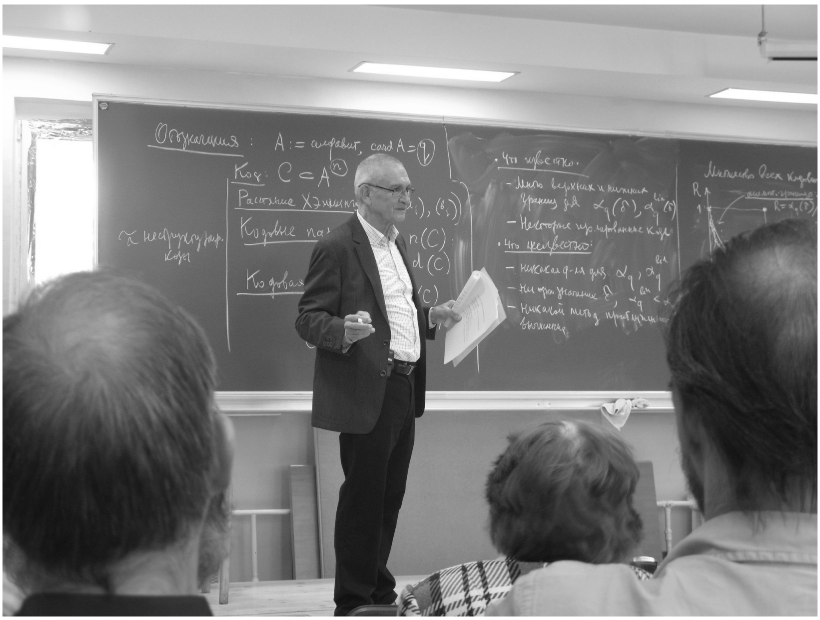
Юрий Иванович Манин — математик, мыслитель, Учитель. II

Г. Б. Шабат



§ 3. Манин и физика

По публикациям Ю. И. в первые примерно два десятилетия не видна его важная черта — он воспринимал математику как часть мировой культуры, и работа в одной только математике была тесна для него. Эта черта присуща и некоторым другим выдающимся математикам, но мы здесь заниматься сопоставлениями не будем.

Физика играла особую роль во внематематических занятиях Ю. И. С одной стороны это, видимо, связано с тем, что он мог интересоваться физикой и думать о ней, оставаясь математиком — ниже мы кратко

Первая часть статьи опубликована в выпуске 32, с. 23–52.

прокомментируем некоторые примеры вклада Ю. И. в математические составляющие современных физических проблем; вместе с тем он был готов добросовестно учиться физике наподобие студента (в первой части статьи говорилось о его несостоявшейся попытке осуществить это намерение буквально). Например, по книге [KM1997] видно, с каким усердием Ю. И. осваивал физическую конкретику, упорно преодолевая непостижимые для математика трудности — вычитания «бесконечностей» по несформулированным правилам, расплывчатость понятия атома и т. п. С другой стороны, Ю. И. — яркий представитель «шестидесятников», и, хотя проблемы *физиков vs лириков* для него, разумеется, не существовало (он был близок и тем, и другим), для этого поколения характерна убеждённость, что физика способна объяснить ВЕСЬ мир, а Ю. И. не мог удовлетвориться лишь частью этой великой цели.

3.0. Преодоление междисциплинарных барьеров

Прежде чем перейти к собственно научному вкладу Ю. И. в физику, отметим *социологический* аспект его влечения. Дело в том, что он обладал огромным авторитетом, особенно среди своих непосредственных учеников, и его убеждённость в плодотворности контактов математиков с физиками передавалась ученикам и другим посетителям его семинаров и курсов.

Такие контакты не были необычны для московского мехмата 1970-х — например, С. П. Новиков ставил условием руководства студентами прочтение ими Ландау и Лифшица. Однако это соответствовало основным занятиям С. П. Новикова в то время, тогда как к Ю. И. шли (сильнейшие!) студенты, собирающиеся заниматься разделами математики, которые *тогда* казались далёкими от физики — алгебраической геометрией, теорией чисел, модулярными формами (всё это было полвека назад, сейчас связи этих разделов с физикой общеизвестны). В результате образовывался, например, такой удивительный тандем, как В. Г. Дринфельд (первые публикации — по модулярным кривым) и А. А. Белавин (докторская диссертация о *невылетании кварков*). А. А. Бейлинсон (сыгравший важную роль в развитии производных категорий, автор известнейших гипотез по K-теории) и Дринфельд написали высоко цитируемую книгу о конформной теории поля. И. В. Чередник, начинавший с неархимедовой теории Галуа и p-адической униформизации кривых, в дальнейшем писал работы, например, о нелинейном уравнении Шрёдингера.

Приведено лишь несколько примеров обращения к физике математиков манинской школы. Это отражало общую мировую тенденцию конца XX века — например, в 1996–1997 годах Институт высших исследований в Принстоне организовал специальный годовой проект, ориентированный на обучение математиков фундаментальным физическим идеям, в результате чего появился уникальный двухтомник [DKE1999]. Ю. И. и его ученики внесли весомый вклад в эту тенденцию.

3.1. Применение математики в физике

Ограничимся упоминанием двух (из многих) направлений работ Ю. И. рассматриваемого класса.

Геометрия дифференциальных уравнений. Работы Ю. И. связаны с существенным *осовремениванием* почтенной классической науки. Начиная со времён Ньютона, *неизвестными* в дифференциальных уравнениях были *функции*, а их *решения* задавались *формулами*. Но уже в XIX веке областями определения неизвестных функций становились не только области в $\mathbb{R}^n$, но и открытые множества *многообразий*. Теперь классически понимаемые решения дифференциальных уравнений могли быть записаны разве что в *локальных* координатах, а их выбор связан с неизбежным произволом.

В случае уравнений математической физики постепенно осознавалось, что неизвестными являются не функции, а метрики, связности и т. п., и глубже всего они понимаются в бескоординатной форме[1]. Обычно самые фундаментальные из этих уравнений *нелинейны*, хотя удобно начинать осознание сформулированного принципа с линейной системы *уравнений Максвелла*, в которой электромагнитное поле интерпретируется как связность в подходящем расслоении; прямые обобщения этой системы — *уравнения Янга — Миллса*, уже нелинейные.

Ю. И. умел объяснять эти идеи математикам строго и ясно, не теряя из вида физический смысл. Сам он внёс значительный вклад в развитие голоморфной и алгебраической геометрии уравнений: потребовались разнообразные средства математики, которые лишь постепенно стали известны физикам — расслоения и связности в них, пучки и их когомологии, комплексные структуры и их деформации и т. п. Разумеется, Ю. И. мастерски владел этими понятиями; это для математиков второй половины XX века была не редкость, но он глубже многих видел стоящую за этими конструкциями физику. Уже упоминалась работа [HM1980] как первая работа этого цикла; отметим ещё очень глубокую работу [KM1986].

---

[1] Хотя и современный физик под метрикой может понимать выражение $g^{ij}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j$.

Уже в 1970-е годы манинская школа уверенно входила в мировую математику. Так, огромную известность приобрела почти мгновенно написанная уже упомянутая работа четырёх авторов [ADHM1978].

Пространства модулей и теория струн. Это — тема, в которой классическая алгебраическая геометрия, испытавшая подъём в 1960-е годы, встретилась с современной физикой.

Пространства модулей, введённые Б. Риманом в 1857 году, с некоторыми оговорками представляют собой для каждого $g \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ алгебраическое многообразие $\mathscr{M}_g$ размерности $3g-3$, точки которого соответствуют классам изоморфизма гладких полных связных кривых рода g. Над полем комплексных чисел это множество находится во взаимно однозначном соответствии с множеством *классов конформной эквивалентности* римановых метрик на топологической поверхности рода g.

