Дополнение к задачнику

Хорошая задача ценна своими связями. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

Эстетическое чувство позволяет ощутить богатство связей и естественность задачи. Оно так важно в том числе и по этой причине. Значение математика определяется произведением его «пробивной силы» на эстетическое чувство (впрочем, эти две вещи взаимозависимы).

При публикации дополнения к задачнику нам прежде всего важны эти связи. Разумеется, содержательные и важные связи могут найтись как с классикой, так и с сюжетами, которые находятся в процессе исследования и ещё не получили изящной формулировки.

В выпуске 2 (с. 217, см. решение: выпуск 6, с. 140–142) опубликована

Задача 2.7. Конечно или бесконечно множество многочленов без кратных корней, со старшим коэффициентом 1, все коэффициенты которых целые, а все корни вещественны и принадлежат отрезку $[-1{,}99; +1{,}99]$? (*А. Я. Канель*)

В выпуске 28 (с. 238, см. решение: выпуск 32, с. 192–193) опубликована родственная

Задача 2.7′. У многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом 1 все корни различны и их модули равны 1. Докажите, что $P(x)$ делит многочлен вида $x^n - 1$ для некоторого n. (*М. Л. Концевич*)

Ещё одна родственная задача 2.7″ опубликована в выпуске 32, с. 184.

В продолжение темы:

Задача 2.7(3) (на исследование). *Опишите все такие интервалы (a, b), что имеется бесконечное число многочленов с целыми коэффициентами, все корни которых лежат на интервале (a, b).* (*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 7 (с. 187–188) опубликована

Задача 7.5. (а) При каких k через любые k точек плоскости проходит кривая n-го порядка?

(б) На плоскости отмечено несколько точек. Если окружность проходит через три отмеченные, то она проходит и через четвёртую. Докажите, что все отмеченные точки лежат на одной окружности.

(в) На плоскости отмечено несколько точек. Если кривая второго порядка проходит через пять отмеченных, то она проходит и через шестую. Докажите, что все отмеченные точки лежат на одной кривой второго порядка. Обобщите это утверждение для кривых n-го порядка.

(*А. Я. Белов*)

Вот связанный сюжет (выпуск 32, с. 186):

Задача 7.5′. (а) На плоскости отмечено $n \geqslant 6$ точек, никакие 6 из которых не лежат на одной квадрике. Пусть $k \leqslant n-5$. Докажите, что найдутся три точки такие, что квадрика, через них проходящая, содержит ровно k отмеченных точек.

(б) Обобщите это утверждение для кривых n-го порядка, а также для окружностей. (*Г. А. Гальперин*)

В продолжение сюжета:

Задача 7.5″. (а) *При каких k через любые k точек n-мерного пространства проходит поверхность m-го порядка*?

Напомним знаменитую *теорему Сильвестра*. На плоскости отмечено несколько точек. Если прямая проходит через две отмеченные, то она проходит и через третью. Тогда все отмеченные точки лежат на одной прямой.

(б) *В пространстве отмечено несколько точек. Если плоскость проходит через три отмеченные, то она проходит и через четвёртую. Верно ли, что все отмеченные точки лежат в одной плоскости*?

(в) *Аналогичные вопросы для произвольной размерности и для кривых (поверхностей) произвольной степени в случае, когда отмеченных точек достаточно много.* (*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 13 (с. 179, см. решение: выпуск 15, с. 237) опубликована

Задача 13.3. Известно, что для любой такой последовательности $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, что $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$, имеем $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i < \infty$. Докажите, что тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 < \infty.$$

(*Фольклор*)

Ей родственна

Задача 13.3$'$ (выпуск 26, с. 269). Известно, что $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$, $a_i > 0$. Пусть $s_j = \sum_{i=1}^{j} a_i$. Докажите, что тогда $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i/s_i) = \infty$. (*Фольклор*)

В продолжение темы:

Задача 13.3$''$. *Известно, что* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$, $a_i > 0$. *Пусть* $s_j = \sum_{i=1}^{j} a_i$. *Докажите, что* $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i/s_i^2) < \infty$. (*Л. Радзивиловский*)

В выпуске 19 (с. 257, см. решение: выпуск 20, с. 265–267) опубликована

Задача 19.3. Решите уравнения

$$\text{а) } x^2 + y^2 = (x+1)^3; \quad \text{б) } x^2 + xy + 2y^2 = (y+1)^3$$

в целых числах. (*Н. Н. Осипов*)

Родственная задача 19.3$'$ того же автора опубликована в выпуске 26 (с. 272).

