

# Телефонные сети и графы с цветными рёбрами

В. М. Журавлёв, К. В. Журавлёва

Немецкий математик Давид Гильберт (1862–1943) считал, что теоретическим исследованиям не нужно стремиться придать поскорее промышленную, инженерную направленность. Как-то его перед лекцией предупредили, что он должен высказаться против идеи несовместимости науки и техники. Помня об этом предупреждении, с присутствующим ему остроумием он в своём выступлении сказал:

— Приходится слышать разговоры о враждебности между учёными и инженерами. Я не верю в это. Я действительно твердо убеждён в том, что это неправда. Ничего подобного и не может иметь места, потому что ни те, ни другие не имеют ничего общего между собой.

*Ю. С. Мусабеков. Занимательные истории из жизни ученых, с. 68.*

И со свечкой искали они, и с умом.

*Льюис Кэрролл. Охота на Снарка*

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

Читая книгу Джимми Сони и Роба Гудмэна о Клоде Шенноне — гении информационного века [14], можно наткнуться на следующие интересные сведения.

Работая в «Лабораториях Белла», Шеннон должен был решить следующую задачу. Имеется ряд устройств  $A, B, \dots, K$ , которые должны

быть соединены друг с другом. Соединительные провода входят в кабель, причем концевые выводы, относящиеся к  $A$ , выходят в одной точке, относящиеся к  $B$ , — в другой, и т. д. Может идти, к примеру, четыре провода от  $A$  к  $B$ , два от  $B$  к  $C$ , три от  $C$  к  $D$  и один от  $A$  к  $D$ . Чтобы различать провода, необходимо, чтобы все провода, выходящие из кабеля в одной точке, были разного цвета. Например, провода между  $A$  к  $B$  должны быть все разных цветов, и все они должны отличаться от проводов, идущих между  $B$  и  $C$  или между  $A$  и  $D$ . Но при этом провода между  $C$  и  $D$  могут быть такими же, как между  $A$  и  $B$ . Если предположить, что не более чем  $m$  концевых выводов могут начинаться в одной точке, возникает вопрос о минимальном количестве разных цветов, достаточном для любой сети.

Ответ Шеннона был таков: следует умножить  $m$  на 1,5, и тогда ближайшее целое, не меньшее полученного числа, и будет нужным количеством цветов.

Попытаемся разобраться в этом вопросе. В качестве наглядной иллюстрации нарисуем схему для четырёх устройств  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  по приведённому выше описанию (рис. 1 а). Цвета на схеме мы обозначаем цифрами.

В этом примере наибольшее количество концевых выводов равняется 6 и сосредоточено в точке  $B$ . Следовательно,  $m = 6$  и, согласно «ответу Шеннона», нам хватит 9 цветов ( $9 = 1,5 \times 6$ ). Однако из схемы видно, что мы использовали всего лишь 6 разных цветов.

Посмотрим на рис. 1 б, здесь также  $m = 6$ , но использовать придётся все 9 цветов, и меньшим числом цветов в этой схеме не обойтись.

Таким образом, «ответ Шеннона» даёт нам оценку сверху, которая для некоторых схем достигается, а в некоторых случаях завышена.

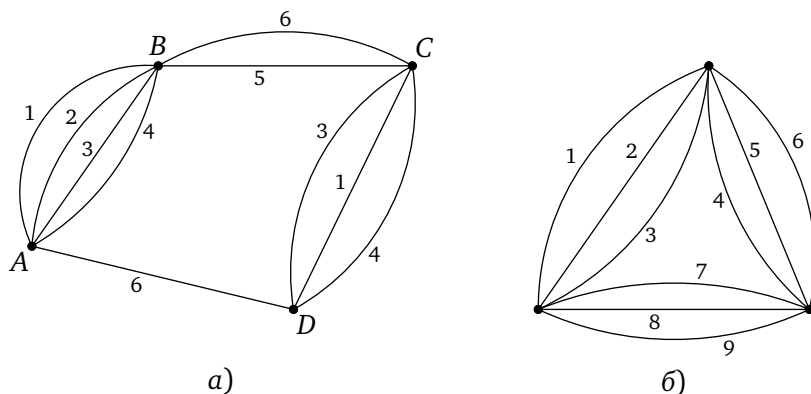


Рис. 1

Учитывая разнообразие схем, «ответ Шеннона» вполне удовлетворил инженеров из «Лабораторий Белла», которым необходимо было решать практические задачи и, как сказано в [14], «подобное решение можно было реализовать немедленно».

Но может ли такой ответ удовлетворить математика?

Еще раз посмотрим на рисунки схем. Задача, которую поставили перед Шенноном, относится к теории графов. Отметим, что Шеннон решал эту задачу летом 1940 года и теория графов, скорее всего, ему тогда не была известна. Сам термин «граф» впервые появился в книге венгерского математика Д. Кёнига лишь в 1936 г. (хотя появление теории графов как раздела математики связывают со знаменитой задачей Эйлера о кёнигсбергских мостах.) Поэтому, не умаляя значение результата Шеннона, давайте взглянем на эту задачу с применением подходов, которые имеются сегодня.

Мы обратились к студентам Московского энергетического института, чтобы узнать, известно ли им что-то про «теорему цветового кодирования», которая применяется в телефонных сетях. К сожалению, мы получили ответы — «нет», «не слышали», «не знаем». Впрочем, надо признать, что выборка опрашиваемых студентов была нерепрезентативной.

Сформулируем вопросы, которые у нас появились при чтении отрывка из книги [14].

Вопрос 1. *Для каких схем точна оценка Шеннона?*

Вопрос 2. *Можно ли улучшить оценку Шеннона?*

Чтобы детальнее разобраться в задаче, рассмотрим некоторые частные случаи.

## § 2. ГРАФЫ. МУЛЬТИГРАФЫ. НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим частный случай, когда любые два устройства соединены не более чем одним проводом. В этом случае нам требуются простые (обыкновенные) графы<sup>1)</sup>.

В этом разделе мы будем использовать формальные определения из книги [15], для наглядности будем применять общепринятую терминологию.

