Наш семинар: математические сюжеты

Числа Бернулли и формальные группы

А. П. Веселов

Потому, что все оттенки смысла
Умное число передаёт.

Н. С. Гумилёв

Я расскажу о замечательных числах Бернулли и их связи с теорией формальных групп и алгебраической топологией.

§ 1. Введение: как Якоб Бернулли вычислял суммы степеней

Самое замечательное в истории математики — это как великие её представители могли видеть большое за не очень значительными на вид наблюдениями. Замечательным примером является открытие чисел Бернулли, пожалуй самых мистических чисел в математике, играющих важную роль в различных её областях от алгебры и теории чисел до анализа и алгебраической топологии.

А начиналось всё с невинного вычисления сумм степеней первых n натуральных чисел

$$S_m(n) = 0^m + 1^m + \ldots + (n-1)^m.$$

Мы здесь (по французской традиции) включили 0 в натуральные числа, полагая, что $0^0 = 1$, для того чтобы у нас в сумме было n членов и чтобы было $S_0(n) = n$ (здесь важно, что Бернулли считает сумму до $(n-1)^m$ включительно).

Следующие формулы были известны в математике очень давно и могут быть доказаны, например, методом математической индукции:

$$S_1(n) = 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n,$$
$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n,$$
$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4} = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2.$$

Последнее равенство можно переписать в замечательном виде:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3 = (1 + 2 + \ldots + (n-1))^2,$$

что послужило мотивом дальнейшего изучения сумм нечётных степеней немецким учёным Иоганном Фаульхабером в книге 1631 года, одной из первых книг по алгебре, написанных на немецком языке.

Швейцарский математик Якоб Бернулли продолжил исследования Фаульхабера в 1703 году и нашёл, в частности, что

$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n,$$
$$S_5(n) = \frac{1}{6}n^6 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^3 - \frac{1}{12}n^2,$$
$$S_6(n) = \frac{1}{7}n^7 - \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n.$$

Две закономерности легко видеть: старший коэффициент $S_m(n)$ равен $1/(m+1)$, а следующий коэффициент всегда равен $-1/2$.

Гениальное наблюдение Бернулли состоит в том, что все остальные коэффициенты легко определяются по коэффициентам в $S_m(n)$ при первой степени n, которые теперь называются *числами Бернулли* и обозначаются B_m:

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} C_{m+1}^k B_k n^{m+1-k}. \qquad (1)$$

Здесь $C_l^k = \dfrac{l!}{k!(l-k)!}$ — это биномиальные коэффициенты из разложения

$$(a+b)^l = \sum_{k=1}^{l} C_l^k a^k b^{l-k}.$$

Числа Бернулли однозначно определяются рекуррентно из свойства

$$S_m(1) = \sum_{k=0}^{m} C_{m+1}^k B_k = 0, \quad m > 0, \qquad (2)$$

где $B_0 = 1$. В частности, для первых m имеем

$$2B_1 + B_0 = 0, \quad 3B_2 + 3B_1 + B_0 = 0, \quad 4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + B_0 = 0,$$

откуда $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$. Продолжая вычисления[1)], получаем

$$B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = 0,$$
$$B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_9 = 0, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{11} = 0, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}.$$

Этих вычислений было достаточно для Бернулли, чтобы посчитать сумму десятых степеней первой тысячи натуральных чисел $S_{10}(1000)$ «в течение половины четверти часа», чем он явно очень гордился.

Бросается в глаза, что все числа Бернулли B_k с нечётными $k > 1$ равны нулю, а знаки чисел Бернулли B_k с чётными k чередуются. Это действительно так, и мы это сейчас докажем. Однако в остальном последовательность чисел Бернулли выглядит довольно загадочно и появляется в целом ряде поистине магических связей.

§ 2. Чудеса чисел Бернулли

Нам будет удобно использовать следующую «магическую» символику, восходящую к английским математикам XIX века Джону Блиссарду и Джеймсу Джозефу Сильвестру. Запишем рекурсию чисел Бернулли (2) в символическом виде как

$$(\mathscr{B} + 1)^n = \mathscr{B}^n, \quad n > 1, \tag{3}$$

где по договорённости $\mathscr{B}^k$ следует заменить на B_k. При этом формула Бернулли (1) может быть записана как

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1}((\mathscr{B} + n)^{m+1} - \mathscr{B}^{m+1}). \tag{4}$$

Часть свойств чисел Бернулли мы докажем, используя «магические» обозначения. Читателю предлагается продумать, как это соотносится с традиционным подходом.

