Решения задач из прошлых выпусков

19.3$'$ (выпуск 126, с. 272). Условие. а) Докажите, что уравнение

$$(y^2-2x^2)^2=2y^2+x+y$$

неразрешимо в натуральных числах x и y.

б) Докажите, что для каждого целого $c \geqslant 4$ уравнение

$$x(y^2-2x^2)+cx+y+1=0 \qquad (1)$$

имеет не более пяти решений (x, y) в целых числах. (*Н. Н. Осипов*)

Решение. а) Перепишем уравнение в виде

$$(y^2-2x^2-1)^2=4x^2+x+y+1.$$

Если $y<3x$, то имеют место неравенства

$$(2x)^2<4x^2+x+y+1<(2x+1)^2,$$

так что правая часть не может быть точным квадратом.

Пусть $y \geqslant 3x$. Зафиксируем натуральное число x и исследуем функцию

$$F(y)=(y^2-2x^2-1)^2-4x^2-x-y-1$$

при $y \geqslant 3x$. Имеем

$$F(3x)=(7x^2-2x-2)(7x^2+2x)>0.$$

Кроме того,

$$F'(y)=4y(y^2-2x^2-1)-1,$$

и видно, что $F'(y)>0$ при любом $y \geqslant 3x$. Следовательно, функция $F(y)$ является возрастающей при $y \geqslant 3x$. Таким образом, $F(y) \geqslant F(3x)>0$, поэтому уравнение $F(y)=0$ при $y \geqslant 3x$ решений не имеет.

Комментарий. В задаче рассматривается пример диофантова уравнения 4-й степени, для которого не выполнено *стандартное условие*

Рунге (см., например, теорему 1 на с. 262 в монографии [1], однако сам *метод Рунге* работает. Более подробно об этом семействе диофантовых уравнений можно прочитать в статье [2]. Для сравнения: уравнение $(y^2-2x^2)^2=3y^2+x+y$, очень похожее на данное, уже не может быть решено методом Рунге.

Список литературы

[1] *Mordell L. J.* Diophantine equations. London: Academic Press Inc., 1969.

[2] *Osipov N. N., Medvedeva M. I.* An elementary algorithm for solving a diophantine equation of degree four with Runge's condition // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2019. Т. 12, № 3. С. 331–341.

(*Н. Н. Осипов*)

б) Если $x=0$, то $y=-1$. Пусть далее $x\neq 0$. Заменим переменную y на (также целочисленное) k, положив $k=y^2-2x^2+c$. Тогда $y=-kx-1$ и из (1) получаем $x((-kx+1)^2-2x^2+c-k)=0$. Поскольку $x\neq 0$, получаем квадратное уравнение относительно x, из которого находим

$$x=-\frac{k}{k^2-2}\pm\sqrt{\frac{k-c}{k^2-2}+\frac{2}{(k^2-2)^2}},\qquad y=-kx-1.$$

При $|k|\geqslant 2$ и $c\geqslant 4$ имеем

$$\frac{k-c}{k^2-2}+\frac{2}{(k^2-2)^2}\leqslant\frac{k-4}{k^2-2}+\frac{2}{(k^2-2)^2}.$$

Но последнее выражение отрицательно при $k\leqslant -2$ и $k\in\{2,3\}$. А если $k\geqslant 4$, то

$$|x|\leqslant\frac{k}{k^2-2}+\sqrt{\frac{k-4}{k^2-2}+\frac{2}{(k^2-2)^2}}<1,$$

что невозможно. Следовательно, $k\in\{0,\pm 1\}$. Рассмотрим оставшиеся случаи.

1. Пусть $k=-1$. Тогда $x=-1\pm\sqrt{c+3}$.

2. При $k=0$ имеем $x=\pm\dfrac{\sqrt{2c+2}}{2}$.

3. Наконец, если $k=1$, то $x=1\pm\sqrt{c+1}$.