Пусть  $V$  — непустое множество,  $V^{(2)}$  — множество всех его двухэлементных подмножеств. Пара  $(V, E)$ , где  $E$  — произвольное подмноже-

---

<sup>1)</sup> Отметим, что журнал «Квант» неоднократно публиковал статьи о графах для школьников. Когда один из авторов был школьником, то ему запомнились статьи про графы с цветными рёбрами [8] и [9].

ство из  $V^{(2)}$ , называется (*простым*) *графом*. Элементы множества  $V$  называются *вершинами* графа, а элементы множества  $E$  — *рёбрами*. Множества вершин и рёбер графа  $\Gamma$  обозначаются символами  $V\Gamma$  и  $E\Gamma$  соответственно.

Две вершины графа называются *смежными*, если они соединены ребром, и *несмежными* в противном случае. Множество всех вершин графа, смежных с некоторой вершиной  $A$ , называется *окружением вершины  $A$*  и обозначается  $N(A)$ . Количество вершин, смежных с данной, называется её *степенью*. Аналогично два ребра графа называются *смежными*, если у них есть общая вершина (они выходят из одной вершины).

Теперь мы можем каждому из устройств в электросети поставить в соответствие вершину графа. Каждому проводу, соединяющему два устройства, будет соответствовать ребро графа. Мы должны рассмотреть граф с цветными рёбрами, у которого все рёбра, выходящие из одной вершины, окрашены в разные цвета.

Пронумеруем цвета числами. *Рёберной  $k$ -раскраской* графа называется функция  $\phi$ , ставящая в соответствие каждому его ребру  $r$  число  $\phi(r)$  из множества  $\{1, 2, \dots, k\}$ .

Рёберная  $k$ -раскраска называется *правильной*, если смежные рёбра имеют разные цвета. Граф, допускающий правильную рёберную  $k$ -раскраску, называется *рёберно  $k$ -раскрашиваемым*. Минимальное число  $k$ , при котором граф  $\Gamma$  является рёберно  $k$ -раскрашиваемым, называется *хроматическим индексом* (*рёберным хроматическим числом*) графа и обозначается через  $\chi'(\Gamma)$ .

Если  $\chi'(\Gamma) = k$ , то граф  $\Gamma$  называется *рёберно  $k$ -хроматическим*.

Кроме раскраски рёбер графа, рассматривается раскраска вершин графа. При этом вводятся понятия *правильной раскраски вершин графа* и *хроматического числа* (не путать с хроматическим индексом). Но это тема отдельной статьи.

Через  $\Delta(\Gamma)$  обозначим наибольшую из степеней вершин графа  $\Gamma$ . В обозначениях нашей задачи имеем  $\Delta(\Gamma) = m$ .

Самое время вспомнить, что мы начинали с телефонных сетей. В телефонных сетях случай, когда любые два устройства соединены не более чем одним проводом, практически не встречается. Даже в домашней электросети сейчас применяются провода трёх цветов: для фазы, нуля и земли<sup>2)</sup>, что уж говорить про сложные коммутаторные устройства.

---

<sup>2)</sup> Инженеры отметят, что некоторые люстры с двухкнопочным выключателем содержат фазу, два нуля и землю, т. е. такая домашняя электросеть устроена немного сложнее.

Мы видим, что приведенного выше определения простого графа недостаточно для общей задачи. Придётся рассматривать объекты, в которых две вершины могут соединяться более чем одним ребром. На помощь приходит понятие мультиграфа.

*Мультиграф* — это пара  $(V, E)$ , где  $V$  — непустое множество *вершин*, а  $E$  — семейство подмножеств множества  $V^{(2)}$  (*рёбер*). При таком определении мы считаем, что элементы множества  $V^{(2)}$  могут в  $E$  повторяться, т. е. допускаются *кратные рёбра*. Если любые две вершины мультиграфа соединены не более чем  $p$  рёбрами, то такой мультиграф называется  $p$ -графом.

Пусть теперь  $\Gamma$  обозначает мультиграф. Через  $\Delta(\Gamma) = t$  обозначим наибольшую из степеней вершин мультиграфа  $\Gamma$ . Хроматический индекс мультиграфа обозначим через  $\chi'(\Gamma)$ .

### § 3. ТЕОРЕМА ЦВЕТОВОГО КОДИРОВАНИЯ. ТЕОРЕМА ВИЗИНГА

Сформулируем теорему цветового кодирования на языке графов.

**ТЕОРЕМА 1** (К. Шеннон, теорема цветового кодирования). *Пусть дан мультиграф, степень каждой вершины которого не больше  $t$ . Тогда хроматический индекс графа не больше  $\lceil 3t/2 \rceil$ <sup>3)</sup>.*

Первым, кто существенно улучшил «ответ Шеннона», был советский математик Вадим Визинг.

В одном из своих интервью Вадим Визинг вспоминает следующее (см. [7]; ниже обозначение  $d$  заменено на  $t$ ).

*В Новосибирске я начал работать над практической задачей, связанной с окраской проводов сети. Чтобы решить эту задачу, я ознакомился с теоремой Шеннона 1949 года (рёбра любого  $p$ -графа могут быть окрашены в  $\lceil 3t/2 \rceil$  цветов). Благодаря теореме Шеннона я заинтересовался более теоретическими вопросами.*

*Теорема Шеннона даёт наилучшую оценку для произвольных  $p$ -графов, но я спросил себя, какова была бы ситуация для графов без кратных рёбер? Шаг за шагом я улучшал оценку Шеннона. В какой-то момент у меня было что-то вроде  $8t/7$ , но в конечном итоге я доказал наилучший возможный результат:  $t + 1$ . Следующим шагом было рассмотрение  $p$ -графов.*

<sup>3)</sup>  $\lceil x \rceil$  обозначает функцию «потолок» — наименьшее целое, большее или равное  $x$ .

Я отправил результат в престижный журнал «Доклады АН СССР», но его отвергли. Рецензент сообщил, что это просто частный случай теоремы Шеннона и он не интересен. Результат не поняли. Поэтому я опубликовал его на месте в Новосибирске в сборнике «Дискретный анализ». Он вышел в 1964 году, когда я также решил случай  $p$ -графа. К этому времени результат уже был замечен на Западе, когда Зыков изложил его в материалах заседания в Смоленице, опубликованных совместно Чехословацкой академией наук и издательством Academic Press.

