Математический мир

Алексею Яковлевичу Канель-Белову — шестьдесят!

Н. Х. Агаханов, Н. Н. Андреев, С. А. Дориченко, А. А. Заславский, И. А. Иванов-Погодаев, В. М. Имайкин, А. К. Ковальджи, П. А. Кожевников, С. И. Комаров, И. В. Митрофанов, Ю. П. Николаев, А. М. Райгородский, А. Л. Семёнов, Д. А. Терёшин, В. А. Тиморин, В. М. Тихомиров, Б. Р. Френкин, Г. А. Четин, И. В. Ященко

9 июня 2023 года исполнилось 60 лет известному математику и педагогу Алексею Яковлевичу Канель-Белову. Он родился в Москве, в семье математиков. Его мать — Майя Михайловна Белова (1931–1985),

доцент Станкина, ученица В. В. Немыцкого, была хорошо известна на мехмате. К сожалению, она рано умерла; на похороны пришло около 200 людей из математического сообщества. Отец — Яков Исаакович Канель (1932–2006), известный специалист по теории уравнений частных производных, защитил диплом в Томском государственном университете под руководством А. И. Фета, кандидатскую диссертацию защитил под руководством О. А. Олейник.

Дядя Геннадий Исаакович Канель, чл.-корр. РАН, известный физик, сотрудник В. Е. Фортова, был профессором МФТИ и мехмата МГУ (отделение механики). Алексей Яковлевич многие свои статьи подписывал так, как его имя указано в заголовке, хотя «по паспорту» его фамилия — просто «Белов». Двойную фамилию он использовал, чтобы подчеркнуть уважение к своей семье.

В 1980 году А. Я. окончил школу № 2 Октябрьского района г. Москвы (ныне лицей «Вторая Школа»). Он успешно участвовал в олимпиадах школьников, получил вторую премию на Всесоюзной математической олимпиаде в 1980 году. Во Второй школе участвовал в матбоях, организованных В. А. Сендеровым. В дальнейшем участвовал в согласовании питерских и московских правил матбоя (организовал это согласование А. К. Ковальджи). Канонические правила были опубликованы в журнале «Математика в школе». В старших классах вёл занятия в ВМШ при ММО.

Учёба и начало пути в науке. В 1985 году А. Я. окончил МГПИ им. В. И. Ленина (ныне Московский педагогический государственный университет). Был победителем Московских и Всесоюзных студенческих олимпиад. Будучи председателем студенческого научного общества (СНО), он вместе с С. В. Пчелинцевым (преподавателем, ответственным за СНО) проводил студенческие математические олимпиады в МГПИ. Также он учился в так называемом «Народном университете», где наибольшее влияние на него оказал Д. Б. Фукс[1)].

Тема дипломной работы Алексея Яковлевича — «О базисе Ширшова относительно свободной алгебры сложности *n*» (научный руководитель С. В. Пчелинцев). В 1985 году А. Я. поступил в аспирантуру Московского горного института (МГИ), которую окончил в 1988 году. В 1992 году в Институте физики Земли им. О. Ю. Шмидта защитил кандидатскую диссертацию по техническим наукам «Статистическая

[1)] Подробнее см. *Белов-Канель А.*, *Резников А.* Об истории Народного университета // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 9. М.: МЦНМО, 2005. С. 30–31.

геометрия и равновесие блочных массивов» (научный руководитель Р. Л. Салганик). Основным математическим результатом диссертации был метод, позволяющий для широкого класса разбиений плоскости прямыми сводить изучение получающихся многоугольников к изучению линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Метод позволил вывести закон распределения площадей и периметров многоугольников для различных классов случаев, в частности для пуассоновского поля прямых и мозаик Вороного. Исследования блочных массивов, введённых в диссертации, послужили промежуточным шагом к изобретению самозаклинивающихся структур, см. с. 11.

В 1988–1990 годах Алексей Яковлевич работал в МГИ, в 1990–2001 годах в Доме научно-технического творчества молодёжи (ДНТТМ). В дальнейшем А. Я. работал в ряде университетов в разных странах мира (Россия, Австралия, Германия, Израиль, КНР), а также в Московском институте открытого образования (ранее — Московский институт повышения квалификации работников образования).