Начнём с доказательства следующей явной формулы для экспоненциальной производящей функции чисел Бернулли:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}. \tag{5}$$

[1)] Интересно, что вычисление чисел Бернулли было целью одной из первых «компьютерных» программ, написанной в 1841 году Адой Лавлейс, дочерью Байрона и ученицей Бэббиджа. В честь неё назван один из языков программирования.

Для этого нам надо доказать равенство рядов

$$(e^z-1)\sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{z^n}{n!}\equiv z.$$

Заметим, что, используя нашу символику, мы можем записать

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathscr{B}^n\frac{z^n}{n!}=e^{\mathscr{B}z},$$

так что наше равенство можно переписать как

$$(e^z-1)e^{\mathscr{B}z}=e^{(\mathscr{B}+1)z}-e^{\mathscr{B}z}=\sum_{n=1}^{\infty}[(\mathscr{B}+1)^n-\mathscr{B}^n]\frac{z^n}{n!}\equiv z,$$

что верно в силу (3), так как единственный ненулевой коэффициент (при z) равен 1.

Соотношение (5) часто используется как определение чисел Бернулли. Воспользуемся им для доказательства того, что B_{2k+1} при $k>0$ равны нулю.

Для этого добавим к нашей производящей функции линейный член $z/2=-B_1 z$:

$$\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2}=\frac{z(e^z+1)}{2(e^z-1)}=\frac{z}{2}\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}}=\frac{z}{2}\operatorname{cth}\frac{z}{2}. \tag{6}$$

Поскольку эта функция чётная, все её нечётные коэффициенты равны нулю.

По этой причине иногда числами Бернулли называют только чётные коэффициенты, забывая про нули и B_1. Мне это очень не нравится (особенно игнорирование важного коэффициента $B_1=-1/2$), и мы так делать не будем.

Докажем теперь формулу Бернулли (1). Для этого введём, используя нашу символику, классические *многочлены Бернулли* $B_m(x)$ как

$$B_m(x):=(\mathscr{B}+x)^m=\sum_{k=0}^{m}C_m^k B_k x^{m-k},\quad m\geqslant 0. \tag{7}$$

Их свободные члены — это числа Бернулли: $B_n(0)=B_n$.

Экспоненциальная производящая функция многочленов Бернулли имеет вид

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{z^n}{n!}. \tag{8}$$

В самом деле,

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1} = e^{\mathscr{B}z}e^{xz} = e^{(\mathscr{B}+x)z} = \sum_{n=0}^{\infty}(\mathscr{B}+x)^n\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{z^n}{n!}.$$

Многочлены Бернулли обладают следующими двумя замечательными свойствами: разностная производная

$$B_m(x+1)-B_m(x) = mx^{m-1} \tag{9}$$

совпадает с обычной производной степенной функции x^m, а обычная производная удовлетворяет условию

$$\frac{d}{dx}B_m(x) = mB_{m-1}(x), \tag{10}$$

которое аналогично свойству степенной функции.

Первое свойство проще всего увидеть, используя производящую функцию (8):

$$\frac{ze^{(x+1)z}}{e^z-1} - \frac{ze^{xz}}{e^z-1} = \frac{ze^{xz}(e^z-1)}{e^z-1} = ze^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^nz^{n+1}}{n!} = \sum_{m=1}^{\infty}mx^{m-1}\frac{z^m}{m!}.$$

Второе свойство следует прямо из определения (7).

Нетрудно доказать также свойство симметрии многочленов Бернулли:

$$B_m(1-x) = (-1)^mB_m(x), \tag{11}$$

из которого следует, в частности, что $B_m(1) = (-1)^mB_m$.

Докажем теперь, что суммы степеней можно выразить через многочлены Бернулли как

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1}(B_{m+1}(n)-B_{m+1}). \tag{12}$$

Действительно, по определению $S_m(n)$ и свойству многочленов Бернулли (9) получаем

$$S_m(n+1)-S_m(n) = n^m = \frac{1}{m+1}(B_{m+1}(n+1)-B_{m+1}(n)).$$

Это означает, что

$$S_m(n) = \frac{B_{m+1}(n)}{m+1} + C_m,$$

где константа C_m находится из условия $S_m(1)=0$, дающего $C_m=-\frac{B_{m+1}}{m+1}$. Так как

$$B_{m+1}(x) = \sum_{k=0}^{m+1}C_{m+1}^kB_kx^{m+1-k},$$

это доказывает и формулу Бернулли (1).