Сформулируем теорему Визинга для случая простых графов. Случай  $p$ -графов рассмотрим чуть позже.

**ТЕОРЕМА 2** (В. Г. Визинг [10, 15]). Для любого простого графа  $\Gamma$  верны неравенства  $\Delta(\Gamma) \leq \chi'(\Gamma) \leq \Delta(\Gamma) + 1$ .

Чтобы доказать теорему 2, нам понадобится ещё несколько определений.

Как и прежде, мы приводим формальные определения из [15], там же читатель может найти дополнительные пояснения и примеры.

Вершина  $v$  и ребро  $r$  называются *инцидентными*, если  $v$  является концом ребра  $r$ , т. е.  $r = (u, v)$ . *Путь* в графе — это последовательность рёбер вида  $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k)\}$ , где  $v_1, \dots, v_k$  — некоторые вершины. Если  $v_1, \dots, v_{k-1}$  попарно различны, а  $v_k$  совпадает с  $v_1$ , то путь называется (*простым*) *циклом*. Граф *связан*, если существует путь между любыми двумя вершинами. Любой граф состоит из *компонент связности* — максимальных связных подграфов. *Деревом* называется связный граф, не содержащий циклов. Если в каждой компоненте графа  $\Gamma$  выбрано максимальное дерево, то их объединение  $H$  называется *остовом* (или *каркасом*) графа  $\Gamma$ .

В настоящее время имеется уже несколько доказательств теоремы Визинга (см., например, [4]).

Приведем одно из них.

**Доказательство теоремы 2.** Отметим, что левое неравенство следует из определения. Докажем правое неравенство.

Очевидно, что правое неравенство верно для графа, состоящего из одного ребра. Предположим, что в общей ситуации правое неравенство не выполняется. Среди всех графов, ему не удовлетворяющих, выберем граф  $\Gamma$  с минимальным числом рёбер.

Пусть  $A_0$  и  $A_1$  — вершины графа  $\Gamma$ , соединённые ребром  $r_1$ . Удалим ребро  $r_1$  и рассмотрим получившийся граф  $H = \Gamma - r_1$ .

Согласно нашему предположению имеем

$$\chi'(\Gamma) > \Delta(\Gamma) + 1, \quad (1)$$

но

$$\chi'(H) \leq \Delta(H) + 1 \leq \Delta(\Gamma) + 1.$$

Положим  $m = \Delta(\Gamma)$ . Зафиксируем правильную раскраску  $\phi : EH \rightarrow \{1, 2, \dots, m+1\}$  рёбер графа  $H$  и скажем, что цвет  $q \in \{1, 2, \dots, m+1\}$  отсутствует в вершине  $A \in VH$ , если  $\phi(r) \neq q$  для любого ребра  $r$ , инцидентного вершине  $A$ . Так как число возможных цветов больше, чем  $m$ , в каждой вершине отсутствует хотя бы один цвет.

Пусть  $t_0$  и  $t_1$  — цвета, отсутствующие в вершинах  $A_0$  и  $A_1$  соответственно. Рассмотрим окружение  $N(A_0)$  вершины  $A_0$  в графе  $\Gamma$ . Будем последовательно выбирать из окружения  $N(A_0)$  вершины с соответствующими им рёбрами, обозначая вершины и рёбра соответственно  $A_1, A_2, \dots, A_k$  (вершина  $A_1$  уже обозначена) и  $r_1 = A_0A_1, r_2 = A_0A_2, \dots, r_k = A_0A_k$  соответственно. При этом параллельно будем строить последовательность цветов  $t_1, t_2, \dots, t_k$ , соблюдая следующие условия.

- I) Цвет  $t_i$  отсутствует в вершине  $A_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ).
- II)  $\phi(r_{i+1}) = t_i$  ( $i = 2, \dots, k-1$ ).

Пусть последовательности  $A_1, A_2, \dots, A_i$  и  $t_1, t_2, \dots, t_i$  уже построены. Если существует такое ребро  $r_{i+1} \in EH$ , инцидентное вершине  $A_0$ , что  $r_{i+1} \notin \{r_1, r_2, \dots, r_i\}$ ,  $\phi(r_{i+1}) = t_i$ , то конец ребра обозначаем через  $A_{i+1}$  и берём в качестве  $t_{i+1}$  один из цветов, отсутствующих в вершине  $A_{i+1}$ . Если же описанного ребра  $r_{i+1}$  не существует, то считаем построение законченным и полагаем  $k = i$ .

Поясним подробнее, как мы ищем вершину  $A_2$ . Поскольку в вершине  $A_1$  отсутствует цвет  $t_1$ , мы ищем ребро, инцидентное  $A_0$  и окрашенное в цвет  $t_1$ . Если ребра такого цвета нет, то построение закончено,  $k = 1$  и мы получили пару  $A_1, t_1$ . Если есть ребро цвета  $t_1$ , то мы обозначаем его конец  $A_2$ , выбираем цвет, отсутствующий в вершине  $A_2$ , обозначаем его  $t_2$  и приступаем к поиску ребра, инцидентного  $A_0$  и имеющего цвет  $t_2$ . Если ребра цвета  $t_2$  нет, то построение закончено и  $k = 2$ . Если есть ребро цвета  $t_2$ , то его конец обозначаем буквой  $A_3$ , в качестве  $t_3$  выбираем цвет, отсутствующий в вершине  $A_3$ , и т. д.

Таким образом, мы построим нужные последовательности. Далее возможны две ситуации.

1. Не существует ребра  $r \in EH$ , инцидентного вершине  $A_0$ , для которого  $\phi(r) = t_k$ . Переопределим функцию  $\phi$ , положив  $\phi(r_i) = t_i$

( $i = 1, \dots, k$ ) и оставив значения на других рёбрах неизменными. Получим правильную раскраску  $\phi: E\Gamma \rightarrow \{1, 2, \dots, m+1\}$  рёбер графа  $\Gamma$ .