В физике пространства модулей кривых появились в 1980-е годы, в связи с надеждой заменить точки микромира на крошечные колечки, *струны*, движущиеся в многомерном[2)] вещественном пространстве, заметая в нём *мировые линии* — вещественные поверхности. Поскольку частицы рождаются, взаимодействуют и умирают, эти поверхности можно считать замкнутыми. Для физиков представляется естественным, что, помимо метрики, индуцированной вложением, на поверхностях рассматривается и внутренняя метрика. Встала задача фейнмановского «интегрирования» по вложению и внутренней метрике.

Интегрирование и по вложениям, и по метрикам, конформно эквивалентным данной, напоминает гауссово интегрирование и не представляло затруднений для физиков. Интегрирование же по множеству конформных структур на поверхности данного рода, т. е. по пространству модулей $\mathscr{M}_g(\mathbb{C})$, было трудной задачей, совершенно по-новому связывающей физику и математику. Эта задача оказалась весьма плодотворной для обеих наук, и Ю. И. со свойственной ему энергией включился в её решение.

Сначала он опубликовал короткую заметку [Manin1986]. Эта заметка написана совершенно не в «манинском» стиле: она в основном состоит из формул, обращение с которыми, впрочем, демонстрирует исключительную виртуозность Ю. И. Однако стоящая за [Manin1986] общематематическая идея просматривается: обсуждавшиеся интегралы уже были вычислены А. Белавиным и В. Книжником, причём очень красиво и с применением замечательных, но экстравагантных понятий

[2)] Некоторое время казалось удивительным, что с необходимостью в 26-мерном — иначе теория содержала фатальные расходимости.

(формулы следа Сельберга). Ю. И. же закрепил другой подход, тоже, впрочем, намеченный А. Белавиным и В. Книжником, связав новомодную теорию струн с самыми классическими разделами голоморфной и алгебраической геометрии; технически все ответы были выписаны в терминах тета-функций, причём *критическая* размерность 26 получила красивое алгебро-геометрическое объяснение. Впоследствии этот результат с необходимыми подробностями был закреплён в совместной публикации [BM1986], написанной уже в «манинском» стиле — с красивым введением, мотивировками, краткой сводкой необходимых сведений из классической математики и россыпью проблем для дальнейшего продумывания.

3.2. Физическая интуиция в математике

Глубокое понимание физики позволяло Ю. И. успешно внедрять физические идеи в разнообразные разделы математики. Приведём примеры.

Квантовая механика. Для Ю. И. она прежде всего мотивировала переход от «обычной» алгебраической геометрии к *некоммутативной*; это направление уже обсуждалось выше, Ю. И. излагал его с особым *педагогическим* мастерством. Но у него были и оригинальные связанные с квантованием работы: например, рядом авторов были определены *квантовые торы* — они представляют частные случаи упомянутых выше квантовых групп, при определении которых за основу берутся функции на группах; в случае квантового тора на этих функциях возникают дополнительные структуры, например, преобразования Фурье. Ю. И. в серии работ дополнил эту теорию теорией *квантовых тета-функций*, и в [Манин2003] завершил построение теории, введя *функциональные уравнения*, которые в классическом пределе вырождаются в обычные функциональные уравнения для классических тета-функций. Так квантовая механика помогла Ю. И. построить интересный математический объект.

Квантовые когомологии. В работе [KM1994] физическая теория была строго изложена для алгебраических геометров. Квантовые когомологии связывались с одной из горячих точек алгебраической геометрии — упоминавшимися выше *мотивами* Гротендика, которые по сей день остаются недостижимой мечтой об *универсальной* теории когомологий алгебраических многообразий.

Тем не менее, уже построенных фрагментов теории достаточно, чтобы работать с *классами Громова — Виттена*, теория которых активно развивается после цитированной работы Концевича и Манина и её продолжения. В [KM1994] обсуждаются важные вопросы оснований алгебраической геометрии — например, как перейти от пространств модулей кривых к пространствам «модулей» поверхностей и далее.

Среди многочисленных математических приложений этой теории есть одно особенно эффектное, связанное с одним из самых классических разделов алгебраической геометрии — *перечислительной* геометрией. Так, подсчёты количеств рациональных кривых на квинтиках приводят к астрономическим числам. Количество таких кривых степени 10, выражаемое 30-значным числом, было указано физиками, см. [COGP1991] (математики сначала с помощью компьютерной программы получили неправильной ответ, но потом нашли ошибку в программе и получили правильный).

Применение статфизики в кодировании. Ю. И. с соавторами написал несколько работ на эту тему, например, [MM2011]. Отсылаем за деталями к [Tsf2023].

Ренормализация и вычисления. Работа [Manin2009a] представляется совершенно оригинальной. В ней Ю. И. параллельно рассматривает бесконечности в классической теории вычислений (неразрешимость проблемы остановки и т. п.) и в квантовой теории поля. Понятие *ренормализации* переносится из физики в вычислительную математику; диаграммы Фейнмана уподобляются блок-схемам. Ю. И. ставит вопрос о выработке аналога физического понятия *действия* в вычислительной математике, упоминает сформулированный И. М. Гельфандом за полвека до написания [Manin2009a] *принцип наименьшего* взаимо*действия* в теории конечных автоматов и утверждает, что колмогоровская сложность является подходящим кандидатом.

Наряду с общими соображениями, [Manin2009a] содержит теоремы, связывающие фейнмановские интегралы с формальными суммами по конечным графам. Такого рода суммы (в частности, суммы по деревьям) появляются в работах Ю. И. на разные темы, например, в работах, посвящённых пространствам модулей кривых; это — один из намёков на единство понимания Ю. И. далеко отстоящих друг от друга разделов математики и физики.

3.3. Синтез

Ю. И. написал несколько работ, обычно в соавторстве, в которых есть и математика, и физика, но которые нельзя отнести ни к математике, ни к физике. Скажем несколько слов об одной из них, [MM2014]. На первый взгляд, работа относится к научной фантастике — в ней фигурирует мнимое время и смена *эонов Пенроуза*. Для широкой публики *эон* — это этап жизни Вселенной от рождения (Большого Взрыва) до Конца Света. «Потом» начинается новый эон. Согласно доступным интервью, Пенроуз предполагает, что нашему эону «предшествовали» другие[3)]. Тем не менее авторы, как и вдохновивший их нобелевский лауреат Р. Пенроуз, прекрасно знают современные космологические модели. Эти модели, однако, адекватно описывают лишь гладкие области пространства-времени — где фигурируют римановы и лоренцевы метрики и можно (хотя бы на классическом уровне) дифференцировать наблюдаемые.

Что же касается *сингулярностей* пространства-времени, то средств классической математики оказывается недостаточно. И проблема даёт огромный простор для математиков и физиков, обладающих такой эрудицией, воображением и квалификацией, как Ю. И. и М. Марколли: надо какими-то средствами *вне* традиционной математики описать то, что происходит на границах гладкости пространства-времени, на уровне сегодняшних представлений — при Больших Взрывах и Больших Хлопках[4)] (а также в *чёрных дырах*, которые в [ММ2014] не рассматриваются).

Для описания переходов из эона в эон Манин и Марколли используют *поворот Вика* (переход из вещественного времени в комплексное), *раздутия* из бирациональной геометрии, разумеется, *твисторы*, деревья, состоящие из трёхмерных проективных пространств с отмеченными точками, семейства эллиптических кривых и модулярные кривые, символическую динамику геодезических потоков на модулярных кривых и т. п.

Авторы весьма сдержанно пишут о возможности экспериментальной проверки их моделей, но какие-то направления в духе [GP2013] упоминают.

3.4. Арифметическая физика

Некоторые трудности во взаимопонимании математика и физика смоделированы в книге [KM1997], существенная часть которой — «диалоги» Математика и Физика (с участием Философа и Экспериментатора). В ответ на претензии математика к внутренне противоречи-

---

3) Он, однако, не знает, принимали ли фундаментальные физические константы (например, скорость света) те же значения….

