МЦНМО, 2023. С. 74–127. arXiv:1805.10237.

- [Sk24] Скопенков А. Б. Двойные и тройные коэффициенты зацепления в пространстве. Представлено к публикации в «Математическое просвещение».
- [So12] Soberon P. Equal coefficients and tolerance in coloured Tverberg partitions // *Combinatorica*. 2015. Vol. 35, № 2. P. 235–252. arXiv: 1204.1202. We refer to numbering in arxiv version.
- [SS92] Segal J., Spieź S. Quasi embeddings and embeddings of polyhedra in  $\mathbb{R}^m$  // *Topology Appl.* 1992. Vol. 45, № 3. P. 275–282.
- [St] Starkov M. An “unlinked” set of  $2k + 3$  points in  $2k$ -space.
- [Ta00] Taniyama K. Higher dimensional links in a simplicial complex embedded in a sphere // *Pacific Jour. of Math.* 2000. Vol. 194, № 2. P. 465–467.
- [Um78] Ummel B. The product of nonplanar complexes does not imbed in 4-space // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1978. Vol. 242. P. 319–328.
- [Val] \* <https://ru.wikipedia.org/wiki/Валькнут>.
- [vK32] Kampen E. R. van. Komplexe in euklidischen Räumen // *Abh. Math. Sem. Hamburg*. 1933. Bd. 9. S. 72–78; Berichtigung dazu. S. 152–153.
- [Zi13] Zimin A. Alternative proofs of the Conway — Gordon — Sachs Theorems. arXiv:1311.2882.