2. Существует ребро  $r \in EH$ , инцидентное вершине  $A_0$ , для которого  $\phi(r) = t_k$ . Тогда это ребро совпадает с каким-либо из  $r_i$  ( $i = 2, \dots, k$ ). Пусть, скажем,  $r = r_j$ , тогда  $t_k = t_{j-1}$ . Снова переопределим функцию  $\phi$ , полагая  $\phi(r_i) = t_i$  ( $i = 1, \dots, j-1$ ). Ребро  $r_j$  пока не окрашено, значения функции  $\phi$  на всех остальных рёбрах не меняются.

Рассмотрим остовный подграф  $F$  графа  $\Gamma$ , рёбрами которого служат все рёбра графа  $\Gamma$ , имеющие цвет  $t_0$  или  $t_k$ . Очевидно, что степень каждой вершины графа  $F$  не больше двух, и потому каждая его связная компонента является либо простой цепью (незамкнутым путём), либо простым циклом, либо изолированной вершиной. Степени вершин  $A_0$ ,  $A_j$  и  $A_k$  в  $F$  не больше единицы, следовательно, эти три вершины не могут входить в одну компоненту. Рассмотрим отдельно два случая.

а) Вершины  $A_0$  и  $A_j$  находятся в разных компонентах графа  $F$ . В этом случае в компоненте, содержащей вершину  $A_j$ , «переставим» цвета  $t_0$  и  $t_k$ , т. е. положим  $\phi(r) = t_0$ , если было  $\phi(r) = t_k$ , и наоборот. Тогда цвет  $t_0$  будет отсутствовать и в вершине  $A_0$ , и в вершине  $A_j$ , что позволит положить  $\phi(r_j) = t_0$ . Вновь получается правильная  $(m+1)$ -раскраска рёбер графа  $\Gamma$ .

б) Вершины  $A_0$  и  $A_k$  находятся в разных компонентах графа  $F$ . Положим  $\phi(r_i) = t_i$  ( $i = j, \dots, k-1$ ), а ребро  $r_k$  оставим пока не окрашенным. Это действие не затрагивает рёбер графа  $F$ . Переставим теперь цвета  $t_0$  и  $t_k$  в компоненте графа  $F$ , содержащей вершину  $A_k$ . Теперь цвет  $t_0$  отсутствует и в вершине  $A_0$ , и в вершине  $A_k$ . Полагаем далее  $\phi(r_k) = t_0$ . Построена правильная  $(m+1)$ -раскраска рёбер графа  $\Gamma$ .

Итак, в любой ситуации строится правильная  $(m+1)$  — раскраска рёбер графа  $\Gamma$ , что противоречит неравенству (1).

Это противоречие и доказывает теорему.  $\square$

Теорема Визинга дает исключительно точные оценки хроматического индекса графа. Поскольку величина  $\chi'(\Gamma)$  может принимать только два значения, все простые графы распадаются на два класса: *первый класс*, где  $\chi'(\Gamma) = \Delta(\Gamma)$ , и *второй класс*, где  $\chi'(\Gamma) = \Delta(\Gamma) + 1$ .

Таким образом, оценка Шеннона для простых графов завышена. В этой ситуации не требуется брать  $\lceil 3m/2 \rceil$  различных цветов для проводов, а вполне хватит  $m+1$  цвета.



## § 4. ПРИМЕРЫ

Найдем хроматический индекс полных графов.

ТЕОРЕМА 3 [15]. Пусть  $K_p$  — полный граф с  $p$  вершинами. Справедливы равенства

$$\chi'(K_{2n+1}) = \Delta(K_{2n+1}) + 1 = 2n + 1, \quad (2)$$

$$\chi'(K_{2n}) = \Delta(K_{2n}) = 2n - 1. \quad (3)$$

Доказательство теоремы 3 мы дадим чуть ниже, а сейчас приведём примеры правильных раскрасок для полных графов  $K_4$  и  $K_5$  (рис. 2).

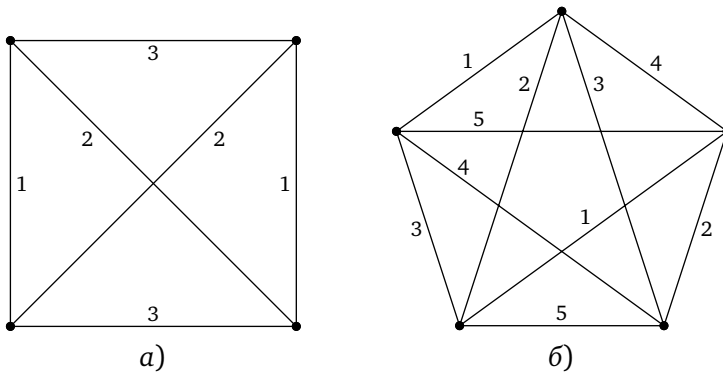


Рис. 2

ЗАДАЧА 1. Найдите правильные раскраски для полных графов  $K_6$  и  $K_7$ .

Теорема Визинга стала классической, и в настоящее время трудно представить себе учебник по теории графов, в котором она не упоминается.

В своих работах Вадим Визинг также показал, что планарный<sup>4)</sup> граф заведомо принадлежит первому классу, если его максимальная степень не меньше восьми. Кроме того, он отметил, что для максимальной степени от двух до пяти существуют планарные графы второго класса. Для степени два любой нечётный цикл является таким графом.

ЗАДАЧА 2. Постройте планарные графы второго класса с максимальной степенью: а) 3; б) 4; в) 5.

<sup>4)</sup> Плоским называется граф, вершины которого являются точками плоскости, а рёбра — непрерывными плоскими линиями без самопересечений, причём никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины. Любой граф, который можно так изобразить на плоскости, называется *планарным* [15].

Гипотеза Визинга о планарных графах утверждает, что все простые планарные графы с максимальной степенью шесть или семь принадлежат первому классу. В 2001 году установлено, что все планарные графы с максимальной степенью семь принадлежат первому классу [6]. Таким образом, остаётся открытым только случай максимальной степени шесть.