4) Русские термины *Большой Хлопок* — и, тем более, *Большое сжатие*, по своему смыслу противоположные Большому взрыву, не так широкого распространились в русском языке, как *Большой Взрыв*. По-английски используется более выразительный термин *Big Crunch*.

вому пониманию микромира физиками, Физик отвечает: *Наверное, в этом виноваты ваши коллеги времён Евдокса. Нам подсунули слишком простую модель континуума*.

Математик мог бы ответить, что после Евдокса появились многочисленные альтернативы вещественному континууму $\mathbb{R}$. Среди них есть бросающиеся в глаза: если фундаментальные числа, описывающие природу — натуральные, образующие полукольцо $\mathbb{N}$, и мы хотим производить над наблюдаемыми величинами четыре арифметические операции, то числа, описывающие природу, должны содержать поле $\mathbb{Q}$.

Далее, от чисел требуется возможность рассматривать *приближённые* значения наблюдаемых величин, и для этого на поле $\mathbb{Q}$ нужна топология. Как мы знаем из теоремы Островского, таких топологий, помимо определённых вложениями $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$, существует ровно по одной для каждого простого числа p, и определены вложения $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ поля рациональных чисел в *полные* поля p-адических чисел. Эти пополнения поля рациональных чисел и представляют собой очевидные альтернативы единственному континууму, который физики со времён Евдокса (без достаточных оснований) объявили вездесущим.

Ю. И. не раз, в текстах, лекциях и устных беседах, старался распространить идею (в своё время сформулированную также А. Вейлем и другими), которую он называл *адельной демократией*:

все пополнения поля рациональных чисел имеют равные права.

Демократия названа *адельной*, поскольку весьма плодотворен взгляд на все эти пополнения вместе, собранные в топологическом *кольце аделей*

$$\mathbb{A} := \mathbb{R} \times \prod_{\text{простые } p} \mathbb{Q}_p.$$

В беседах [KM1997] Ю. И. эти альтернативы вещественному континууму не обсуждал, но посвятил арифметической физике отдельную работу [Manin1987]. Он скромно назвал её *своевременными размышлениями профессионального теоретико-числовика и физика-любителя о таком противоречивом предмете, как арифметическая физика*.

В качестве исходного примера Ю. И. рассмотрел формулу Эйлера

$$\frac{\pi^2}{6} = \prod_{\text{простые } p} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}}, \tag{Э}$$

интерпретируя правую часть как принадлежащую теории чисел, а левую — как «физическую константу». Он объяснил формулу Эйлера с помощью вышеупомянутой адельной демократии, точнее — с помощью левоинвариантной меры $\mathrm{d}m$ на однородном пространстве $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$, нормализованной условием

$$\int\limits_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})} \mathrm{d}m = 1.$$

Формула (Э) объясняется покомпонентным вычислением интеграла (в очевидных обозначениях)

$$1 = \int\limits_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})} \mathrm{d}m = \int\limits_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \mathrm{d}m_\infty \times \prod_p \int\limits_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)} \mathrm{d}m_p$$

вместе с известными равенствами

$$\int\limits_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \mathrm{d}m_\infty = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \int\limits_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)} \mathrm{d}m_p = 1 - \frac{1}{p^2}.$$

Основную гипотезу, названную Ю. И. *несколько рискованным обобщением*, процитируем полностью[5)]:

На фундаментальном уровне наш мир не является ни вещественным, ни p-адическим: он адельный. По каким-то причинам, связанным с физической природой нашей разновидности живой материи (возможно, с тем, что мы состоим из массивных частиц), мы обычно проектируем адельную картину в вещественную сторону. С тем же успехом мы могли бы духовно проектировать её в неархимедову сторону и вычислять наиболее важные вещи арифметически.

«Вещественная» и «арифметическая» картины мира находятся в отношении дополнительности, напоминающем отношение между сопряжёнными наблюдаемыми в квантовой механике.

Далее Ю. И. высказывает осторожное предположение об адельном направлении развития теории струн. Среди обоснований своих надежд он (лестным для автора этих строк образом[6)]) упоминает статью [ShV1990], в которой в качестве «римановых сумм» при струнном интегрировании по «всем» римановым метрикам на компактных ориентируемых поверхностях предлагается рассмотреть суммирование по метрикам, определённым равносторонними триангуляциями.

[5)] Русский текст — по переводу С. М. Львовского в сборнике «Математика как метафора».

[6)] Ещё я пытался внести вклад в арифметическую физику в работе [Sh2016a], в которой показал, что законы Кеплера можно открыть и обосновать, пользуясь только *алгебраическими* числами, и пытался на основе этого подхода наметить построение *адельной* гравитации.

Согласно теории *детских рисунков* Гротендика — Белого, в результате пространство модулей алгебраических кривых над полем комплексных чисел заменяется на такое же пространство над полем *алгебраических* чисел, т. е. действительно струнная теория делает шаг в сторону *арифметической*. К сожалению, в течение времени, прошедшего после публикации [ShV1990], этот подход к теории струн развития не получил.

После публикации [Manin1987] p-адическая физика получила значительное развитие. Адельная физика, видимо, находится на начальной стадии[7)].

Можно предположить, что предвидения Ю. И., касающиеся арифметической физики, значительно шире, чем относительно расширения или построения альтернативных версий традиционного континуума. Сам Ю. И. (иногда в сотрудничестве с М. Марколли и другими) прилагал значительные усилия к развитию такого ещё не вполне сформировавшегося раздела математики, как *некоммутативная арифметика*. В последние десятилетия усиливается интерес физиков к математическим теориям, которые полвека назад казались бесконечно далёкими от физики, и в частности к арифметическим. Среди этих теорий — близкие Ю. И. *модулярные формы*, см., например, недавний курс лекций [HK2022].

§ 4. Манин как гуманитарий

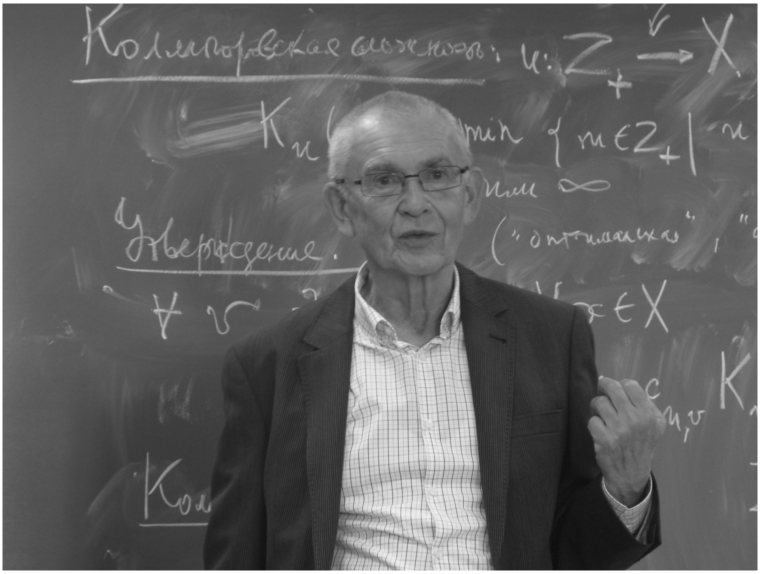
Мы ограничимся краткими комментариями, касающиеся текстов, собранных в книге [Манин2008] «Математика как метафора». По словам Ю. И., в ней собраны *…заметки на полях, наброски мыслей, подготовительные черновики, не превратившиеся в теоремы, определения, романы* или философские трактаты. Однако всякому, кто возьмёт эту книгу в руки, станет очевидно, что в ней отражена огромная интеллектуальная работа Ю. И., связанная с математикой, но не сводящаяся к ней.

Как уточнил сам Ю. И., его *…не соблазняла перспектива применить свои рабочие навыки математика к гуманитарному материалу. Мне хотелось вжиться в него, как вживаются в чужую страну, и описать увиденное словами не столь точными, сколь выразительными*.