В каждом из этих случаев мы получим либо два решения, либо ни одного, при этом только случаи 1 и 2 могут одновременно дать по два целочисленных решения. Если ещё учесть тривиальное решение $(x,y)=(0,-1)$, то всего решений оказывается не более пяти.

Комментарии. I. Уравнение (1) имеет пять решений при $c=2t^2-1$, где $t \geqslant 2$ таково, что число $2t^2+2$ есть точный квадрат. С помощью теории *уравнений Пелля* (см., например, [2]) можно найти, что

$$c \in \{97, 3361, 114241, 3880897, 131836321, \dots\}.$$

II. В случае $c<0$ утверждение о равномерной ограниченности числа решений уравнения (1) доказать не удалось. Возможно, что это утверждение и неверно, хотя оно выглядит весьма правдоподобным (см. ниже).

При $-10^7 \leqslant c < 0$ с помощью алгоритма из статьи [1] можно найти рекордное значение $c=-1219919$, при котором уравнение (1) имеет семь решений

$$(x, y) \in \{(-782, 1563), (-24, -1105), (0, -1), (1, -1105), (1, 1104), (23, -1105), (780, -1561)\}.$$

При $-10^{11} \leqslant c < 0$ других значений c, дающих семь или более решений, нет. Другую интересную статистику можно найти по ссылке `https://dxdy.ru/topic139910.html`.

Отметим, что при $c<0$ для решений (x, y) уравнения (1) справедлива оценка

$$|x| \leqslant 1+\sqrt{\frac{|c|+3}{2}}.$$

Эта оценка является точной для $c=-2t^2+3$, где $t \geqslant 2$, так как одним из решений будет $(x, y)=(-t-1, 2t+1)$. При $t=781$ получим упоминавшееся выше рекордное значение $c=-1219919$.

III. Что ещё можно сказать о числе решений уравнения (1) при $c<0$?

III_1. Поскольку $y+1$ должно делиться на x, любое решение имеет вид

$$(x, y)=(t, st-1), \tag{2}$$

где s, t — некоторые целые числа, $t \neq 0$. Пара (2) будет решением (1) при

$$c=-(s^2-2)t^2+2st-s-1. \tag{3}$$

При условии (3) и $y=st-1$ уравнение (1) имеет три корня относительно x: это

$$x=t, \quad x=\frac{-t \pm \sqrt{t^2-2s}}{2}.$$

Положим $s=(t^2-u^2)/2$, где $u=t+2v$. Тогда

$$c=-4t^4v^2-8t^3v^3-4t^2v^4-4t^2v-4tv^2+2t^2+2tv+2v^2-1. \tag{4}$$

При условии (4) уравнение (1) имеет три решения

$$(t, -2tv(t+v)-1), \quad (v, -2tv(t+v)-1), \quad (-t-v, -2tv(t+v)-1).$$

Вместе с тривиальным решением $(0, -1)$ получим по крайней мере четыре решения. При $t = -9$ и $v = -23$ ($c = -175\,481\,375$) будет шесть решений.

III$_2$. Рассмотрим условие (3) в частных случаях $t = \pm 1$.

При $t = 1$ имеем $c = -s^2 + s + 1$, где $s = -2v^2 - 2v$. Вместе с парой $(x, y) = (1, s-1)$ решением уравнения (1) будет и пара $(x, y) = (1, -s)$. Таким образом, при

$$c = -4v^4 - 8v^3 - 6v^2 - 2v + 1$$

уравнение (1) имеет не менее пяти решений. При $v = 21$ ($c = -854699$) и $v = 130$ ($c = -1160117659$) будет шесть решений, а при $v = 23$ ($c = -1219919$) — семь.

Аналогично, при $t = -1$ получим $c = -s^2 - 3s + 1$, где $s = -2v^2 + 2v$. Вместе с парой $(x, y) = (-1, -s-1)$ решением будет и пара $(x, y) = (-1, s+2)$. Таким образом, при

$$c = -4v^4 + 8v^3 + 2v^2 - 6v + 1$$

уравнение (1) имеет не менее пяти решений.