Если говорить о типичной ситуации, то верна следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 4** (П. Эрдёш [15]). *Почти все графы относятся к первому классу. А именно, если  $U_n$  — множество графов первого класса с  $n$  вершинами, а  $V_n$  — множество всех графов с  $n$  вершинами, то*

$$\frac{|U_n|}{|V_n|} \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство этой теоремы опирается на две теоремы Эрдёша, первая из которых говорит, что почти все графы связны, а вторая — что почти все графы имеют единственную вершину максимальной степени. Зная эти два утверждения, достаточно показать (как это сделал Визинг, см. ниже теорему 9), что каждый граф с единственной вершиной максимальной степени должен быть первого класса. Точнее, Визинг показал, что каждый граф второго класса должен иметь по крайней мере три вершины максимальной степени [11].

Несмотря на то, что величина  $\chi'(\Gamma)$  может принимать только два значения,  $\Delta(\Gamma)$  или  $\Delta(\Gamma) + 1$ , её отыскание является весьма трудной задачей. Рассмотрим дополнительные примеры.

Граф называется *двудольным*, если существует такое разбиение множества его вершин на две части (*доли*), что концы каждого ребра принадлежат разным частям.

**ТЕОРЕМА 5** (Д. Кёниг [15]). *Для любого двудольного графа  $\Gamma$  верно равенство  $\chi'(\Gamma) = \Delta(\Gamma)$ .*

Другими словами, все двудольные графы являются графами первого класса. Доказательство теоремы 5 читатель найдет в [15].

Граф называется *регулярным*, если степени всех его вершин равны.

**ТЕОРЕМА 6** (см. [15]). *Регулярный граф с нечетным числом вершин относится ко второму классу.*

Прежде чем доказывать теорему 6, вспомним следующее.

**ЛЕММА** (о рукопожатиях). *Сумма всех степеней вершин графа — четное число, равное удвоенному числу рёбер.*

**Доказательство.** Разрежем каждое ребро пополам и просуммируем.  $\square$

Доказательство теоремы 6. Пусть  $G$  — некоторый  $k$ -регулярный граф с  $n$  вершинами,  $n = 2s + 1$  для некоторого натурального  $s$ . По лемме о рукопожатиях  $G$  имеет  $kn/2$  рёбер. Предположим, что  $G$  рёберно  $k$ -раскрашиваем. Тогда по принципу Дирихле существует хотя бы один цвет, в который окрашены не менее  $n/2 = s + 1/2$  рёбер. Итак, должен быть по крайней мере один цвет, который появляется на  $s + 1$  рёбрах. Но  $G$  имеет только  $2s + 1$  вершину, так что из некоторой вершины выходят два ребра одного цвета. Получаем противоречие.

Согласно теореме Визинга единственным другим вариантом для хроматического индекса является  $k + 1$ .  $\square$

Теперь несложно доказать теорему 3.

Доказательство теоремы 3. Поскольку полный граф с нечетным числом вершин регулярен, равенство 2 является следствием теоремы 6. Явная раскраска приведена в решении задачи 1.

Рассмотрим реализацию полного графа  $K_{2n}$  в виде правильного  $2n$ -угольника со всеми диагоналями. Каждая сторона и диагональ соответствует ребру полного графа. Раскрасим стороны  $2n$ -угольника попеременно в 2 цвета. Разобьём множество диагоналей  $2n$ -угольника на  $2n - 3$  подмножества, где каждое подмножество состоит из  $n - 1$  взаимно параллельных диагоналей и одной диагонали, которая им перпендикулярна. Очевидно, что в каждом подмножестве диагонали между собой не имеют общих вершин, следовательно, их можно покрасить в один цвет. Мы получили правильную раскраску полного графа  $K_{2n}$  в  $2n - 1$  цвет.  $\square$

Дополнительную информацию о регулярных графах можно найти в статье [12].

Задача 3. Найдите ответ на вопрос 1 в случае обыкновенных графов.

## § 5. ОХОТА НА СНАРКОВ

*Мост* — это такое ребро графа, при удалении которого увеличивается число связных компонент.

*Снарк* — это 3-регулярный граф без мостов, второго класса.

Самым известным примером снарка<sup>5)</sup> является граф Петерсена (рис. 3). На рис. 3 а приведено классическое изображение графа Пе-

<sup>5)</sup> Наименование «снарк» было придумано в 1976 году Мартином Гарднером в честь неуловимого существа из поэмы абсурда Льюиса Кэрролла «Охота на Снарка». Слово «снарк» образовано от англ. слов snake — змея и shark — акула.

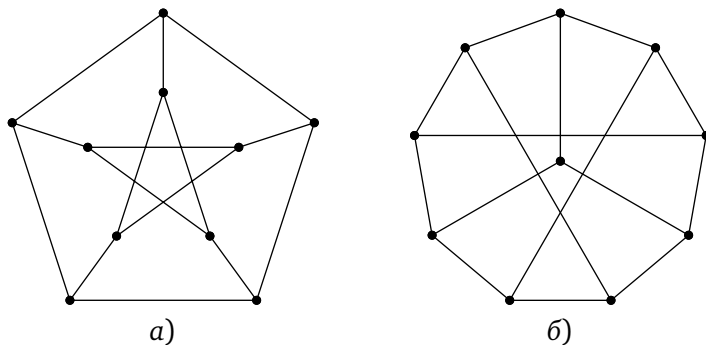


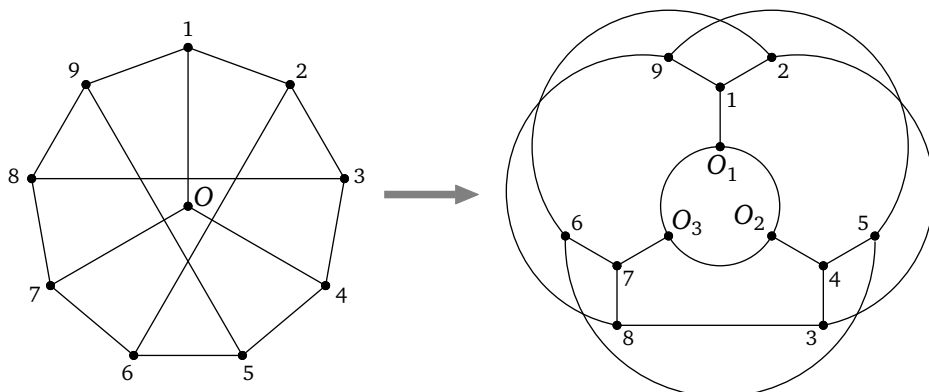
Рис. 3. Граф Петерсена

терсена, а на рис. 3 б — изоморфное изображение графа Петерсена, которое нам понадобится для дальнейших построений. До 1946 года граф Петерсена был единственным известным снарком. С тех пор открыто много других и, в частности, построены бесконечные семейства снарков.