Окончательное формирование основных научных интересов: комбинаторная алгебра. С 1984 года Алексей Яковлевич начинает активно заниматься алгеброй, продолжая свою студенческую линию исследований, и принимает участие в работе семинара кафедры алгебры МГУ «Теория колец» под руководством В. Н. Латышева, А. В. Михалёва и Е. С. Голода и в семинаре по PI-теории под руководством В. Н. Латышева. Под влиянием С. В. Пчелинцева, В. Н. Латышева и А. В. Михалёва Алексей Яковлевич начинает заниматься PI-теорией.

Тождеством в алгебре называется многочлен, тождественно обращающийся в нуль при подстановке *любых* элементов алгебры вместо переменных. Например, в коммутативных алгебрах выполняется тождество $[x, y] := xy - yx = 0$, а в алгебрах матриц второго порядка — *тождество Холла* — $[[x, y]^2, z] = 0$ и *тождество Амицура — Левицкого* степени 4:

$$\sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(4)} = 0.$$

Тождество f *следует* из набора тождеств $\{g_i\}$, если везде, где выполняется $\{g_i\}$, выполняется и f. Алгебра, в которой выполняется ненулевое тождество, называется *PI-алгеброй*.

Класс всех алгебр или иных алгебраических систем, где выполняется некоторый набор тождеств, называется *многообразием*. Один из наиболее естественных вопросов здесь — конечная базируемость: *верно ли, что каждое многообразие из некоторого класса может быть задано конечным числом тождеств* (аналог теоремы компактности в логике и топологии). Для многообразий групп Х. Нойман в 1937 году поставила вопрос: каждое ли многообразие может быть определено конечным множеством тождеств. На рубеже 1970-х гг. он был отрицательно решён одновременно и независимо тремя исследователями: С. И. Адяном на основе мощного метода Новикова — Адяна, построенного для бернсайдовских групп, а также Воган-Ли и А. Ю. Ольшанским.

В случае ассоциативных колец проблема конечной базируемости была поставлена Шпехтом в 1950 году: *Верно ли, что все тождества произвольной ассоциативной PI-алгебры следуют из конечного их числа*? Вся работа Шпехта была посвящена алгебрам над полем нулевой характеристики. Он явно мотивировал это невозможностью использования применяемых им методов в случае простой характеристики. Проблема Шпехта для характеристики 0 была решена положительно А. Р. Кемером в 1984 году. Чуть позже А. Р. Кемер распространил доказательство на случай локальной представимости над бесконечным полем характеристики $p > 0$, доказав, что любой T-идеал конечно порождённой свободной ассоциативной алгебры над бесконечным полем порождается конечным множеством элементов как T-идеал.

Алексей Яковлевич существенно развил метод А. Р. Кемера, добавив соображения, связанные с некоммутативной алгебраической геометрией и применением леммы Артина — Риса. Для алгебр над произвольным ассоциативно-коммутативным нётеровым кольцом А. Я. доказал, что любая система тождеств от ограниченного числа переменных следует из конечной подсистемы. Более того, он распространил этот результат на алгебры над нётеровым ассоциативно-коммутативным кольцом, а не только над полем. При этом для общего (нелокального) случая он построил бесконечно базируемую систему тождеств над произвольным полем положительной характеристики. (А. В. Гришин и В. В. Щиголев в дальнейшем также построили такие системы). Тем самым было завершено исследование проблемы Шпехта.

Все эти результаты были собраны в докторской диссертации «Алгебры с полиномиальными тождествами: представления и комбинаторные методы», которую А. Я. защитил в 2002 году. Научными консультантами были В. Н. Латышев и А. В. Михалёв. Оппонентами выступили А. Р. Кемер, С. В. Пчелинцев и А. В. Яковлев.

Дальнейшие исследования. Со временем Алексей Яковлевич существенно расширил область своих научных интересов. Он получает ряд ярких результатов и в PI-теории, и в некоммутативной теории колец, и в алгебраической геометрии, а также успешно работает в прикладных областях математики и в математической педагогике. Ниже представлены основные направления его исследований.

Алгебраическая геометрия, в том числе некоммутативная. Проблемы шпехтового типа дали новый взгляд на созданную Ф. А. Березиным теорию супералгебр. А. Р. Кемер в нулевой характеристике свёл изучение бесконечно порождённых свободных алгебр к случаю конечно порождённых супералгебр. Алгебра Грассмана обычно изучается над полем характеристики, не равной 2 (в случае характеристики 2 стандартный набор соотношений даёт обычную коммутативную алгебру). Контрпримеры к проблеме Шпехта в характеристике 2 привели к построению конструкции, нетривиально обобщающей алгебру Грассмана над любым кольцом (включая поле характеристики 2). Работа была проведена совместно с Галем Дором и Узи Вишне. При этом вместо знака перестановки (плюс или минус один) возникло понятие обобщённого знака — элемента некоторого модуля, сопоставляемого перестановке. Эти конструкции открывают путь к построению супертеории над полем произвольной характеристики (включая 2).