III$_3$. Рассмотрим теперь условие (3) при $s = \pm 2$.

При $s = 2$ получим $c = -2t^2 + 4t - 3$, при этом $(x, y) = (t, 2t-1)$ будет одним из решений уравнения (1). Для упрощения дальнейших формул сделаем замену $t \to t+1$. Тогда $c = -2t^2 - 1$ и одним из решением будет $(x, y) = (t+1, 2t+1)$. Ясно, что $(x, y) = (-t+1, -2t+1)$ также является решением. Ещё два решения можно искать в виде $(1, y)$, где

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{8t^2 + 9}}{2}.$$

Существует бесконечно много значений t, при которых оба решения $(1, y)$ будут состоять из целых чисел. Для таких t всего имеется не менее пяти решений. (Можно также искать дополнительную пару решений в виде $(-1, y)$, где

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{8t^2 + 17}}{2}.$$

И здесь существует бесконечно много значений t, дающих решения в целых числах.) При $t = 18$ ($c = -649$) получим шесть решений.

При $s = -2$ всё аналогично: имеем $c = -2t^2 - 4t + 1$, при этом $(x, y) = (t, -2t-1)$ будет решением (1). После замены $t \to t - 1$ получим $c=-2t^2+3$ и $(x,y)=(t-1,-2t+1)$. Ещё одно решение — это $(x,y)=(-t-1,2t+1)$. Дополнительную пару решений снова можно найти в виде $(1,y)$ или $(-1,y)$, где

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{8t^2-7}}{2}\quad\text{или}\quad y=\frac{1\pm\sqrt{8t^2+1}}{2}$$

соответственно. При $t=6$ $(c=-69)$ получим шесть решений.

IV. Рассмотрим аналогичное кубическое диофантово уравнение

$$x(y^2-2x^2)+x+y+c=0, \tag{5}$$

где $c\geqslant 1$. Считая $x\neq 0$, положим $k=y^2-2x^2+1$. Имеем

$$x=-\frac{ck}{k^2-2}\pm\sqrt{\frac{k-1}{k^2-2}+\frac{2c^2}{(k^2-2)^2}},\quad y=-kx-c. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что если $k\geqslant 2$, то

$$|x|\leqslant c+\sqrt{\frac{c^2+1}{2}},$$

а если $k\leqslant -2$, то

$$|x|<c+\sqrt{\frac{c^2}{2}}.$$

Для оставшихся значений $k\in\{0,\pm1\}$ имеем

$$x=\pm\sqrt{\frac{c^2+1}{2}},\quad x=c\pm\sqrt{2c^2},\quad x=-c\pm\sqrt{2c^2+2}.$$

В итоге приходим к оценке

$$|x|\leqslant c+\sqrt{2c^2+2}, \tag{7}$$

которая достигается при $x=-c-\sqrt{2c^2+2}$. Оценку (7) можно использовать для отыскания всех решений уравнения (5), однако есть более эффективный алгоритм (см. [1]).

Пусть теперь c таково, что $c^2=2t^2-1$ для некоторого $t\geqslant 1$, т. е.

$$c\in\{1,7,41,239,1393,8119,\ldots\}.$$

Тогда оценка (7) для решений (x,y) уравнения (5) будет точной. Более того, для таких c при $k\in\{-1,0,2\}$ все числа (6) оказываются целыми. Это значит, что для указанных значений c уравнение (5) имеет не менее семи решений. Например, при $c=239$ получаем

$$(x,y)\in\big\{(-577,-816),\ (-408,577),\ (-169,-239),\ (-70,-99),$$

$$(-3,10),\ (-2,-11),\ (-1,-15),\ (-1,16),\ (0,-239),\ (5,1),\ (7,-8),\ (99,-140),\ (169,-239)\big\}$$

(всего 13 решений). С помощью компьютера можно убедиться, что это значение c является рекордным по числу решений при $1 \leqslant c \leqslant 10^6$. Неизвестно, будет ли число решений уравнения (5) равномерно ограниченным по c.