**Задача 4.** Докажите, что граф Петерсена относится ко второму классу.

В 1975 году Руфус Айзекс построил бесконечное семейство снарков, получившее название *цветочных* снарков. До этого момента были известны только три снарка.

Построение цветочных снарков начинается с графа Петерсена (рис. 3 б), см. [2]. В этом графе мы заменяем центральную вершину циклом длиной 3, чтобы сформировать  $J_3$  — трёхлепестковый цветочный снарк. Трансформация графа Петерсена в трёхлепестковый цветочный снарк  $J_3$  показана на рис. 4.

Рис. 4. Трансформация графа Петерсена в  $J_3$

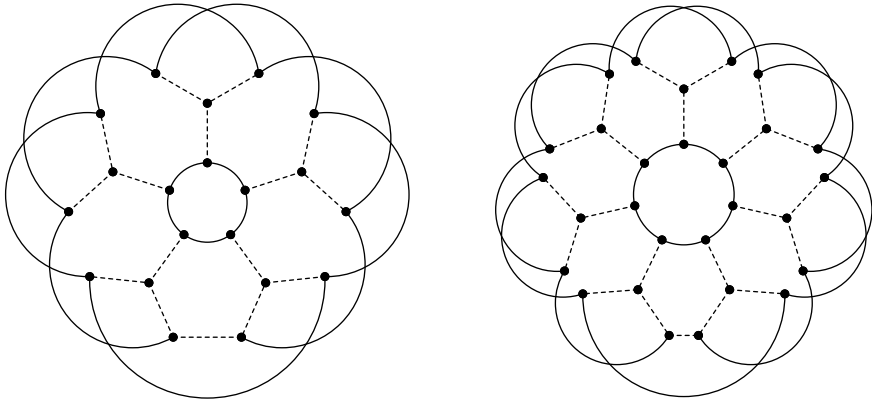


Рис. 5. Цветочные снарки

Занумерованные вершины переходят в вершины с теми же номерами, а вместо вершины  $O$  образован цикл  $O_1O_2O_3$ .

Цветочные снарки  $J_5$ ,  $J_7$  и т. д. строятся путем добавления двух лепестков к графу и двух вершин к центральному циклу.

Цветочные снарки  $J_5$  и  $J_7$  изображены на рис. 5.

Задача 5. Докажите, что графы  $J_3$ ,  $J_5$  и  $J_7$  являются снарками.

Таттом (Tutte) выдвинута следующая

Гипотеза (см. [2]). *Каждый снарк стягивается к графу Петерсена*<sup>6)</sup>.

Другими словами, каждый снарк может быть сведен к графу Петерсена путем удаления одних рёбер и сжатия других.

## § 6. МУЛЬТИГРАФЫ. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы уже упоминали, что в 1964 году Вадим Визинг получил результат не только для простых графов, но и для мультиграфов ( $p$ -графов). Самое время сформулировать теорему Визинга для мультиграфов, но для этого введем ещё несколько обозначений.

Назовём  $M(u, v)$ -кабелем совокупность всех рёбер мультиграфа, соединяющих вершины  $u$  и  $v$ , а толщиной кабеля  $\mu(u, v) = |M(u, v)|$  — количество рёбер в нем. Пусть  $p = \mu(\Gamma)$  обозначает максимальную из толщин всех кабелей в мультиграфе  $\Gamma$ :

$$p = \mu(\Gamma) = \max\{\mu(u, v), u, v \in V(\Gamma)\}.$$

<sup>6)</sup> *Стягивание ребра  $uv$*  означает отождествление смежных вершин  $u$  и  $v$ . Граф  $G$  называется *стягиваемым к графу  $H$* , если  $H$  получается из  $G$  в результате некоторой последовательности стягиваний рёбер [15].

Как и прежде,  $\Delta(\Gamma) = t$  обозначает наибольшую из степеней вершин мультиграфа  $\Gamma$ .

Для мультиграфа электрической сети квартиры  $p = 3$  (в любом кабеле имеются лишь фаза, нуль и земля).

Классический результат для мультиграфов таков.

**ТЕОРЕМА 7** (В. Г. Визинг). *Для любого мультиграфа  $\Gamma$  выполнено соотношение  $\chi'(\Gamma) \leq \Delta(\Gamma) + \mu(\Gamma) = t + p$ .*

Поскольку в простом графе любые две вершины соединены не более чем одним ребром, имеем  $p \leq 1$  ( $p = 0$ , если все вершины изолированные). Поэтому теорема 2 является частным случаем теоремы 7.

Мы не будем приводить доказательство теоремы 7. Оно во многом повторяет доказательство теоремы 2 с небольшими поправками на специфику мультиграфов. Заинтересованный читатель может найти доказательство в [10].

Найден ещё один важный параметр, от которого зависит количество цветов, — это максимальная из толщин кабелей в мультиграфе.

Приведем без доказательства ещё две теоремы о рёберной раскраске мультиграфов, ставшие классическими.

**ТЕОРЕМА 8** (Андерсен [1], Гольдберг [3, 13]). *Рассмотрим мультиграф  $\Gamma$ . Пусть  $S$  — множество всех путей  $(u, v, w)$  длины 2 в  $\Gamma$ . Тогда*

$$\chi'(\Gamma) \leq \max \left\{ \Delta(\Gamma), \max_{(u,v,w) \in S} \frac{d(u) + \mu(u, v) + d(w) + \mu(v, w)}{2} \right\}.$$

Нам понадобится ещё одно определение. Простой граф  $\Gamma$  называется *критическим*, если  $\chi'(\Gamma) = \Delta(\Gamma) + 1$  и  $\chi'(\Gamma - e) < \chi'(\Gamma)$  для каждого ребра  $e \in E(\Gamma)$ . Лемма о смежности Визинга, изложенная ниже, является полезным инструментом для изучения краевых раскрасок графов.