В продолжение темы:

Задача 19.3$''$. *Решите уравнение* $x^2 + xy + 41y^2 = (yz+1)^3$ *в натуральных числах.* (*Н. Н. Осипов*)

В выпуске 23 (с. 216) опубликована

Задача 23.6. Все вершины выпуклого 10^9-угольника имеют целые координаты. Докажите, что его диаметр не меньше 10^{12}.

(*А. Я. Канель-Белов*)

Задача была предложена на третьем Краснодарском фестивале юных математиков в 1992 году. Следующая задача была на олимпиаде 239 школы Санкт-Петербурга в 1998 году и опубликована в выпуске 27 (с. 245–246).

Задача 23.6$'$. Вершины выпуклого $2n$-угольника ($n \geqslant 2$) лежат в узлах целочисленной решётки. Пусть S_n — минимальное возможное значение его площади.

(а) Докажите, что $S_n \geqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

(б) Докажите, что существует положительное число α такое, что при всех натуральных n выполнено неравенство $S_n > \alpha \cdot n^3$.

(*С. Иванов*)

На международной студенческой олимпиаде IMC-2020 была предложена задача на родственный сюжет (см. п. (а)):

Задача 23.6$''$. (а) Докажите, что для любого натурального d найдётся константа $C(d)$ такая, что для любого центрально-симметричного выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^d$ и любого $0 < \varepsilon < 1$ найдётся выпуклый многогранник $L \subset \mathbb{R}^d$ с не более чем $C(d)\varepsilon^{1-d}$ вершинами, для которого $(1-\varepsilon)K \subseteq L \subseteq K$. (*Ф. В. Петров*)

(б) Пусть P — многогранник в $\mathbb{R}^d$ на 4^d вершинах и все вершины имеют целые координаты. Тогда найдутся грань Г и точка q во внутренности этой грани такие, что q лежит в минимальной решётке, натянутой на вершины Г. (*Д. А. Захаров*)

В продолжение темы:

Задача 23.6(3). *Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклая фигура, центрально-симметричная относительно начала координат, ∂K — её граница. Пусть*

$$\iint\limits_K \operatorname{dist}(\vec{x}, \partial K)\, d^2\vec{x} > 2,$$

где $\operatorname{dist}(\vec{x}, \partial K)$ — расстояние от точки $\vec{x}$ до ∂K. Докажите, что K содержит хотя бы 3 целых точки. (*Л. Радзивиловский.*)

В выпуске 26 (с. 266, см. решение: выпуск 27, с. 266–269) опубликована

Задача 26.4. Пусть $k+2$ точечных птичек в многомерном аффинном пространстве движутся прямолинейно и равномерно. Докажите, что если все эти птички $k+2$ раза оказались в некотором (не обязательно одном и том же) аффинном подпространстве размерности k, то они всё время находятся в некотором (переменном) аффинном подпространстве размерности k. (*А. Я. Канель-Белов*)

Развитием темы служит

Задача 26.4′. (а) (выпуск 27, с. 248). Четыре пешехода идут с постоянной скоростью. Известно, что первый и второй встретились со всеми. Докажите, что третий встретился с четвёртым либо их скорости равны. (*Фольклор*)

(б) (выпуск 28, с. 236). Обобщите и решите задачу из п. (а) для случая попадания $k+1$ птички в $(k-1)$-мерное подпространство. (*А. Я. Канель-Белов*)

Эти задачи решаются путём перевода на язык внешних произведений и определителей. Для иллюстрации силы этого метода приведём ещё несколько задач.