V. Заинтересованный читатель может самостоятельно исследовать ещё одно кубическое диофантово уравнение

$$x(y^2-2x^2)+x+cy+1=0. \tag{8}$$

В отличие от уравнений (1) и (5), для уравнения (8) построение быстрого алгоритма решения и получение хороших оценок для решений (x, y) является более сложной задачей (см. аналогичный пример 7 из статьи [1]).

Список литературы

[1] *Osipov N. N., Gulnova B. V.* An algorithmic implementation of Runge's method for cubic diophantine equations // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2018. Т. 11, № 2. С. 137–147.

[2] *Barbeau E. J.* Pell's equation. New York: Springer-Verlag, 2003.

(*Н. Н. Осипов*)

28.6. Условие. Докажите, что радикальный центр трёх полувписанных окружностей треугольника (т. е. окружностей, которые касаются двух сторон треугольника и его описанной окружности) лежит на прямой OI, где O — центр описанной окружности, а I — центр вписанной окружности. (*К. В. Козеренко*)

28.6′ (выпуск 29, с. 269). Условие. *Обозначим через Z радикальный центр трёх полувписанных окружностей ω_A, ω_B и ω_C треугольника ABC* (рис. 1). *Пусть T_A, T_B, T_C — точки касания этих окружностей с описанной окружностью. Рассмотрим следующую инверсию* (*точнее говоря, антиинверсию*) *с полюсом в точке Z: точке X ставится в соответствие такая точка X', что $\overrightarrow{XZ}\cdot\overrightarrow{X'Z}=D$, где D — степень точки Z относительно любой из трёх полувписанных окружностей. Положим* $T'_A=\mathrm{Inv}_Z(T_A)$, $T'_B=\mathrm{Inv}_Z(T_B)$, $T'_C=\mathrm{Inv}_Z(T_C)$.

а) *Докажите, что точки B, T'_B, T'_C, C лежат на одной окружности* (*аналогично для четвёрок точек A, T'_A, T'_B, B и A, T'_A, T'_C, C*), см. рис. 2. *Эти окружности назовём* полуописанными.