Знаменитая *гипотеза якобиана* состоит в обратимости любого полиномиального отображения с единичным якобианом. Хотя сама проблема якобиана далека от своего решения, сопутствующие ей методы и подходы являются чрезвычайно ценными. Например, так называемое *антиквантование* — редукция кольца дифференциальных операторов по модулю бесконечно большого простого числа (в смысле нестандартного анализа) и изучение скобок Пуассона на центре этого кольца. А. Я. Канель-Белов совместно с М. Л. Концевичем (и независимо от них Цучимото) разработали подход к теории D-модулей, гипотезе о якобиане и смежным вопросам (например, относящимся к универсальным обёртывающим алгебрам конечномерных алгебр Ли), связанным с квантованием.

Классические работы по основаниям алебраической геометрии преследовали цель связать топологические свойства с арифметическими, изучив взаимосвязь между языками теории колец и геометрии. А. Я. начал изучение связи геометрических и арифметических свойств с алгоритмическими. Например, интересен вопрос об алгоритмической разрешимости проблемы изоморфизма двух алгебраических многообразий над полем комплексных чисел. Даны два ассоциативно-коммутативных кольца, заданных образующими и соотношениями. Как проверить, изоморфны ли они? Первый результат здесь был получен совместно с А. А. Чиликовым — это алгоритмическая неразрешимость проблемы вложимости алгебраических многообразий над полем нулевой характеристики.

Построение алгебраических монстров. Одной из непревзойдённых вершин комбинаторного подхода в алгебре является решение П. С. Новиковым и С. И. Адяном проблемы Бёрнсайда. Геометрическая интерпретация этого подхода в стиле теории малых сокращений, также с преодолением экстремальных технических трудностей, была создана А. Ю. Ольшанским и И. Рипсом. В некоммутативной алгебре имеются конструкции самых разнообразных алгебраических «монстров», построенные Адяном, Ольшанским и другими авторами: бесконечные бернсайдовские группы, монстр Тарского, пример Голода — Шафаревича и др. Естественно возникает вопрос об аналогах в случае полугрупп и колец. Исходя из уже рассмотренных результатов А. Я. Канель-Белова, напрашивается аналогия между спектром результатов Адяна, последовавших за решением проблемы Бёрнсайда, и спектром результатов Канель-Белова, последовавших за решением проблемы Шпехта. Эти результаты, однако, далеко не ограничивались уже перечисленными.

В. Н. Латышев обратил внимание на важность требования конечной определённости алгебраических объектов. Например, открытым вопросом является существование конечно определённой бесконечной периодической группы. Конечная определённость даёт возможность интерпретировать алгебраические объекты в терминах конечных семейств конечных автоматов — буква алфавита символизирует конечный автомат, а слово — цепочку локально взаимодействующих автоматов. Задача состоит в координации поведения системы автоматов при обратимых преобразованиях из любых начальных состояний (обратимость отражает возможность прямого и обратного перехода при использовании определяющих соотношений).

Л. Н. Шеврин и М. В. Сапир в Свердловской тетради поставили проблему существования бесконечной конечно определённой нильполугруппы. Построение такой полугруппы является результатом цикла работ И. А. Иванова-Погодаева и А. Я. Канель-Белова. Для этого построения потребовались принципиально новые методы, связанные с геометрией апериодических мозаик. Слова рассматриваются как пути в равномерно эллиптическом пространстве, обладающем апериодической природой и набором специальных свойств. Эквивалентные слова при этом соответствуют локально эквивалентным путям с общим началом и концом. Определяющие соотношения отвечают минимальным клеткам некоторого комплекса.

Динамические системы. В пленарном докладе на Международном математическом конгрессе в 2022 году Ричард Шварц сформулировал следующую гипотезу.

«Внешние бильярды вокруг правильного n-угольника имеют апериодическую орбиту при $n \neq 3, 4, 6$*. Полагаю, что ответ неизвестен кроме случаев* $n = 5, 8, 10, 12$ *и, возможно, 7».*

А. Я. совместно с Ф. Д. Руховичем и В. А. Тимориным установил, что и для внешнего бильярда вокруг правильного семиугольника: 1) существуют самоподобия с мультипликативно независимыми коэффициентами; 2) существует континуум попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств с различными символическими динамиками — замыканий апериодических орбит точек. Тем самым показано, что существуют траектории, кодирующиеся неподстановочными системами. Впервые при изучении внешних бильярдов вокруг правильных многоугольников был обнаружен мультифрактал.