Задача 26.4(3) (выпуск 32, с. 189). (а) *Выведите красивую формулу для площади многоугольника с последовательными вершинами* (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) (*именно в таком порядке*).

(б) *Даны описанный плоский четырёхугольник $ABCD$ и точка P в пространстве. Докажите, что*

$$PD^2 \cdot S_{ABC} + PB^2 \cdot S_{ACD} = PA^2 \cdot S_{BCD} + PC^2 \cdot S_{ABD}.$$

(в) *Дана матрица R, отвечающая вращению в трёхмерном евклидовом пространстве. Найдите угол вращения и ось.* (*Фольклор*)

В продолжение темы:

Задача 26.4(4). (а) *Даны точки $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{R}^n$, $a_{ij} = |P_iP_j|$, $A = (a_{ij})$. При каком максимальном m матрица A может оказаться обратимой*?

(б) *Многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ вписан в окружность. Рассмотрим такую кососимметрическую $(n \times n)$-матрицу a_{ij}, что при $i < j$ всегда $a_{ij} = |A_iA_j|$. Докажите, что ранг этой матрицы не превосходит* 2.

(в) *При каком условии четыре точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) лежат на одном* цикле (*т. е. окружности или прямой*)?

(г) *Докажите, что две квадрики пересекаются не более чем в четырёх точках.*

(д) *Обобщите пп.* (б) *и* (в) *на гиперповерхности произвольной степени и многомерье.*

(е) (Результант.) *При каком условии два многочлена*

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \quad \text{и} \quad Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_m$$

имеют общий корень? (*Фольклор*)

В выпуске 29 (с. 256) опубликована

Задача 29.6. Дана матрица размера $k \times 667$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{667}$. Известно, что в разности между любыми двумя различными строками каждый остаток $x \in \mathbb{Z}_{667}$ встречается ровно k раз. Докажите, что то же самое верно и для столбцов. (*А. Я. Канель-Белов*)

При решении этой задачи полезно начать с её даунгрейда.

Задача 29.6$'$. *Дана матрица размера $2n \times 2n$ с коэффициентами из* $\{0, 1\}$. *Известно, что любые два столбца различаются в n позициях. Докажите, что любые две строки тоже различаются в n позициях.* (*Фольклор*)

В выпуске 29 (с. 256–257) опубликована

Задача 29.7. Перестановке (биекции) $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ отвечает преобразование рядов: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \to \sum_{i=1}^{\infty} a_{\sigma(i)}$.

Назовём перестановку *полезной*, если она может преобразовать расходящийся ряд в сходящийся, и *зловредной*, если она может преобразовать сходящийся ряд в расходящийся.

(а) Существует ли полезная и не зловредная перестановка?

(б) Назовём перестановку *могучей*, если она может преобразовать сходящийся ряд в сходящийся, но с другой суммой. Верно ли, что могучая перестановка является и полезной и зловредной? Верно ли, что полезная и зловредная перестановка является могучей?

(*М. Л. Гервер*)

В развитие темы:

Задача 29.7′. *Приведите критерии полезности, зловредности и могучести для перестановки.* (*М. Л. Гервер*)

В выпуске 30 (с. 231) опубликована

Задача 30.12. Дана непрерывная функция $f:[0,1]\to[0,1]$. Её k-я *итерация* $f^{(k)}(x)$ — это $f(f(\ldots(x)\ldots))$ (k раз). Известно, что $f^{(3)}(x)=x$, но $f(x)\neq x$ при некотором x. Докажите, что тогда для любого k существует такое $y\in[0,1]$, что $f^{(k)}(y)=y$, но $f^{(m)}(y)\neq y$ при всех $1\leqslant m<k$. (*Теорема Шарковского*)

Приведём более общий факт.

Задача 30.12′. (а) *Рассмотрим следующее отношение порядка на множестве натуральных чисел*:

$$3\rhd 5\rhd 7\rhd\ldots,\quad 6\rhd 10\rhd 14\rhd\ldots,\quad 2^k3\rhd 2^k5\rhd\ldots,$$
$$\ldots 2^k\rhd 2^{k-1}\rhd\ldots\rhd 8\rhd 4\rhd 2\rhd 1.$$

Предположим, что непрерывная функция $f:[0,1]\to[0,1]$ имеет период n, причём $n\rhd m$. Докажите, что тогда f имеет период m.