4.0. Занятия науками о человеке

Классифицировать тексты Ю. И. гуманитарной направленности ещё труднее, чем математические и физические, и мы не будем пытаться

7) См. работы Бранко Драговича.



этого делать. В этих текстах отражены интересы Ю. И. к лингвистике, психологии, нейрофизиологии, литературоведению, и его идеи обычно связаны с взаимодействиями этих дисциплин. Ни одной из них он не занимался профессионально, но его эрудиция позволяла как задавать содержательные вопросы профессионалам (из которых он обычно выбирал весьма авторитетных и иногда собирал их на своих домашних семинарах), так и высказывать свои соображения, глубокие, оригинальные и обычно *междисциплинарные*. Некоторая часть этих соображений сохранилась в письменной форме; получившиеся тексты были опубликованы, а затем вошли в сборник [Манин2008].

Адресаты этих текстов вряд ли были очень хорошо определены. Видимо, прежде всего это были математики[8], и особо эти тексты интересны ученикам Ю. И., рассеянным по университетам разных стран, — а также ученикам учеников и т. д. Но требования к читателю, который захотел бы даже просто понять, о чём идёт речь, весьма высоки. Например, фрагменты фраз *Субдоминантное порождение речи …могло быть мощным фактором суггестии* или *…согласно О. М. Фрейденберг* (*и отчасти — К. Леви-Строссу*), *они* (герои мифа и эпоса) *не столько субъекты жизненных действий, сколько заместители когнитивных категорий* заставят заинтересованного математика не раз обратиться к Google.

[8] Часть текстов была написана по-английски и вошла в [Манин2008] в прекрасных переводах С. М. Львовского.

Что заставляло Ю. И. отвлекаться от основных занятий и работать над вопросами, формально далёкими от его основной профессии, в которой он был так несомненно успешен? Ответ можно было бы сформулировать общими словами об интересе Ю. И. к Культуре вообще, и соответствующие выразительные цитаты Ю. И. приведены выше. Однако мы в этом разделе рассмотрим гуманитарные тексты Ю. И. с более конкретной точки зрения.

При всей широте тематики он всё-таки писал не обо всём на свете. Сильно сузив предмет рассмотрения и упрощая подходы к гуманитарному творчеству Ю. И., выделим среди гуманитарных дисциплин те, которые прежде всего привлекают внимание *математика*.

- Математики получают свои результаты в результате размышлений. Отсюда наш особый интерес к Мышлению вообще.
- Математики формулируют свои результаты на специальных языках. Отсюда особый интерес к Языку вообще.

Будем считать, что эти очевидные тезисы объясняют интерес Ю. И. к психологии и лингвистике.

Как было отмечено выше, сочинения Ю. И. не подразделяются на классы, относящиеся к этим (а иногда и к другим) гуманитарным наукам. Он рассматривает проблемы этих наук в их сложной взаимосвязи и, как это свойственно ему и в математических работах, с одной стороны, ставит как можно более общие вопросы, а с другой — изучает их, тщательно анализируя «крайние случаи». Так, среди его текстов есть исключительно благожелательная и тактичная рецензия (с характерным заголовком «Это — любовь?») на книгу-дневник матери девочки-аутистки, а развитие языка он рассматривает с самых ранних стадий до искусственных языков компьютерной эры.

Мы остановимся на вопросе, который Ю. И. с наивностью неспециалиста ставит относительно происхождения языков. Как это принято среди лингвистов, он сопоставляет освоение языка древним человеком и маленьким ребёнком[9]. Он пишет: *…Но ребёнок начинает говорить, лишь поскольку он погружён в речевую среду — вокруг него и с ним говорят взрослые. Кто был «взрослым» для раннего человека*?

Отвечая на поставленный вопрос, Ю. И. освобождается от оков дедуктивных наук и даёт волю своей фантазии. Он предваряет свои рассмотрения словами *Эта работа не является ни обзорной, ни полемической*; *это частная попытка рассмотреть проблему глоттогенеза в свете данных психолингвистики*.

[9] Это называется *привлечение онтогенетических параллелей*.

Основа ответа — *неравномерность языкового развития*. В историческое время это иллюстрируется, например, тем, что *Данте и Пушкин настолько превосходят по своим языковым способностям общий уровень, что на столетия выступают учителями языка всей нации*. Ю. И. предполагает, что *Роль людей с выдающимися речевыми способностями... была ещё более значительна на заре становления языка*.

Как подобную гипотезу можно проверить? По аналогии с естественнонаучными и математическими гипотезами — вероятно, никак. Однако Ю. И. мысленно переносится в невообразимо далёкие времена (порядка 200 тысяч лет назад) и предлагает методику, связанную с переходом *от эволюции словаря к эволюции системы функций языка, <...> от лингвистики к психолингвистике*.

Ю. И. уточняет свою гипотезу, пользуясь понятиями *доминантного* и *субдоминантного* полюсов речевого поведения. Не будем пытаться эти понятия воспроизвести, ограничившись фрагментами приведённых Ю. И. ссылок на [Д1984]: доминантное связано *главным образом... с рациональными и волевыми инстанциями психики*, тогда как в субдоминантной моде *содержание речи не подвергается критической оценке, уровень его сознания понижен, <...> речевой акт может стать полностью неподконтрольным сознанию*.

Ю. И. отвечает на свой вопрос о «взрослых», учивших наших древних предков говорить, несколько расплывчато, но содержательно. По его мнению, данте и пушкины незапамятных времён — это некоторые выдающиеся личности, достаточно высоко стоящие в иерархии древних обществ, *сильные, властные, активные* (*и легко внушаемые*) *вожди племён, первосвященники и жрецы-шаманы*[10]. Характерные черты такой личности — *глоссолалирующий, плутующий, слышащий голоса богов, полубезумный*[11]. Более сложные черты «учителей» связаны с раздвоениями личности (здесь возникают термины *трикстер* и *мифологический плут*); Ю. И. разбирает их весьма подробно, но мы не берёмся их комментировать.

Обосновывая свою гипотезу, Ю. И. обращается к данным гипнотических экспериментов, к результатам изучению семантики цветообозначений естественного языка, к данным палеолитического искусства, этнографии, психиатрии и нейрофизиологии.

---

[10] Настоящим Данте и Пушкину эти черты, очевидно, не были свойственны.

[11] Г. Ш.: Не сохранились ли некоторые из этих черт у современных фюреров? Однако вряд ли они учат свои нации языку....

Убедительны ли эти аргументы для гуманитариев? Google не даёт положительного ответа на этот вопрос — ссылки на гуманитарные работы Ю. И. не находятся, по крайней мере сразу. Правда, и спектр гуманитарных дисциплин, к которым обращается Ю. И., видимо, настолько широк, что внимательное чтение его работ затруднительно не только для математиков, но и для, например, лингвистов.

Однако можно надеяться, что для гуманитариев будущего работы Ю. И. сыграют свою роль. Вероятно, межпредметные барьеры будут не так непреодолимы для гуманитариев будущего, как сейчас; по крайней мере, как предсказывал С. А. Старостин, биологам, лингвистам и археологам придётся пользоваться одними и теми же большими базами данных. И тогда работы Ю. И., в которых с единых позиций рассмотрены науки о Человеке, будут прочитаны и продолжены.

На этом мы в основном закончим обсуждение гуманитарных статей из [Манин2008], опустив интереснейшие рецензии на книги, статью об общей семиотике, рассказ о взаимоотношениях Ватикана с современны научным сообществом и (одно из многих) интервью «Пространство свободы».