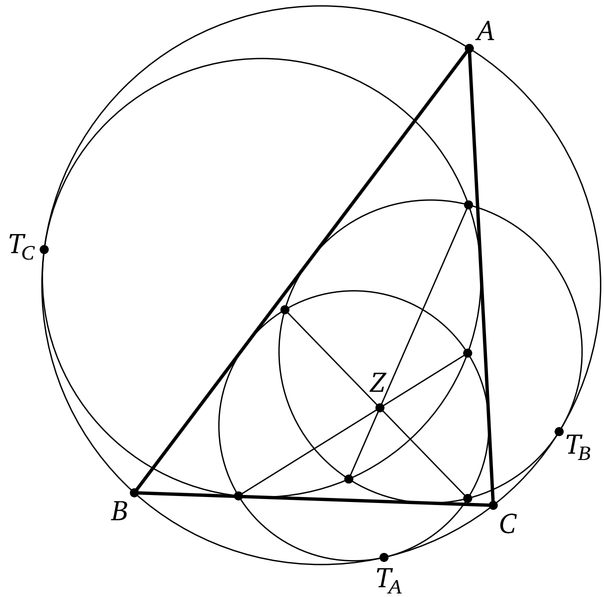

Рис. 1

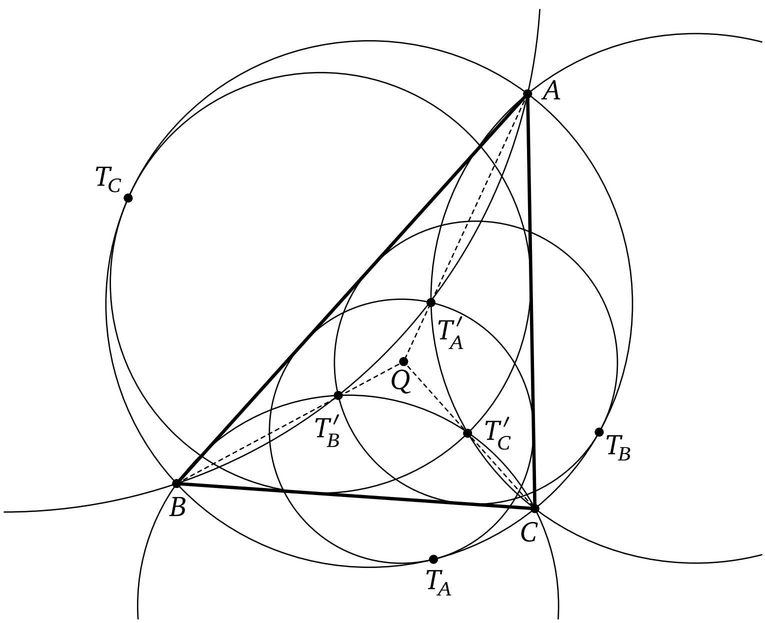

Рис. 2

б) *Обозначим через Q радикальный центр трёх полуописанных окружностей. Докажите, что точка Q лежит на прямой OI.*

(*К. В. Козеренко*)

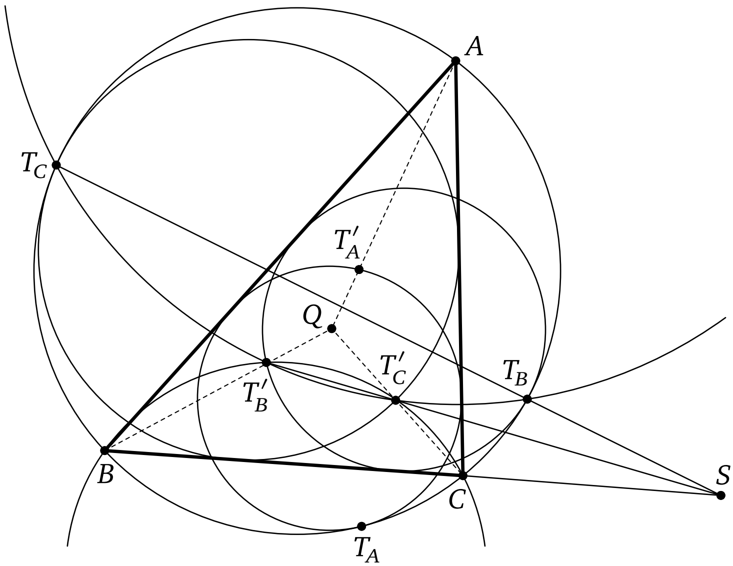

Рис. 3

Решение задач 28.6 и 28.6′. Поскольку $T_BZ\cdot T'_BZ=T_CZ\cdot T'_CZ$, точки T_B, T'_C, T'_B, T_C как симметричные относительно инверсии Inv_Z лежат на одной окружности. Обозначим буквой S точку пересечения прямых T_BT_C и $T'_BT'_C$ (рис. 3). Рассмотрим инверсию с полюсом S и радиусом $\sqrt{ST_B\cdot ST_C}$. Описанную окружность эта инверсия переводит в себя, а полувписанные окружности ω_B и ω_C меняет местами. Следовательно, общая касательная BC этих окружностей проходит через точку S, откуда следует, что

$$ST'_B\cdot ST'_C=ST_B\cdot ST_C=SB\cdot SC,$$

т. е. точки B, T'_B, T'_C, C лежат на одной окружности.