(*Теорема Шарковского*)

(б) *Постройте функцию f, все периоды которой равны степеням двойки.* (*В. А. Тиморин, А. И. Буфетов*)

В выпуске 30 (с. 231–232) опубликована

Задача 30.15. Периодическую последовательность символов можно задавать запретами, которые показывают, какие последовательности символов не могут в ней появляться. Например, последовательность $aabaabaab\ldots$ задаётся тремя запретами b^2, bab, a^3.

(а) Дана последовательность периода n. Скольких запретов заведомо будет достаточно?

(б) Периодическая последовательность над n-буквенным алфавитом задана запретами длины k. Каков её максимально возможный период?

(в) Докажите, что последовательность периода n нельзя задать меньше чем $\log_2 n$ запретами. (*А. Я. Канель-Белов*)

В продолжение темы (см. также 29.15′, выпуск 30, с. 237):

Задача 30.15′. Сверхслово (*т. е. бесконечное слово*) *называется* равномерно рекуррентным (*сокращённо* р. р.) (*в другой терминологии* почти периодическим), *если для любого его подслова* $u \sqsubset W$ *найдётся такая константа* $N(u)$, *что* u *входит в любой фрагмент сверхслова* W *длины* $N(u)$.

(а) *Докажите, что для любого сверхслова* U *найдётся равномерно рекуррентное сверхслово* W *такое, что если* $v \sqsubset W$, *то* $v \sqsubset U$ *для любого слова* v.

(б) *Назовём* обструкцией u *минимальный запрет в сверхслове* W. *Это значит, что* $u \not\sqsubset W$, *но всякое собственное подслово в* u *есть подслово в* W. *Пусть* $O_W(n)$ — *количество обструкций в* W *длины не больше* n. *Пусть* W — *р. р. сверхслово. Докажите, что* $W_O(n) \leqslant \log_2 n$ *при бесконечно многих* n.

(в) (Открытый вопрос.) *Пусть* W — *р. р. сверхслово. Докажите, что* $W_O(n) \leqslant k_n$ *при бесконечно многих* n. (*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 31 (с. 210) опубликована

Задача 31.5. Основанием пирамиды $ABCEH$ служит выпуклый четырёхугольник $ABCE$, который делится диагональю BE на два равновеликих треугольника. Длина ребра AB равна единице, длины рёбер BC и CE равны. Сумма длин рёбер AH и EH равна $\sqrt{2}$. Объём пирамиды равен $1/6$. Найдите радиус шара, имеющего наибольший объём среди всех шаров, помещающихся в пирамиде $ABCEH$.

(*Письменный вступительный экзамен, ВМК МГУ*, 1978 *г.*)

Такого рода достаточно интересные стереометрические «гробы» на письменном экзамене были распространены в те годы (особенно интересные — на ВМК, хорошо бы их собрать). Сейчас, к сожалению, стереометрии уделяется гораздо меньше внимания.

Приведём ещё несколько задач той же стилистики:

Задача 31.5′. (а) *В пирамиде* $SABC$ *грани* ASC, BSC *и* ASB *равновелики. Сумма расстояний от середины ребра* BC *до граней* ASB *и* ASC *в полтора раза меньше высоты пирамиды, опущенной из вершины* S. *Внутри пирамиды есть точка* M, *полусумма расстояний от которой до вершин* A, B *и* C *равна сумме расстояний до всех граней пирамиды. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если длина ребра* AS *равна* $\sqrt{31/11}$. (*Письменный вступительный экзамен, ВМК МГУ*, 1977 *г.*)

(б) *Внутри прямого кругового конуса, касаясь основания, лежат три шара радиусов* 4, 4, *и* 5. *Каждый из них касается двух других шаров и некоторой образующей конуса. Найдите радиус основания конуса, если известно, что угол между основанием и образующей равен* $2\,\mathrm{arctg}(1/4)$. (*Письменный вступительный экзамен, мехмат МГУ*, 1976 *г.*)