Расскажем теперь о других поистине мистических проявлениях чисел Бернулли.

2.1. Формулы Эйлера — Маклорена и Стирлинга

Начнём с замечательного открытия Леонарда Эйлера и его современника шотландского математика Колина Маклорена, что те же самые числа Бернулли появляются при суммировании значений любой (достаточно хорошей) функции! Более точно, имеет место следующая *формула суммирования Эйлера — Маклорена*

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{N} \frac{B_k}{k!}\bigl(f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)\bigr) + R_N, \qquad (13)$$

где $f^{(k)}(x)$ — это k-я производная функции $f(x)$, B_k — числа Бернулли, а остаток имеет вид

$$R_N = \frac{(-1)^{N+1}}{N!}\int_a^b B_N(x-[x])f^{(N)}(x)\,dx,$$

где $B_k(x)$ — многочлены Бернулли, а $[x]$ обозначает целую часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

Если мы применим эту формулу к функции $f(x) = x^m$ при $a = 0$, $b = n$, $N = m+1$, то, поскольку $(m+1)$-я производная x^m равна тождественно нулю, мы имеем $R_N = 0$ и как следствие формулу Бернулли (1).

Применим теперь формулу Эйлера — Маклорена к натуральному логарифму $f(x) = \ln x$ при $a = 1$, $b = n$, $N = 1$. Так как неопределённый интеграл $\int \ln x\,dx$ равен $x\ln x - x + C$, имеем

$$\int_1^n \ln x\,dx = n\ln n - n + 1,$$

так что

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln k = n\ln n - n + 1 - \frac{1}{2}\ln n + R_1(n),$$

где мы использовали, что $B_1 = -1/2$. Добавляя член $\ln n$ к обеим частям, получаем, что

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k = n\ln n - n + 1 + \frac{1}{2}\ln n + R_1(n), \quad n! = \sqrt{n}\Bigl(\frac{n}{e}\Bigr)^n e^{R_1(n)+1}.$$

Можно показать[2)] (см. например, [3, с. 521–529]), что

$$\lim_{n\to\infty} e^{R_1(n)+1} = \sqrt{2\pi},$$

[2)] Интересно, что Стирлинг не знал точного значения этого предела ещё несколько лет после его вычисления де Муавром [3, с. 521].

что приводит к одной из самых замечательных формул в математике — *формуле Стирлинга*, ещё одного шотландского математика XVIII века:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{14}$$

Здесь символ $\sim$ означает, что предел отношения левой и правой частей стремится к 1, когда n стремится к бесконечности. Сочетание чисел e, π с алгебраическим квадратным корнем объединяет в этой формуле анализ, геометрию и алгебру. Заметим, что квадратный корень из n происходит здесь из первого числа Бернулли!

2.2. Базельская проблема и значения дзета-функции

Поистине чудесным образом числа Бернулли появились и при решении Эйлером следующей знаменитой *Базельской проблемы*. Якоб Бернулли привлёк внимание к этой проблеме в 1698 году, не зная о более ранней работе 1650 года итальянского математика Пьетро Менголи, также содержащей этот вопрос. Проблема состоит в том, чтобы найти «в явном виде» сумму обратных квадратов всех натуральных чисел, т. е. в вычислении бесконечной суммы

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \dots$$

Проблема в частности предполагает, что такой явный вид возможен. И действительно, Эйлер показал, что это так, доказав, что

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Более того, Эйлер вычислил значения *дзета-функции*

$$\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

при всех целых чётных $s = 2m$, получив замечательную формулу

$$\zeta(2m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} = (-1)^{m-1} \frac{2^{2m-1}}{(2m)!} B_{2m} \pi^{2m}, \tag{15}$$

где B_{2m} — числа Бернулли! Узнав об этом замечательном открытии, учитель Эйлера Иоганн Бернулли сокрушался: «Вот если бы брат был жив…».