Добавим лишь одно конкретное замечание[12)]. В своих размышлениях о праязыках Ю. И., как мы видели, вслед за многими лингвистами остановился на глубине около 20 тысяч лет, сформулировав вопрос *Может ли компаративистика заглянуть намного дальше вглубь*? В работе [С1989] утверждается, что *основные корни могут сохраняться значительно дольше*. С. А. Старостин разработал методику *ступенчатой реконструкции*, позволяющую — правда, с убывающей уверенностью — строить предположения о самых ранних праязыках. Ситуация отдалённо напоминает переход от классической механики к квантовой, и нет сомнения, что, если бы Ю. И. заинтересовался этим подходом к науке о языке раннего человечества, то существенно продвинул бы его. Точнее, признав огромную ценность качественной информации, содержащейся в построенных к настоящему времени реконструкциях, предложил бы для их количественного анализа (основная проблема которого — оценка времени от распада языка-предка до наблюдаемых свойств языков-потомков) заменить используемые сейчас простые формулы — без достаточно убедительных оснований построенные по аналогии с радиоуглеродным методом измерения возраста органических веществ —

12) Автор этих строк, более тридцати лет преподающий математику лингвистам в Российском Гуманитарном Университете, сформировал свой взгляд математика на некоторые лингвистические проблемы.

на более адекватный и продвинутый математический аппарат, например, подходящим образом модифицированный из работы [MM2011].

Закончим этот раздел несколькими цитатами из гуманитарных текстов Ю. И.

Мозг образует замечательно сложную материальную систему, которая обслуживает психику и является её носителем. Поэтому законен и очень интересен вопрос об эволюции нейрофизиологических коррелятов психических процессов.

Попытка З. Фрейда была, возможно, самой заметной героической вылазкой разума против иррационального в человеческой психике. Как было сказано, на кушетку психоаналитика легла вся западная культура этого столетия.

Бэконианские призраки не исчезли от того, что на них указали пальцем, и шепчут нам что-то о нас самих.

В Риме времена прорастают друг сквозь друга, и Вера Рубин, одна из открывателей таинственной тёмной материи, участвующей только в гравитационном взаимодействии, гуляет под сводами Сикстинской капеллы и разглядывает Сотворение Мира.

4.1. Литературное наследие

Важная часть этого наследия, не вошедшая в [Манин2008], — предисловие Ю. И. к дневнику его деда по маме Зиновия Миллера. Дневник называется «Из пережитого. История одной эвакуации» и описывает трагические события жизни в 1941–1942 годах советской семьи (в которую входил четырёхлетний Юрочка), бежавшей от наступавших немецких войск из Симферополя в Среднюю Азию. События, увы, вполне обыкновенные для тех лет, включавшие перемещения в нечеловеческих условиях в переполненных поездах и кораблях, ночлеги под открытым небом и т. п. … Необыкновенным было то, что описания всех этих кошмаров аккуратно заносились дедом Ю. И. в школьную тетрадку *неправдоподобно ясным и красивым почерком, почти без помарок, каждая буква — каллиграфическое совершенство*. Дневник был посвящён любимому внуку Юрочке и закончен в день его пятилетия.

Ю. И. писал своё предисловие в 2010 году, отметив, что на его столе дневник деда лежит рядом с распечаткой блога его внука Фёдора Манина, который, *закончив институт <…> в одиночку пересёк на велосипеде всю Японию с севера на юг*. Предисловие наполнено явными или неявными генеалогическими сопоставлениями и является, по-видимому, единственным сравнительно полным источником сведений о предках Ю. И.: в отличие от Колмогорова, Понтрягина и Гротендика, времени для написания своей автобиографии Ю. И. не нашёл.

Об авторе дневника Зиновии Григорьевиче Миллере Ю. И. счёл нужным сообщить, что в городе Юзовке, в котором тот родился, около 1904 года *готовилась к постановке пиеса «Юдифь», соч. З. Г. Миллера*. Рукопись этой пьесы сохранилась и, по словам Ю. И. почерк автора *отличается тем же щегольством*, что дневник.

О деде Гавриле по отцу, *леснике и крестьянине*, Ю. И. знал гораздо меньше. Сохранилась единственная фотография Гаврилы — *мужик в лаптях, с толстовской бородой и суровым взором, сидит на стуле, поставленном прямо в лесу*, и передаваемое потомкам устно (Гаврила был неграмотен) четверостишие, посвящённое сезонной смене жилья:

Соберём свои лоскутья, // старый веник — одни прутья, // и печальною гурьбой // побредём к себе домой.

Ю. И. отмечает, что *Страсть к стихоплётству, видимо, была генетической*: *её унаследовали четыре следующие поколения Маниных*.

Словцо, отразившее не вполне уважительное отношение Ю. И. к поэтической продукции не только своих потомков и предков, но и к собственной, повлияло на композицию [Манин2008]: стихи (как и небольшая подборка мемуаристики) помещены в раздел «Из ненаписанного».

Стихи пишут многие математики. Некоторые (А. А. Болибрух, В. Е. Захаров, В. А. Успенский) их публикуют, бóльшая часть ограничивается тем, что читает их ближним, скромно считая их любительством.

Стихи Ю. И. весьма профессиональны Это видно, например, по стихотворению, посвящённому В. Е. Захарову:

Я узнаю по коду
деревьев, стен и лиц
последнюю погоду
перед отлётом птиц.

Последнюю погоду,
прощальное тепло.

Меняю на свободу
родное ремесло,
с каким почти до края
мне вышло добрести,
зелёный лист теряя
из высохшей горсти…

Это стихотворение — одно из немногих «серьёзных» и собственных, т. е. не (достаточно вольных) переводов и стилизаций, среди вошедших в [Манин2008]. Из несерьёзных можно привести пример фрагмента *Загляну-ка я под мини*: *// Интересно, что под ними*? *// …А заглядывать под макси // Удаётся только таксе*, а из стилизации — начало «Памяти Иосифа Бродского»

До-светания, — как бы прощаясь глухо,
Тело есть лишь продукт разложенья духа,
Слабый свет — продукт разложенья тела,
Кто-то это сказал, но не в этом дело…

Учтя поэтическое мастерство Ю. И., продемонстрированное хотя бы в приведённых примерах, можно смело предположить, что поэтическое наследие Ю. И. гораздо шире вошедшего в [Манин2008]. Это предположение косвенно подтверждается Матильдой Марколли, которая в своём пронзительном тексте [M2023], среди прочего, рассказывает о разборе бумаг Ю. И. в его кабинете в Институте Макса Планка и утверждает, что *Poetry is everywhere*. Ближние решат, будут ли опубликованы какие-то ещё стихи Ю. И.[13)]

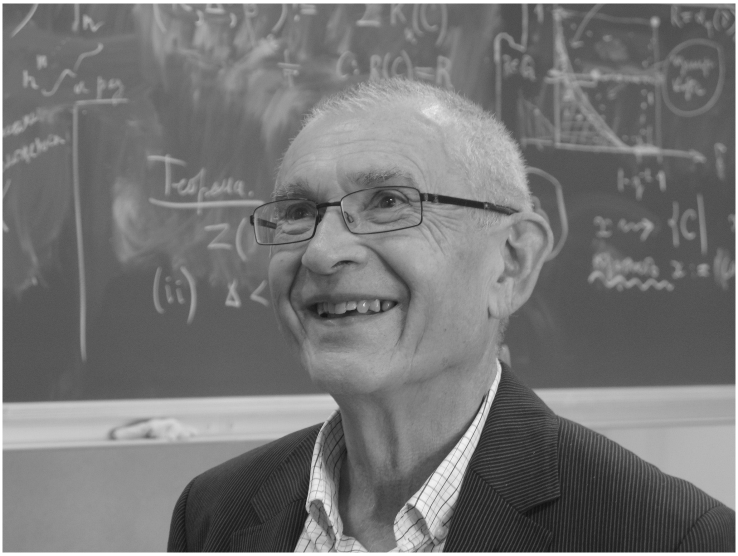
Прозаические произведения Ю. И., включённые в [Манин2008], носят мемуарный характер. Для коллег и учеников Ю. И. эти произведения существенно расширяют представления о личности Ю. И. Мне, например, до прочтения «Аркадий, Борис, Володя» трудно было представить себе Ю. И., к которому Высоцкий регулярно приезжает после театра, берётся за гитару и поёт *далеко заполночь*. Но пришлось понять, что интерес Ю. И. к Культуре распространяется и на этот пласт, далёкий от формальной изысканности.