**ТЕОРЕМА 9** (В. Г. Визинг [11]). *Если  $\Gamma$  — критический граф степени  $\Delta(\Gamma) \geq 2$  и  $(u, v) \in E(\Gamma)$ , то вершина  $v$  имеет по крайней мере  $\max\{2, \Delta(\Gamma) - d(u) + 1\}$  соседей степени  $\Delta(\Gamma)$ .*

Новые доказательства этих классических теорем можно найти в [4].

Выведем из теоремы Визинга 7 теорему цветового кодирования Шеннона.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.** Предположим противное: контрпример существует. Пусть  $\Gamma$  — контрпример минимального размера. Пусть  $\Delta(\Gamma) = t$  и  $\mu(\Gamma) = \mu$  и  $\chi'(\Gamma) = k$ .

Поскольку  $\Gamma$  минимален, для каждого ребра  $f \in E$  получаем

$$\chi'(\Gamma - f) = k - 1.$$

По теореме 7 имеем  $k \leq t + \mu$ . По предположению,  $k > 3t/2$ . Тогда  $3t/2 < k \leq t + \mu$ , следовательно,  $t/2 < \mu$ .

Пусть  $v$  и  $w$  — вершины в  $\Gamma$  такие, что их соединяют  $\mu$  рёбер. Пусть  $e$  — одно из рёбер, соединяющих  $v$  и  $w$ . Тогда  $\chi'(\Gamma - e) = k - 1$ , так что существует  $(k - 1)$ -раскраска графа  $\Gamma - e$ . Число цветов, не используемых при окраске рёбер, инцидентных  $v$ , равно по крайней мере  $(k - 1) - (t - 1) = k - t$ . То же самое верно и для рёбер, инцидентных  $w$ .

Каждый из этих  $k - t$  или более цветов, не используемых для окраски рёбер, инцидентных  $v$ , должен использоваться для окраски рёбер, инцидентных  $w$ , и наоборот (в противном случае  $e$  может быть легко окрашено и мы получим  $(k - 1)$ -раскраску графа  $\Gamma$ ).

Таким образом, число цветов, используемых для окраски рёбер, инцидентных  $v$  и  $w$  (за исключением  $e$ ), не меньше  $2(k - t) + \mu - 1$  и не больше  $(k - 1)$ .

Тогда  $2k - (3t/2) - 1 < 2(k - t) + \mu - 1 < k - 1$ , следовательно,  $k < 3t/2$ . Получаем противоречие.  $\square$

Уже для мультиграфа электрической сети квартиры «ответ Шеннона» можно существенно улучшить: вместо  $3t/2$  цветов достаточно взять  $t + 3$  цвета.

После вопроса: «Сколько необходимо цветов для раскраски?» зададим следующий: «Как раскрашивать?».

В 1992 году описан алгоритм раскраски за полиномиальное время любого простого графа с помощью  $t + 1$  цветов, где  $t$  — максимальная степень графа (см. [5]). Алгоритм использует ту же стратегию, что и изначальное доказательство теоремы Визинга — алгоритм начинает с неокрашенного графа и последовательно ищет способы вовлечь в раскраску ещё одно ребро. Таким образом, алгоритм использует оптимальное число цветов для графов второго класса и максимум один лишний цвет для графов первого класса.

Мы показали эту статью инженеру. Он посмотрел на нас и сказал: — ...На дворе 21-й век, а вы рассказываете о цветных проводах на телефонных линиях. Знаете ли вы, что теперь уже давно используют IP-телефонию. И, вообще-то, крупные компании давно на оптоволокне...

Мы ничего не ответили, а просто перечитали эпиграф.

### Благодарности

Авторы благодарят П. Кожевникова за ценные замечания и П. Сомовола за внимание к работе.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ

1. а) См. рис. 6.

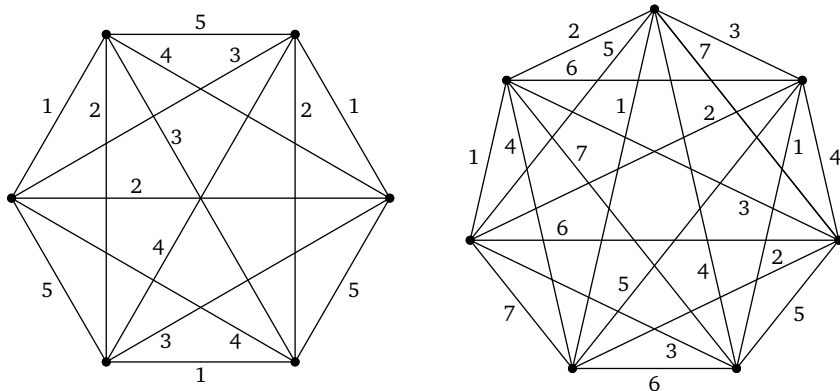


Рис. 6

Рассмотрим реализацию полного графа  $K_{2n+1}$  в виде правильного  $(2n + 1)$ -угольника со всеми проведёнными диагоналями. Раскрасим стороны  $(2n + 1)$ -угольника в  $2n + 1$  цвет. Каждую диагональ покрасим в цвет стороны, которая ей параллельна. Мы получили правильную раскраску полного графа  $K_{2n+1}$ .

2. См. рис. 7.

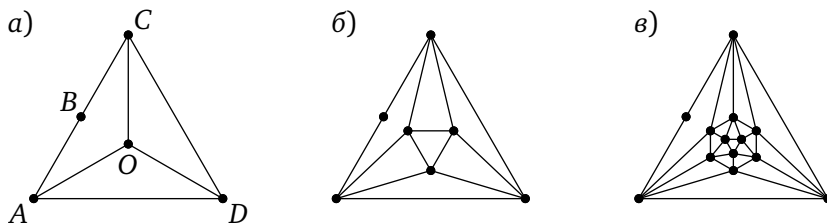


Рис. 7

Такие графы можно построить из графов правильных многогранников путём замены одного ребра на путь из пары смежных рёбер. На рисунке показаны графы, полученные из графов тетраэдра, октаэдра и икосаэдра.