Гениальная идея Эйлера состояла в использовании следующего разложения котангенса $\operatorname{ctg} z$ на простые дроби по полюсам $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}.$$

А теперь вспомним формулу (6), из которой следует, что

$$z \operatorname{ctg} z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2z)^{2k}. \tag{16}$$

Сравнение двух последних формул даёт формулу Эйлера для значений дзета-функции (15) (проверьте!). Так как они очевидно положительны, мы, в частности, получаем доказательство чередуемости знаков чисел B_{2k}. А используя формулу Стирлинга, мы получаем асимптотику чисел Бернулли при больших k :

$$|B_{2k}| \sim 4\sqrt{\pi k}\Big(\frac{k}{\pi e}\Big)^{2k},$$

откуда видно, что они растут супер-экспоненциально!

Интересно, что про значения дзета-функции в нечётных натуральных числах практически ничего не известно, так что если бы Бернулли спросил, чему равна сумма

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} \ldots,$$

мы бы до сих пор не знали ответа… Гении знали, что спрашивать!

2.3. Арифметика чисел Бернулли

Уже числа

$$B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}$$

выглядят достаточно загадочно. Оказывается, что знаменатели чисел Бернулли $B_{2m} = p_{2m}/q_{2m}$ допускают следующее явное описание:

$$q_{2m} = \prod_{p-1|2m} p, \tag{17}$$

где справа стоит произведение по простым числам p, таким что $p-1$ делит $2m$. В частности, для $2m=10$ имеем произведение $2\times 3\times 11=66$, а для $2m = 12$ — произведение $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2730$.

Это вытекает из замечательной теоремы, доказанной в 1840 году независимо немецким математиком Карлом фон Штаудтом и датским математиком Томасом Клаузеном. Она утверждает, что сумма

$$B_{2m} + \sum_{p-1|2m} \frac{1}{p}$$

является целым числом (см. например, [4, с. 279–284]). В частности, для $2m = 10$ и $2m = 12$

$$\frac{5}{66} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{11} = 1, \quad -\frac{691}{2730} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13} = 1.$$

Все эти чудеса чисел Бернулли являются классическими и хорошо известны.

Я хочу теперь объяснить, как числа Бернулли естественно возникают в теории формальных групп, что проясняет их природу, а также их важную роль в алгебраической топологии.

§ 3. Формальные группы

Напомним, что *группой* называется множество G с операцией умножения: $x, y \to x * y \in G$, для которой выполнены следующие условия:

- *Ассоциативность*: для любых трёх элементов $x, y, z \in G$
$$x * (y * z) = (x * y) * z.$$
- *Существование единицы* e: для любого элемента $x \in G$
$$e * x = x * e = x.$$
- *Существование обратного*: для любого элемента $x \in G$ существует $x^{-1} \in G$, такой что
$$x * x^{-1} = x^{-1} * x = e.$$

Если при этом ещё $x * y = y * x$ для всех $x, y \in G$, то группа называется *коммутативной*.

Мы будем рассматривать *формальные коммутативные группы* с законом умножения
$$x * y = F(x, y) = x + y + \sum_{i,j>0} a_{ij} x^i y^j, \tag{18}$$
где x, y и коэффициенты $a_{ij} = a_{ji}$ будем для начала считать вещественными числами. Ряд здесь является формальным, т. е. никакой сходимости не предполагается, отсюда и название группы. Легко видеть, что 0 является единицей в такой группе, наличие обратного следует из общей теории формальных рядов. Основное свойство здесь ассоциативность, понимаемая как равенство формальных рядов
$$F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z)). \tag{19}$$
Теория таких групп была инициирована Нильсом Хенриком Абелем в 1826 году, который в частности показал, что ассоциативность влечёт в этом случае коммутативность.

Вот примеры таких законов умножения (проверьте условие ассоциативности!):
$$\text{(I)} \quad x * y = F_a := x + y + axy, \tag{20}$$
$$\text{(II)} \quad x * y = F_{a,b} := \frac{x + y + axy}{1 - bxy}. \tag{21}$$

Заметим, что этих примерах закон умножения не только формальный и задаёт операцию для всех (например, вещественных) чисел x, y в первом случае и для $bxy \neq 1$ во втором.

Покажем, что примеры (20) исчерпывают все полиномиальные формальные законы умножения вида

$$F(x,y) = x + y + \sum_{0<i,j\leqslant N} a_{ij} x^i y^j.$$

В самом деле, степень по z левой части соотношения ассоциативности (19) равна N, в то время как степень по z правой части равна N^2. Отсюда следует, что $N = 1$ и закон умножения имеет вид (20).