В выпуске 31 (с. 211) была опубликована

Задача 31.9. Робот Чертёжник является *конечным автоматом*, т. е. имеет только конечное число внутренних состояний. Он может передвигаться по клетчатому листу бумаги, закрашивая клетки. Для Чертёжника допустимы всего три действия:

1) *закрасить* — закрасить клетку;
2) *налево* — повернуться на 90 градусов налево вокруг начала стрелки;
3) *прыгнуть* — перепрыгнуть в центр соседней клетки по направлению стрелки.

Кроме того, Чертёжник умеет проверять условие *впереди край*.

(а) Напишите программу для Чертёжника, по которой он на любом листе бумаги (в том числе и тогда, когда размер листа не помещается в его памяти) закрасит все клетки квадрата, кроме клеток, содержащих его центр (в зависимости от чётности длины стороны листа это одна клетка или четыре клетки).

(б) Можно ли написать программу, чтобы Чертёжник закрасил *только* центр листа? (*А. Я. Канель-Белов, М. В. Сапир*)

В продолжение темы:

Задача 31.9′. Робот — *это автомат с конечным количеством состояний памяти, производящий определённый набор действий по заранее заданной программе. Робот может делать и запоминать следующее*:

1) перемещаться вперёд (в соседнюю клетку);
2) поворачиваться на месте на 90 градусов;
3) ставить флажок в клетку, где находится (если флажок у него есть);
4) проверять наличие флажка в своей клетке;
5) брать флажок из своей клетки.

Наличие у робота флажков (и их количество) оговаривается заранее. Программа состоит из пронумерованного упорядоченного набора инструкций для робота, причём некоторые инструкции могут заключаться в переходе к другой инструкции. Мы будем ставить для робота задачи обхода, состоящие в том, чтобы обойти некоторую область, т. е. побывать в каждой её клетке.

(а) Докажите, что робот с одним флажком не сможет обойти ленту.

(б) Докажите, что робот с тремя флажками может обойти плоскость. Может ли робот с тремя флажками обойти трёхмерное пространство?

(в) Пусть непроходимая для робота линия делит плоскость на полуплоскости. Докажите, что робот с одним флажком может обойти полуплоскость.

(г) Докажите, что робот с одним флажком не может обойти плоскость с разрезами по отрезкам $[-1;1]$ на осях координат, а с двумя флажками — может.

(д) Докажите, что робот с двумя флажками не может обойти плоскость.

(е) Пусть на ленте написаны буквы русского алфавита. Докажите, что вне зависимости от того, что написано, робот с одним флажком ленту не обойдёт. (*А. В. Анджанс, И. А. Иванов-Погодаев, А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 31 (с. 212) опубликована

Задача 31.14. (а) Можно ли так отметить n точек в единичном квадрате, чтобы в любом прямоугольнике площадью $2/((\sqrt{5}+1)n)$ была отмеченная точка?

(б) Постройте такую ограниченную бесконечную последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, что неравенство $|x_i-x_j|\cdot|i-j|\geqslant 1$ выполнено для каждой пары различных чисел i и j. (*А. В. Анджанс*)

В продолжение темы:

Задача 31.14′. *При каких ε можно так отметить n точек в n-мерном единичном кубе, чтобы в любом параллелепипеде объёма ε была отмеченная точка*? (*В. Н. Темляков*)

В выпуске 32 (с. 180) опубликована

Задача 32.5. Назовём число V *хорошим*, если существуют два выпуклых подмножества X, Y трёхмерного единичного куба объёма V с непересекающимися проекциями на каждую из координатных плоскостей. Найдите супремум множества хороших чисел.

(*Й. Ткадлец, А. Акопян*)

В продолжение темы:

Задача 32.5′. *Дан единичный куб K, прямая l и плоскость P, ортогональная l. Докажите, что длина проекции K на l равна площади проекции K на P.* (*Л. Радзивиловский*)