§ 5. Манин как Учитель

Что запомнилось из курсов Ю. И., прослушанных в МГУ ещё в советское время? (Начиная с 1990-х, Ю. И., работая в основном за границей, выступал в России только с отдельными лекциями — правда, довольно многочисленными).

Прежде всего — невероятное разнообразие тем. Названия курсов за несколько десятилетий, видимо, ни разу не повторились. Каждый год они содержали что-то, чем Ю. И. в тот год занимался; это — не очень сильное ограничение, поскольку Ю. И. всегда одновременно

13) Конечно, переиздания [Манин2008] весьма желательны, причём с правильным написанием géométrie или géomètre на обложке.



занимался несколькими вещами (и автору этих строк он советовал, если что-то не получается, *на время* резко сменить тематику).

Лекции были построены мастерски и артистично. На первых лекциях аудитории были переполнены, отчасти потому, что на них приходили, например, лингвисты и биологи — насладиться понятными и профессиональными введениями и прекрасным русским языком (разумеется, после 1990-х те же свойства относились к английскому). Постепенно количество слушателей сокращалось: лекции становились более техническими, на последних возникало ощущение, что Ю. И. делится проведёнными накануне вычислениями. Однако и такие лекции были тщательно подготовлены. Возможно, манинских учеников можно распознать по привычке писать на листах А4, положив их горизонтально: Ю. И. объяснял нам, что так мы видим перед собой образ доски в аудитории.

При всей чёткости стиля лекции были очень живыми. Запомнились такие выражения Ю. И., как *Это была преамбула, а сейчас начнётся амбула* или *Ой, доска кончается*… Были и более серьёзные апелляции к культурному бэкграунду слушателей — при выводе уравнения Кортевега-де-Фриза волн на мелкой воде упоминались гравюры Кацусика Хокусай…

Сочетание гуманитарной и математической культуры позволяло Ю. И. обогащать математический язык, вводить обороты, которые сразу входили в обиход, проясняя сложные концепции. *Адельная демократия* — это «равные права» для всех пополнений поля рациональных чисел. *Теория категорий* воплощает *социологический подход к мате-*

матике: *каждый объект рассматривается как член сообщества себе подобных*.

Лекции Ю. И., прочитанные в 1960-х, 1970-х и 1980-х годах в аудиториях мехмата на 13–16 этажах здания МГУ на Воробьёвых горах, остались лишь в памяти тогдашних слушателей, стареющих и уходящих… К счастью, прочитанные с тем же совершенством лекции в XXI веке сохраняются на YouTube и, надо надеяться, переживут многие поколения математиков. (Ю. И. смотрел в будущее со своеобразным оптимизмом: *Если уж выжили людоедство, астрология и генералы, то и наука не исчезнет*. — см. [Манин2008].)

Ю. И. был мастером не только публичных выступлений, но и личного профессионального общения. После его лекций в XXI веке в Московском независимом университете к нему выстраивались очереди. Он был неизменно корректен и чёток, выслушивал любые соображения (иногда очень незрелые) любых собеседников, уточнял их и почти всегда чем-то делился в ответ. Из этих кратких бесед становилось ясно, насколько количество его идей превосходило возможность все их реализовать самостоятельно; впрочем, часто эти идеи в дальнейшем трансформировались в препринты и статьи, иногда в соавторстве с собеседником.

Личные отношения Ю. И. с учениками варьировались в широких пределах, от сравнительно формальных до переходящих в дружбу. С автором настоящих строк отношения были ближе к формальным — я, как было упомянуто выше, поздно стал формальным учеником Ю. И., перейдя к нему по не зависящим от нас причинам от И. Р. Шафаревича; возможно, и другие личностные обстоятельства препятствовали нашему дальнейшему сближению.

Тем не менее личные отношения безусловно были; они сыграли огромную роль в моей жизни, как, скорее всего, и в жизни большинства учеников Ю. И. (были и примеры печальных результатов — подавленные интеллектуальным совершенством учителя, некоторые разочаровывались в своих силах). Наш учитель очевидно применял свои знания о Человеке, о которых речь шла выше, к конкретным молодым людям; несмотря на огромное количество учеников, мы никогда не были для Ю. И. однородной массой. Так, лично мне он адресовал совершенно нетривиальное наблюдение: *вам для успешной работы, видимо, полезны стрессовые ситуации*; *в цейтноте вы больше успеваете*.

Огромное удовольствие доставляло общение с Ю. И. у него дома; я могу писать лишь о советском периоде и о квартире на Юго-Западе Москвы. Попадая туда, можно было почувствовать одну из важнейших черт личности Ю. И. — построение жизни по своим эстетическим правилам, независимо от внешних обстоятельств. В квартире, разумеется, было тесно от книг, но находилось место и для картин; на видном месте была доска, основное средство общения на математические темы вне казённой обстановки Университета. Также (в до-компьютерную эпоху в советской жизни, в 1970–1980-е годы) всегда была готова к работе пишущая машинка. Низкие зарплаты советских профессоров не могли быть препятствием для организации жизни Ю. И. по своему вкусу: так, он много, быстро и качественно переводил математические книги (на упомянутой пишущей машинке непосредственно производил готовый текст, оставляя пробелы нужных размеров для ручной вставки формул).

Эти уроки личной независимости и организации жизни много работающего интеллектуала были весьма убедительны. Я не использую словосочетания *русский интеллигент*, поскольку традиционные черты этого сословия (невнимание к одежде, беспорядок в квартире и т. п.) не были свойственны Ю. И. Скорее, ещё в советский период своей жизни он по возможности вёл жизнь западного профессионала; не удивительно, что начиная с 1990-х он естественно вписался в западную математическую жизнь (сохраняя связи с российской). Эта же способность передалась многим его ученикам.

Важная черта Ю. И. — мягкость характера; он не любил плохо говорить ни о людях, ни о текстах. Однако он умел быть жёсток и твёрд; так, на защите блистательной кандидатской диссертации Дринфельда, которая по обычаям мехматской жизни 1970-х имела шанс быть проваленной, Ю. И., произнеся все обычные слова научного руководителя, произнёс что-то о празднике, на котором все присутствовали, и, особенно грозно посмотрев на членов учёного совета, сказал *и я надеюсь, что никто нам этот праздник не испортит*. Мы никогда не узнаем, напугал ли он кого-нибудь, но защита прошла успешно, с каким-то небольшим количеством «чёрных шаров».

Думаю, что имею моральное право от имени формальных и неформальных учеников Юрия Ивановича выразить любовь и огромную благодарность за всё, чему он нас научил как математик и как человек. Светлая память!

Список литературы

[Манин1956] *Манин Ю. И.* О сравнениях третьей степени по простому модулю // Известия АН СССР. Сер. Матем. 1956. Т. 20, вып. 5. С. 673–678.

[Манин1958] *Манин Ю. И.* Алгебраические кривые над полями с дифференцированием // Известия АН СССР. Сер. Матем. 1958. Т. 22, вып. 6. С. 737–756.

[Манин1963] *Манин Ю. И.* Доказательство аналога гипотезы Морделла для кривых над функциональными полями // Доклады АН СССР. 1963. Т. 152. С. 1061–1063.

[Manin1965] *Manin Yu. I.* Moduli fuchsiani // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3). 1965. Vol. 19. P. 113–126.

[Манин1968] *Манин Ю. И.* Соответствия, мотивы и моноидальные преобразования // Матем. сб. 1968. Т. 119, № 4. С. 475–507.

[Манин1970] *Манин Ю. И.* Лекции по алгебраической геометрии. I: Аффинные схемы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970.

[Манин1971] *Манин Ю. И.* Лекции по алгебраической геометрии. Часть II: К-функтор в алгебраической геометрии. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971.