Можно показать также (см. например [2]), что примеры (21) исчерпывают все рациональные формальные законы умножения вида

$$F(x,y) = \frac{x + y + \sum\limits_{0<i,j\leqslant N} a_{ij} x^i y^j}{1 + \sum\limits_{0<i,j\leqslant M} b_{ij} x^i y^j}.$$

Определим *логарифм* формальной группы (18) как формальный ряд

$$\log_F(t) = t + \sum_{j>1} b_j t^i,$$

такой что

$$\log_F(x * y) = \log_F(F(x,y)) = \log_F(x) + \log_F(y). \tag{22}$$

Следуя Абелю [1], докажем, что логарифм формальной группы существует и единственен.

Введём формальный ряд

$$f(y) := \left.\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right|_{x=0} = 1 + \sum_{j>0} a_{1j} y^j.$$

Дифференцируя (22) по x и полагая $x = 0$, имеем

$$f(y) \log_F'(y) = \log_F'(0) = 1,$$

откуда

$$\log_F(y) = \int_0^y \frac{dt}{f(t)}. \tag{23}$$

Обратно, зададим $\log_F(y) =$ формулой (23) и докажем условие (22). При $x = 0$ оно очевидно выполняется. Докажем теперь, что производ-

ные по x обеих частей (22) совпадают, т. е.

$$\log_F'(F(x,y))\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \log_F'(x),$$

или, с учётом (23),

$$f(x)\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = f(F(x,y)). \tag{24}$$

Воспользуемся свойством ассоциативности $F(F(t,x),y) = F(t,F(x,y))$. Дифференцируя это равенство по t и полагая $t=0$, получаем (24), что и требовалось доказать.

Продемонстрируем это на примере $F(x,y) = x+y+axy$:

$$f(y) = \left.\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right|_{x=0} = 1+ay,$$

что даёт соответствующий логарифм

$$\log_F(y) = \int_0^y \frac{dt}{1+at} = \frac{1}{a}\ln(1+at) = \sum_{j\geqslant 0}\frac{a^j}{j+1}y^{j+1}. \tag{25}$$

Определим теперь *экспоненту* формальной группы (18) как формальный ряд $\exp_F(u) = u + \ldots$, обратный к логарифму:

$$\exp_F(\log_F(t)) \equiv t, \quad \log_F(\exp_F(u)) \equiv u.$$

Экспонента обладает следующим характеристическим свойством:

$$\exp_F(u+v) = F(\exp_F(u), \exp_F(v)). \tag{26}$$

В предыдущем примере

$$\exp_F(u) = \frac{e^{au}-1}{a} = \sum_{j\geqslant 0}\frac{a^j}{(j+1)!}y^{j+1}. \tag{27}$$

Обратите внимание на появление факториала в знаменателе экспоненты; это важное отличие экспоненты от логарифма как формального ряда.

Ещё один поучительный пример рациональной группы с $a=0$, $b=1$:

$$F = \frac{x+y}{1-xy}.$$

Экспонентой в этом случае является $\exp_F(u) = \operatorname{tg} u$, который как известно удовлетворяет теореме сложения

$$\operatorname{tg}(u+v) = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1-\operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}.$$

Соответственно, логарифмом является

$$\log_F(t) = \operatorname{arctg} t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} t^{2n-1}.$$

А вот какой формальный ряд у обратной функции — тангенса, знают немногие:

$$\operatorname{tg} u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n (1-4^n)}{(2n)!} B_{2n} u^{2n-1}, \tag{28}$$

где B_{2n} — числа Бернулли! Для доказательства воспользуемся следующей формулой:

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{ctg} u - 2 \operatorname{ctg} 2u,$$

вытекающей из формулы удвоения для котангенса

$$\operatorname{ctg} 2u = \frac{\operatorname{ctg}^2 u - 1}{2 \operatorname{ctg} u} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} u - \frac{1}{2 \operatorname{ctg} u}.$$

Теперь формула (28) следует из уже известной нам формулы (16). Это ещё одно замечательное свойство чисел Бернулли, определяющих степенные ряды как самой функции, так и её обратной (по умножению).

Приведём теперь явную формулу для экспоненты в общем случае рациональной группы с произвольными параметрами a и b.