Обозначим через Q радикальный центр трёх полуописанных окружностей (рис. 2). В качестве следствия из теоремы получаем

Утверждение. *Радикальный центр Q является точкой пересечения прямых AT'_A, BT'_B, CT'_C.*

Это утверждение имеет и другую интерпретацию. В самом деле, положим $\Omega'=\mathrm{Inv}_Z(\Omega)$. Заметим, что Ω' является окружностью с центром O', которая касается окружностей ω_A, ω_B и ω_C (рис. 4). Тогда *точка Q является вторым (наряду с точкой Z) полюсом инверсии окружностей Ω и Ω'.*

Отметим при этом, что точки Z, O', Q и центр O окружности Ω лежат на одной прямой.

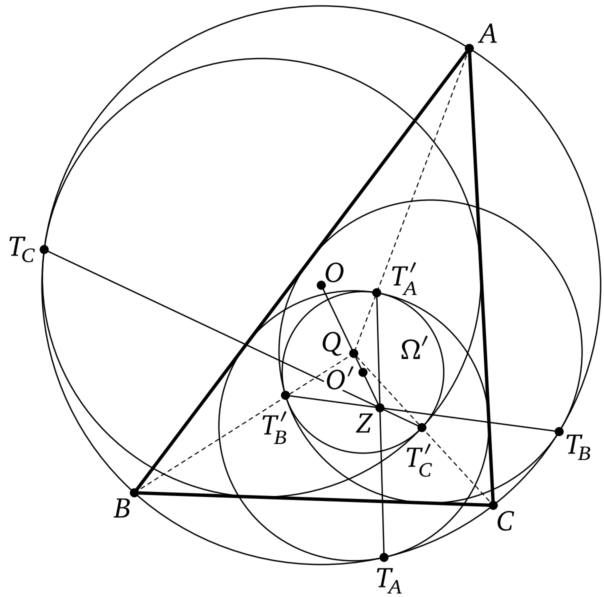

Рис. 4

Но это ещё не все «титулы» точки Q. Рассмотрим композицию гомотетий, первая из которых с центром в точке T'_A переводит окружность Ω' в окружность ω_A, а вторая с центром в точке A переводит ω_A во вписанную окружность ω треугольника ABC. Тогда точка Q, как следует из доказанного утверждения, является центром композиции этих гомотетий, т. е. *центром гомотетии, которая переводит окружность Ω' в окружность ω.*

Наконец, из двух предыдущих утверждений вытекает, что *точка Q является центром гомотетии, которая переводит описанную окружность Ω во вписанную окружность ω*, т. е. точка Q лежит на отрезке OI, где I — центр окружности ω и делит его в отношении $R:r$, считая от точки O

Следствие. *Точки Q, Z и O' лежат на прямой OI* (рис. 5).

Замечания. 1. Утверждение относительно точки Z доказано в [1] исходя из совершенно других соображений. Там же доказано, что

$$\overrightarrow{OZ} : \overrightarrow{ZI} = -2R : r, \quad \overrightarrow{OO'} : \overrightarrow{O'I} = 4R : r, \quad R' = \frac{3Rr}{4R+r},$$

где R, r и R' — радиусы окружностей Ω, ω и Ω' соответственно.

2. Точка J на рис. 5, которая тоже лежит на прямой OI, — это центр гомотетии с положительным коэффициентом, которая переводит окружность Ω в окружность ω.

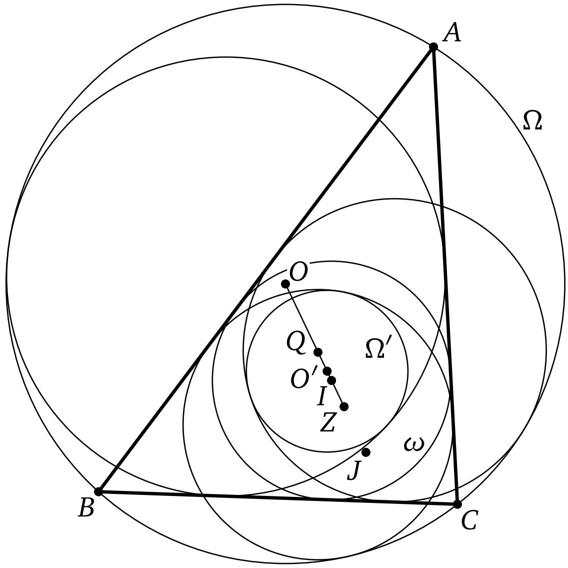

Рис. 5

3. Кроме этих четырёх точек на прямой OI лежат ещё 9 (!!!) замечательных точек:

— центр O_I описанной окружности треугольника $I_AI_BI_C$, где I_A, I_B, I_C — центры вневписанных окружностей треугольника ABC;

— ортоцентр H_1 треугольника $A_1B_1C_1$ где A_1, B_1, C_1 — точки касания окружности ω со сторонами треугольника ABC;

— центры E_W, E^W, E_1 окружностей Эйлера треугольников $W_AW_BW_C$, $W^AW^BW^C$, $A_1B_1C_1$ где W_A, W_B, W_C — точки пересечения биссектрис треугольника ABC с окружностью Ω, а W^A, W^B, W^C — середины сторон треугольника $I_AI_BI_C$;

— точки M_W, M_1 пересечения медиан треугольников $W_AW_BW_C$ и $A_1B_1C_1$;

— и, наконец, ещё два центра гомотетий треугольников $W^AW^BW^C \sim \sim I_AI_BI_C$ и $A_1B_1C_1 \sim I_AI_BI_C$.

Таким образом, на одной прямой «сидят» 14 замечательных точек!

Доказательство этих утверждений мы оставляем читателю.

В заключение отметим ещё один факт. Если вместо вершины A треугольника ABC мы рассмотрим произвольную точку K на окружности Ω, проведём через неё две касательные к окружности ω, которые вторично пересекут Ω в точках L и M, то в силу теоремы Понселе прямая LM тоже будет касательной к окружности ω.

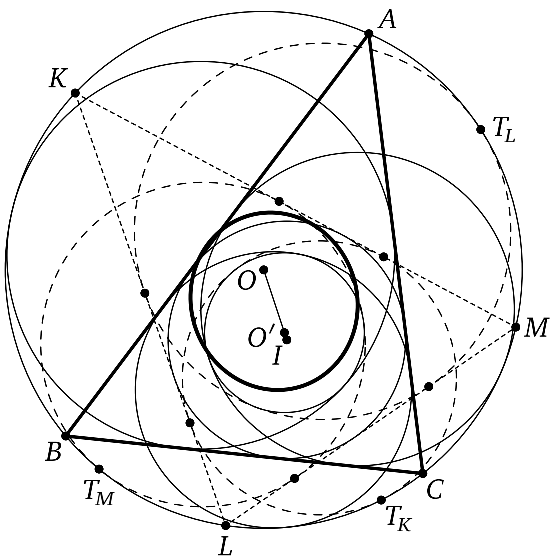

Рис. 6

Пусть теперь точка K движется по окружности Ω. Оказывается, что тогда *центры полувписанных окружностей* ω_K, ω_L *и* ω_M *треугольника* KLM *будут двигаться по эллипсу с фокусами в точках* O *и* O' (рис. 6).

В самом деле, обозначим через O_K и R_K центр и радиус окружности ω_K соответственно. При движении точки K по окружности Ω окружность Ω' «стоит на месте», следовательно,

$$O'O_K + O_KO = R_K - R' + R - R_K = \text{const},$$

т. е. центр O_K лежит на эллипсе с фокусами O и O'.

Список литературы

[1] *Nguyen K., Salazar J.* On mixtilinear in circles and excircles // Forum Geometricorum. 2006. Vol. 6. P. 1–16.

(*К. Козеренко, преподаватель Второй школы*;
К. Мамонов, ученик 9 класса Второй школы, г. Москва)