ПРИМЕЧАНИЕ. Каждому графу мы можем сопоставить систему линейных уравнений. Количество переменных в системе равняется числу рёбер. Если у нас есть  $k$  цветов, то переменные принимают значения из множества  $\{2^1, 2^2, \dots, 2^k\}$ . Таким образом, задачу по раскраске рёбер графа можно запрограммировать как задачу нахождения решения системы линейных уравнений.



3. Из условия имеем, что для графа  $\Gamma$  оценка Шеннона точна, т. е.  $\chi'(\Gamma) = \lceil 3m/2 \rceil$ .

С другой стороны, по теореме Визинга для графов  $\chi'(\Gamma) \leq m + 1$ . Если  $m$  нечетное, то тогда  $(3m+1)/2 \leq m+1$ , откуда  $m=1$ . Значит, любая связная компонента графа — либо ребро, либо изолированная вершина. Для раскраски рёбер такого графа достаточно одного цвета. Но  $\chi'(\Gamma) = \lceil 3/2 \rceil = 2$ . Противоречие, т. е. в этом случае оценка Шеннона не точна.

Если  $m$  четное, то тогда  $3m/2 \leq m+1$ , откуда  $m=2$ . Значит, любая связная компонента графа — либо простая цепь (нециклическая или простой цикл), либо изолированная вершина. Но  $\chi'(\Gamma) = \lceil (3 \cdot 2)/2 \rceil = 3$ . Значит, в этом случае оценка Шеннона точна только для простых циклов нечетной длины.

4. Предположим, что существует правильная 3-раскраска графа Петерсена. Поскольку граф Петерсена содержит внешний цикл 5-го порядка, все три цвета должны появиться на этом цикле. Назовем эти цвета 1, 2 и 3. Один из этих цветов появится один раз, тогда как другие появятся дважды. Предположим без потери общности, что окраска внешнего цикла следующая: 1 – 2 – 3 – 1 – 2. Это определяет цвета рёбер, соединяющих внутренний цикл пятого порядка с внешним. Кроме того, это определяет цвет четырех рёбер внутреннего цикла, два из которых расположены рядом и имеют одинаковый цвет. Получаем противоречие.  $\square$

5. Очевидно, что графы  $J_3$ ,  $J_5$  и  $J_7$  являются 3-регулярными и не имеют мостов. Остается доказать, что для правильной окраски рёбер трёх цветов недостаточно.

Рассмотрим случай графа  $J_3$ . Предположим, что рёбра графа  $J_3$  можно покрасить в три цвета. Назовем эти цвета 1, 2 и 3. Поскольку

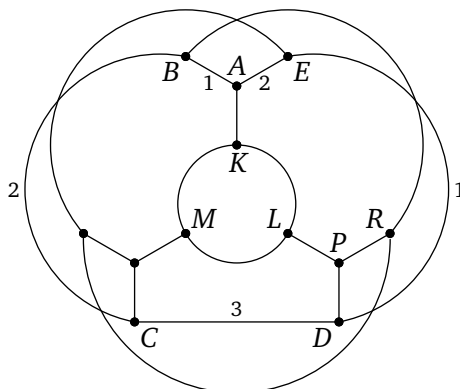


Рис. 8

граф  $J_3$  содержит цикл 5-го порядка ABCDE, без потери общности предположим, что окраска цикла следующая:  $1-2-3-1-2$  (рис. 8). Тогда рёбра  $AK$  и  $BR$  имеют цвет 3, а ребро  $PD$  должно быть покрашено в цвет 2. Значит, ребро  $PR$  должно иметь цвет 1 и, следовательно, ребро  $PL$  должно быть окрашено в цвет 3. С другой стороны, одно из рёбер в цикле  $KLM$  должно иметь цвет 3, что невозможно, так как в вершины  $K$  и  $L$  входят рёбра цвета 3. Приходим к противоречию.

Для графов  $J_5$  и  $J_7$  предлагаем использовать компьютер.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Andersen L. D. On edge-colourings of graphs // Math. Scand. 1977. V. 40. P. 161–175.
- [2] Green R. Vizing's Theorem and edge-chromatic Graph Theory. 2015. <https://math.uchicago.edu/~may/REU2015/REUPapers/Green.pdf>.
- [3] Goldberg M. K. Edge-coloring of multigraphs: recoloring technique // J. Graph Theory. 1984. V. 8. P. 123–137.
- [4] Kostochka A. A new tool for proving Vizing's Theorem, 2015. <https://kostochk.web.illinois.edu/math581/viz4.pdf>.
- [5] Misra J., Gries D. A constructive proof of Vizing's Theorem // Information Processing Letters. 1992. V. 41, № 3. P. 131–133.
- [6] Sanders D. P., Zhao Yue. Planar graphs of maximum degree seven are class I // J. Comb. Theory. Ser. B. 2001. V. 83, № 2. P. 201–212.
- [7] Interview with Vadim G. Vizing // European Mathematical Society. 2000. № 38. P. 22–23.
- [8] Березина Л. О графах с цветными рёбрами // Квант. 1973. № 8. С. 49–53.
- [9] Вагутен В. Н. Задачи о графах, или Сказка «Иван-царевич и Серый Волк» // Квант. 1974. № 11. С. 23–29, 59.
- [10] Визинг В. Г. Об оценке хроматического класса  $p$ -графа // Дискретный анализ. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР. 1964. Вып. 3. С. 25–30.
- [11] Визинг В. Г. Критические графы с данным хроматическим классом // Дискретный анализ. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР. 1965. Вып. 5. С. 9–17.
- [12] Гашков С. Б. Регулярные графы // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 25. М.: МЦНМО, 2020. С. 79–109.
- [13] Гольдберг М. К. Строение мультиграфов с ограничением на хроматический класс // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. 1977. Вып. 30. С. 3–12.

- [14] *Гудмэн Р., Сони Дж.* Игра разума: как Клод Шеннон изобрел информационный век. М.: Эксмо, 2018.
- [15] *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009.

---

Валерий Михайлович Журавлёв, АО «Туполев», Москва

ZhuravlevVM@mail.ru

Каролина Валерьевна Журавлёва, ООО «Джи и Хэлскеа», Москва

ZhuravlevaKV@mail.ru