Совместно с В. А. Тиморином, Ф. Д. Руховичем и В. Д. Згурским, Алексей Яковлевич установил наличие бесконечного набора самоподобий при $n = 9$, а также наличие апериодических точек при $n = 2k + 1$, $2(2k + 1)$, где $k > 1$.

Самоподобные структуры возникают во многих разделах математики. Так, самоподобными объектами в комбинаторике слов являются морфические последовательности. Эти последовательности интересны тем, что бесконечный объект (сверхслово и соответствующая динамическая система) описывается конечным набором информации: два алфавита, подстановка и кодирование[2)].

Прикладная математика. Алексей Яковлевич активно занимается и прикладными вопросами. Отличным примером может служить придуманная им замечательная конструкция самозаклинивающихся структур. Слой одинаковых кубов (или тетраэдров) можно расположить между двумя параллельными плоскостями так, что ни одно тело нельзя убрать из слоя, не затронув остальные тела. Начавшись с олимпиадной задачи, предложенной Алексеем Яковлевичем на Московской математической олимпиаде в 2000 году, эта тема стремительно развивалась, были получены интересные результаты[3)]. В дальнейшем Ю. Эстриным на полученный мегагрант Правительства РФ (2013) со-

[2)] Подробнее о внешних биллиардах см. *Табачников С. Л.* Внешний биллиард // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 5. М.: МЦНМО, 2001. С. 125–135.

[3)] См. *Канель А. Я.* История одной олимпиадной задачи // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 5. М.: МЦНМО, 2001. С. 207–208; *Белов А. Я.* Самозаклинивающиеся структуры // Квант. 2009. № 1. С. 20–23.

здана исследовательская лаборатория. Сейчас конструкция используется для создания новых типов композитных материалов.

Недавно была проведена проектная смена в образовательном центре «Сириус»[4]. Учащимися были получены принципально новые типы кладок. Ими разрабатываются компьютерные модели для создания новых типов материалов. Работы учащихся играют существенную роль в реализации гранта РНФ, полученного Магнитогорским государственным техническим университетом им. Г. И. Носова.

Педагогическая деятельность и ученики. С молодых лет Алексей Яковлевич уделял большое внимание математическому образованию. В студенческие годы был старшим по параллели Московской математической олимпиады (ММО), руководил математическими кружками. С тех пор А. Я. постоянно входит в методкомиссию ММО, являясь автором многих замечательных задач — как глубоких и сложных, так и доступных всем и при этом изящных.

Вот примеры таких задач.

(14-й Турнир городов, весна 1993 г., 10–11 классы, задача 5.)

Существует ли кусочно-линейная функция f, определённая на отрезке $[-1, 1]$ (включая концы), для которой $f(f(x)) = -x$ при всех x? (Функция называется кусочно-линейной, если её график есть объединение конечного числа точек и интервалов прямой; она может быть разрывной.)

(Московская математическая олимпиада, 1995, 10 класс, задача 6.)

На табло горят несколько лампочек. Имеется несколько кнопок. Нажатие на кнопку меняет состояние лампочек, с которыми она соединена. Известно, что для любого набора лампочек найдётся кнопка, соединённая с нечётным числом лампочек из этого набора. Докажите, что, нажимая на кнопки, можно погасить все лампочки.

(Московская математическая олимпиада, 2001, 11 класс, задача 5.)

Докажите, что в пространстве существует такое расположение 2001 *выпуклого многогранника, что никакие три из многогранников не имеют общих точек, а любые два касаются друг друга (то есть имеют хотя бы одну граничную точку, но не имеют общих внутренних точек).*

[4] *Белов А. Я., Годунов И. В., Гребнев К. Е., Мантуров В. О., Маркелов Ю. С., Нилов Ф. К., Песин А. М., Певницкий Д. Л., Полозков С. С., Уваров Ф. В.* Самозаклинивающиеся структуры, `https://sochisirius.ru/obuchenie/nauka/smena1488`, 2023, Майская проектная программа по математике и теоретической информатике. «Сириус». 2023.

Алексей Яковлевич был председателем жюри Международной интернет-олимпиады в Ариэле, участвовал в подготовке команд Германии и Израиля на Международную олимпиаду школьников, входил в состав жюри Международной олимпиады школьников в 2020 и 2021 годах.