[Манин1971a] *Манин Ю. И.* Добавление переводчика к книге: Д. Мамфорд. Абелевы многообразия. М.: Мир. 1971. С. 286–292.

[ИМ971] *Исковских В. А., Манин Ю. И.* Трёхмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86(128), № 1(9). С. 140–166.

[Манин1973] *Манин Ю. И.* Десятая проблема Гильберта // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Т. 1. М.: ВИНИТИ, 1973. С. 5–37.

[Манин1974] *Манин Ю. И.* Лекции о математической логике. М.: Московский институт инженеров электронного машиностроения, 1974.

[Манин1975] *Манин Ю. И.* Проблема континуума // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Т. 5, М.: ВИНИТИ, 1975. С. 5–72.

[Манин1975a] *Манин Ю. И.* Теорема Гёделя // Природа, 1975. № 12. С. 80–87.

[ГМШ1976] *Манин Ю. И.* Скобки Пуассона и ядро вариационной производной в формальном вариационном исчислении // Функц. анализ и его прил. 1976. Т. 10, вып. 4. С. 30–34.

[Манин1977] *Манин Ю. И.* Человек и знак // Природа. 1977. № 5. С. 150–152.

[Manin1977a] *Manin Yu. I.* A course in mathematical logic for mathematicians / Second edition. New York: Springer, 2010. (Graduate Texts in Mathematics; Vol. 53).

[ADHM1978] *Atiyah M. F., Hitchin N. J., Drinfel'd V. G., Manin Yu. I.* Construction of instantons // Phys. Lett. A. 1978. Vol. 65, № 3. P. 185–187.

[DM1978] *Atiyah M. F., Hitchin N. J., Drinfel'd V. G., Manin Yu. I.* A description of instantons // Comm. Math. Phys. 1978. Vol. 63, № 2. P. 177–192.

[Манин1978] *Манин Ю. И.* Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Т. 11. М.: ВИНИТИ, 1978. С. 5–152.

[Манин1978a] *Манин Ю. И.* Матричные солитоны и расслоения над кривыми с особенностями // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12, вып. 4. С. 53–63.

[HM1980] *Henkin G. M., Manin Yu. I.* Twistor description of classical Yang — Mills — Dirac fields // Phys. Lett. B. 1980. Vol. 95, № 3–4. P. 40–408.

[ЛМ1980] *Лебедев Д. Р., Манин Ю. И.* Уравнения длинных волн Бенни II. Представление Лакса и законы сохранения // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. Т. 12. Л.: Наука, 1980. (Зап. научн. сем. ЛОМИ; Т. 96). С. 169–178.

[Manin1981] *Manin Yu. I.* Expanding constructive universes // Algorithms in modern mathematics and computer science (Urgench, 1979). Berlin: Springer, 1981. (Lecture Notes in Comput. Sci.; Vol. 122). С. 255–260.

[Манин1982] *Манин Ю. И.* Замечания об алгебраических супермногообразиях // Алгебра. Сб. работ, посвящённых 90-летию О. Ю. Шмидта. М.: МГУ, 1982. С. 95–101.

[ВМ1984] *Влэдуц С. Г., Манин Ю. И.* Линейные коды и модулярные кривые // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. Т. 25, М.: ВИНИТИ, 1984. С. 209–257.

[Манин1984] *Манин Ю. И.* Новые размерности в геометрии // УМН. 1984. Т. 39, вып. 6(240). С. 47–73.

[Manin1986] *Manin Yu. I.* Theta-function representation of the partition function of a Polyakov string // Pis'ma Zh. Eksp. Teor Fiz. 1986. Vol. 43, № 4. P. 161–163.

[BM1986] *Beilinson A. A., Manin Yu. I.* The Mumford Form and the Polyakov Measure in String Theory // Comm. Math. Phys. 1986. Vol. 107, № 3. P. 359–376.

[KM1986] *Kapranov M. M., Manin Yu. I.* The twistor transformation and algebraic-geometric constructions of solutions of the equations of field theory // Russian Math. Surveys. 1986. Vol. 41, № 5. P. 33–61.

[Manin1987] *Manin Yu. I.* Reflections on arithmetical physics // Conformal Invariance and string theory. Poiana Brasov, 1987. Boston, MA: Academic Press, 1989. P. 293–303.

[Manin1991] *Manin Yu. I.* Topics in noncommutative geometry // Algorithms in modern mathematics and computer science (Urgench, 1979). Berlin: Springer, 1981. (Lecture Notes in Comput. Sci.; Vol. 122). P. 255–260.

[Manin1991a] *Manin Yu. I.* Quantum groups // Nederl. Akad. Wetensch. Verslag Afd. Natuurk. 1991. Vol. 100, № 5. P. 55–68.

[Manin1993] *Manin Yu. I.* Notes on the arithmetic of Fano threefolds // Compositio Math. 1993. Vol. 85, № 1. P. 37–55.

[KM1994] *Kontsevich M., Manin Yu.* Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of $\mathbf{P}^2$ // Comm. Math. Phys. 1994. Vol. 164, № 3. P. 525–562.

[Manin1995] *Manin Yu. I.* Gromov — Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry // Columbia University Number Theory Seminar (New York, 1992). 1995. Astérisque. № 228. P. 121–163.

[CMZ1997] *Cohen P. B., Manin Yu., Zagier D.* Automorphic pseudodifferential operators // Algebraic aspects of integrable systems, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. Vol. 26. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 1997. P. 17–47.

[КМ1997] *Кобзарев В. Ю., Манин Ю. И.* Элементарные частицы. М.: Фазис, 1997.

[Manin1998] *Manin Yu. I.* Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of $\mathbf{P}^2$ // Geometry of differential equations. Providence, RI: AMS, 1998. (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2; Vol. 186). P. 131–151.

[Manin2000] *Manin Yu. I.* Classical computing, quantum computing, and Shor's factoring algorithm // Séminaire Bourbaki. Vol. 1998/99. Astérisque. 2000. № 266. Exp. No. 862. P. 375–404.

[KM2001] *Kanevsky D., Manin Yu.* Composition of points and the Mordell — Weil problem for cubic surfaces // Rational points on algebraic varieties. Basel: Birkhäuser, 2001. (Progr. Math.; Vol. 199). P. 199–219.

[Manin2002] *Manin Yu. I.* Real multiplication and noncomutative geometry // Selecta Math. (N. S.). 2002. Vol. 8, № 3. P. 475–521.

[MM2002] *Manin Yu. I., Marcolli M.* Continued fractions, modular symbols, and noncommutative geometry. arXiv:math/0202109v1 [math.AG], 12 Feb 2002.

[Манин2003] *Манин Ю. И.* Некоммутативная геометрия и квантовые тета-функции // Глобус. Записки математического семинара МНУ. 2004. Т. 1. С. 91–108.

[Манин2008] *Манин Ю. И.* Математика как Метафора. М.: МЦНМО, 2008.

[Manin2009] *Manin Yu. I.* Cyclotomy and analytic geometry over $\mathbb{F}_1$. arXiv: 0809.1564v2 [math.AG].

[Manin2009a] *Manin Yu. I.* Renormalization and computation I: motivation and background. arXiv:0904.4921v2 [math.QA].

[MM2011] *Manin Yu. I., Marcolli M.* Error-correcting codes and phase transitions // Math. Comput. Sci. 2011. Vol. 5, № 2. P. 133–170.

[LM2009] *Luef F., Manin Yu. I.* Quantum theta functions and Gabor frames for modulation spaces // Lett. Math. Phys. 2009. Vol. 88, № 1–3. P. 131–161.

[Манин2012] *Манин Ю. И.* Введение в теорию схем и квантовые группы. М.: МЦНМО, 2012.

[BM2013] *Buium A., Manin Yu. I.* Arithmetic differential equations of Painlevé VI type. arXiv:1307.3841v2 [math.NT], 18 Dec 2013.

[Манин2014] *Манин Ю. И.* Закон Ципфа и вероятностные распределения Левина // Функц. анализ и его прил. 2014. Т. 48, вып. 2. С. 51–66.

[Manin2014] *Manin Yu. I.* Forgotten motives: the varieties of scientific experience // ICCM Not. 2014. Vol. 2, № 1. P. 6–10.

[MM2014] *Manin Yu. I., Marcolli M.* Big Bang, Blowup, and Modular Curves // SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 2014. Vol. 10. Paper 073. P. 20.

[Manin2015] *Manin Yu. I.* Neural codes and homotopy types: mathematical models of place field recognition // Mosc. Math. J. 2015. Vol. 15, № 4. P. 741–748.

[MM2020] *Manin Yu. I., Marcolli M.* Quantum Statistical Mechanics of the Absolute Galois Group // SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 2020. Vol. 16. Paper 038. P. 52. arXiv:1907.13545.

[Manin2023] *Manin Yu. I.* Rational points of algebraic varieties: a homotopical approach // Известия РАН. Сер. Матем. 2023. Т. 87, № 3 (в печати).

[AM1972] *Artin M., Mumford D.* Some elementary examples of unirational varieties which are not rational // Proc. London Math. Soc. (3). 1972. Vol. 25. P. 75–95.

[B2016] *Beauville A.* The Lüroth problem // Rationality problems in algebraic geometry. Cham: Springer, 2016, (Lecture Notes in Math.; Vol. 2172). P. 1–27.

[CG1972] *Clemens H., Griffiths P.* The intermediate Jacobian of the cubic threefold // Ann. of Math. (2). 1972. Vol. 95. P. 281–356.

[C1990] *Coleman R.* Manin's proof of the Mordell conjecture over function fields // Enseignement Mathematique. 1990. Vol. 36. P. 393–427.

[COGP1991] *Candelas P., de la Ossa X., Green P., Parkes L* A pair of Calabi — Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory // Nuclear Phys. B. 1991. Vol. 359, № 1. P. 21–74.

[CCM2008] *Connes A., Consani C., Marcolli M.* Fun with $\mathbf{F}_1$. arXiv:0806.2401v1 [math.AG].

[DKE1999] *Deligne P., Kazhdan D., Etingof P. et al.* Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians (2 Volume Set). AMS, 1999.

[D2008] *Durov N.* New Approach to Arakelov Geometry. arXiv:0704.2030v1 [math.AG].

[E1912] *Enriques F.* Sopra una involuzione non razionale dello spazio // Rend. Acc. Lincei (5a). 1912. Vol. 21. P. 81–83.

[F1983] *Faltings G.* Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern // Invent. Math. 1983. Vol. 73, № 3. P. 349–366.

[F1908] *Fano G.* Sopra alcune variet'a algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli // Atti R. Acc. Sci. Torino. 1908. Vol. 43. P. 973–984.

[F1962] *Feferman S.* Transfinite recursive progressions of axiomatic theories // J. Symbolic Logic. 1962. Vol. 27, № 3. P. 259–316.

[G1962] *Grothendieck A.* On the DeRham Gohomology of Algebraic Varieties // Publ. Math. IHES. 1966. Vol. 29.

[G1969] *Grothendieck A.* Standard Conjectures on Algebraic Cycles // Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968). London: Oxford University Press, 1969. (Tata Inst. Fundam. Res. Stud. Math.; Vol. 4). P. 193–199.

[G1984] *Grothendieck A.* Esquisse d'un programme // Geometric Galois actions, 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; Vol. 242). P. 5–48. With an English translation on pp. 243–283.

[GP2013] *Gurzadyan V. G.*, *Penrose R.* On CCC-predicted concentric low-variance circles in the CMB sky // Eur. Phys. J. 2013. Vol. 128. Article 22.

[H2017] *Haran S.* Geometry over $\mathbb{F}_1$. arXiv:1709.05831v1 [math.AG], 18 Sep 2017.

[HK2022] *D'Hoker E.*, *Kaidi J.* Lectures on modular forms and strings. arXiv:2208.07242v2 [hep-th], 18 Nov 2022.

[K1968] *Katz N. M.* On the differential equations satisfied by period matrices // Publications mathématiques de l'IHÉS. 1968. Vol. 35. P. 71–106.

[K1962] *Kent C. F.* Constructive analogues of the group of permutations of the natural numbers // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 104. P. 347–362.

[L1990] *Lang S.* Mordell's review, Siegel's Ietter to Mordell, diophantine geometry, and 20th century mathematics // Notices Amer. Math. Soc. 1995. Vol. 42, № 3. P. 339–350.

[L1876] *Lüroth J.* Beweis eines Satzes über rationale Curven // Math. Ann. 1876. Bd. 9. S. 163–165.

[M2023] *Marcolli M.* Pierced by a sun ray. Preprint 2023.

[M2020] *Milne J. S.* Grothendieck's standard conjecture of Lefschetz type over finite fields. arXiv:2011.06563v1 [math.AG].

[M1922] *Mordell L. J.* On the rational solutions of the indeterminate equation of the third and fourth degrees // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1922. Vol. 21. P. 179–192.

[S1960] *Segre B.* Variazione continua ad omotopia in geometria algebrica // Ann. Mat. Pura ed Appl. (4). 1960. Vol. 50. P. 149–186.

[Sh2016] *Shabat G.* Calculating and drawing Belyi pairs // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2016. Т. 446. С. 182–220.

[Sh2016a] *Shabat G.* On the elliptic time in the adelic gravity // Facta universitatis. Ser. Physics, Chemistry and Technology. 2016. Vol. 14, № 3. Special issue. P. 307–319.

[ShV1990] *Shabat G. B.*, *Voevodsky V. A.* Drawing Curves Over Number Fields // *Cartier P.*, *Illusie L.*, *Katz N. M.*, *Laumon G.*, *Manin Y. I.*, *Ribet K. A.* (eds.) The Grothendieck Festschrift. Progress in Mathematics. Vol 88. Boston, MA: Birkhäuser, 1990.

[Tsf2023] *Tsfasman M.* To appear in the Notices of AMS.

[Б1979] *Белый Г. В.* О расширениях Галуа максимального кругового поля // Известия АН СССР. Сер. Матем. 1979. Т. 43, вып. 2. С. 267–276.

[В1989] *Вейль Г.* Давид Гильберт и его математическое творчество. М.: Наука, 1989.

[ВШ1989] *Воеводский В. А., Шабат Г. Б.* Равносторонние триангуляции римановых поверхностей и кривые над числовыми полями // ДАН СССР. 1989. Т. 39, № 1. С. 38–41.

[Д1984] *Дридзе Т. М.* Текстовая деятельность в структуре социальной коммуникации. М.: Наука, 1984.

[ЗШ1973] *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* О взаимодействии солитонов в устойчивой среде // ЖЭТФ. 1973. Т. 64, № 5. С. 1627–1639.

[ИШ1989] *Исковских В. А., Шафаревич И. Р.* Алгебраические поверхности // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фунд. направ. Т. 35. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 131–263.

[КШ2017] *Куликов Вик. С., Шабат Г. Б.* Игорь Ростиславович Шафаревич — великий математик и Учитель // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 22. М.: МЦНМО, 2017. С. 35–61.

[К1965] *Колмогоров А. Н.* Три подхода к определению понятия «количество информации» // Проблемы передачи информации. 1965. Т. 1, № 1. С. 3–11.

[ПГ1969] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969.

[С1989] *Старостин С. А.* Сравнительно-историческое языкознание и лексико-статистика // Лингвистическая реконструкция и древнейшая история Востока. М.: Наука, 1989. С. 3–39.

[С2019] *Стюарт И.* Давид Гильберт. М.: Альпина нон-фикшн, 2019.

Георгий Борисович Шабат, Российский государственный гуманитарный университет, Москва

george.shabat@gmail.com