В разное время А. Я. был организатором и руководителем студенческих команд университета Якобса (Бремен) и Южного научно-технологического университета (Шэньчжэнь) на Международной студенческой олимпиаде. Им также были заложены и в течение многих лет поддерживались традиции участия Израиля в международной студенческой олимпиаде. А. Я. много занимался со способными школьниками на различных сборах и летних математических школах. Свыше 30 лет он входит (как правило, руководителем проекта) в жюри Летней конференции Турнира городов, являющейся важнейшим этапом при переходе школьников от олимпиад к исследовательской работе в математике. В течение 10 лет руководил секцией математики конференции школьников «Поиск» в Доме научно-технического творчества молодёжи, совместно с Р. В. Плыкиным проводил математическую секцию Всероссийской конференции школьников «Юность, наука, культура», постоянно участвует в жюри конференции «Интел-Авангард».

Алексей Яковлевич написал ряд широко известных статей и учебных пособий, а также, совместно с А. К. Ковальджи, книгу для школьников «Как решают нестандартные задачи», которая выдержала 15 изданий. Участвовал в выработке окончательной версии правил математического боя[5)].

А. Я. отличается широтой научных интересов и умением увидеть перспективные направления и идеи. Эти качества дали возможность получить ряд научных результатов совместно с учениками. Благодаря этому многие молодые математики продолжают развивать широкое дерево научных интересов Алексея Яковлевича.

А. Я. подготовил семерых кандидатов физ.-мат. наук: это И. А. Иванов-Погодаев, А. Л. Чернятьев, М. И. Харитонов, И. В. Митрофанов (все совместно с проф. А. В. Михалёвым), Ф. Д. Рухович (совместно с академиком А. Л. Семёновым), А. М. Елишев, В. О. Кирова, а также трёх PhD: это С. Малев (совместно с профессором Л. Роуэном), З. Венчао, Ф. Розавия. Кроме того, подготовлена к защите диссертация Ф. А. Ивлева.

[5)] *Дерягин Д. В., Канель А. Я., Ковальджи А. К., Кондаков Г. В., Рубанов И. С., Финашин С. М., Фомин Д. В., Шапиро А. А., Яценко А. Д.* Математический бой двух команд: правила, комментарии, опыт проведения // Математика в школе. 1990. № 4. С. 20–25.

Алексей Яковлевич сохраняет и развивает традиции московской математической школы, сочетая широкий научный кругозор с активной работой по подготовке научной смены.

Гуманитарные аспекты. Работа над созданием подборок задач и олимпиадным учебниками имеет гуманитарное значение, выходящее за пределы подготовки к олимпиадам. Классификация идей и стереотипов решения задач есть инструмент исследования человеческого мышления. Результаты, полученные в рамках преподавательской деятельности (в частности, создание олимпиадных задач) имеют значение прежде всего для верификации вычленения идей и стереотипов. Такое исследование представляется полезным в связи с работами по искусственному интеллекту. С этим связан интерес А. Я. Канель-Белова к комбинаторике, в частности, к комбинаторной геометрии.

По словам известного лингвиста А. В. Гладкого, «литературоведческое» исследование математических текстов перекликается с анализом текстов на естественных языках (NLP) и с известными работами В. Проппа об исторических корнях волшебной сказки. Олимпиадные книги и статьи А. Я. являются шагами в этом направлении.

Итоги и признание. Алексей Яковлевич участвует в редколлегиях целого ряда изданий: «Фундаментальная и прикладная математика», «Чебышёвский сборник», «Квант», «Математическое просвещение» (редактор задачного раздела), «Математическое образование», «Потенциал», «Вестник Академии наук Чеченской Республики». А. Я. имеет звание федерального профессора, эксперта РАН и РНФ, а также профессора по специальности «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

О научных результатах А. Я. Канель-Белова подробнее см.[6]: *Агаханов Н. Х. Андреев Н. Н., Асхабов С. Н. и др.* Алексей Яковлевич Канель-Белов // Чебышёвский сборник. Т. 24, вып. 4. С. 380–400, а также `https://www.mathnet.ru/rus/person/8698`.

А. Я. Канель-Белов продолжает с увлечением заниматься математикой. Поздравляем Алексея Яковлевича с юбилеем и желаем новых научных достижений, доброго здоровья, счастья и реализации задуманных планов!

[6] В настоящей статье существенно использованы материалы этой статьи по согласованию с редакцией.