Пусть λ_1, λ_2 — (вообще говоря, комплексные) корни квадратного уравнения $\lambda^2 - a\lambda + b = 0$, $D := a^2 - 4b$ — дискриминант этого уравнения, $\mu := \sqrt{D}$, так что $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a \pm \mu)$. Тогда в предположении, что $D \neq 0$, нетрудно показать, что экспонента формальной группы (21) задаётся формулой

$$\exp_{a,b}(u) := \frac{e^{\lambda_1 u} - e^{\lambda_2 u}}{\lambda_1 e^{\lambda_2 u} - \lambda_2 e^{\lambda_1 u}} = \frac{e^{\mu u} - 1}{\lambda_1 - \lambda_2 e^{\mu u}}. \tag{29}$$

В частности, для $a = 0$, $b = 1$ получаем $\mu = 2i$, $\lambda_{1,2} = \pm i$ и экспоненту

$$\frac{1}{i} \frac{e^{2iu} - 1}{1 + e^{2iu}} = \frac{1}{i} \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{e^{iu} + e^{-iu}} = \operatorname{tg} u.$$

В случае, когда $D = a^2 - 4b = 0$, экспонента имеет простой вид

$$\exp_F(u) = \frac{u}{1 - \frac{a}{2} u}. \tag{30}$$

В частности, для формальной группы с законом умножения

$$x * y = \frac{x + y - 2xy}{1 - xy} \tag{31}$$

получаем $\exp_F(u) = u/(1+u)$.

§ 4. Роды Хирцебруха в топологии и числа Бернулли

Назовём *рядом Хирцебруха* формальной группы (18) ряд

$$h_F(u) = \frac{u}{\exp_F(u)}. \tag{32}$$

Любой формальный ряд

$$h(u) = 1 + \sum_{j>0} h_j u^j$$

определяет топологическую характеристику $\chi_h(M^{2n})$ комплексного многообразия M^{2n}, называемую *родом Хирцебруха*.

В 1950-х годах немецкий математик Фридрих Хирцебрух сделал замечательное открытие, что роды, отвечающие некоторым специальным рядам, играют очень важную роль в топологии и алгебраической геометрии [5].

Для читателей, знакомых с теорией характеристических классов из алгебраической топологии [6], роды Хирцебруха [5] задаются интегралом

$$\chi_h(M^{2n}) = \int\limits_{M^{2n}} \prod_{j=1}^{n} h(t_j), \tag{33}$$

где t_j определяются равенством

$$c(M^{2n}) = \prod_{j=1}^{n} (1 + t_j),$$

а $c(M^{2n}) = 1 + c_1(M^{2n}) + \ldots + c_n(M^{2n})$ — полный класс Черна касательного расслоения M^{2n}. Для остальных скажем, что это даёт далеко идущее обобщение *эйлеровой характеристики* многообразия, определяемой в случае поверхности M^2 как

$$\chi(M^2) = V - E + F,$$

где V, E, F — числа вершин, рёбер и треугольников для некоторого разбиения поверхности. То, что это число не зависит от выбора разбиения (при некоторых условиях простоты на области) и тем самым определяет топологическую характеристику поверхности, является замечательным результатом Эйлера, положившим начало топологии как области математики. Он обычно формулируется для выпуклых многогранников в виде

$$V - E + F = 2,$$

где V, E, F — числа вершин, рёбер и граней многогранника. Это означает, что эйлерова характеристика двумерной сферы равна 2.

Формулы Хирцебруха можно рассматривать как далеко идущие обобщения формулы Гаусса — Бонне из дифференциальной геометрии поверхностей

$$\int\limits_{M^2} K\, d\sigma = 2\pi\chi(M^2),$$

выражающей интеграл от гауссовой кривизны K поверхности через её эйлерову характеристику.

С точки зрения теории формальных групп, специальные роды Хирцебруха отвечают рядам Хирцебруха рациональных формальных групп. Посмотрим повнимательнее на соответствующие ряды в случае, когда $D \neq 0$:

$$h_{a,b}(u) := \frac{u}{\exp_{a,b}}(u) = \frac{u(\lambda_1 - \lambda_2 e^{\mu u})}{e^{\mu u} - 1} = -\lambda_2 u + \frac{\mu u}{e^{\mu u} - 1}.$$

Мы видим, что за исключением линейного члена всё сводится к разложению в ряд Тэйлора функции

$$\beta(z) = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Мы видим также особую роль первого коэффициента в формуле для ряда Хирцебруха, которую можно теперь записать как

$$h_{a,b}(u) = -\lambda_2 u + \frac{\mu u}{e^{\mu u} - 1} = -\lambda_2 u + \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n B_n \frac{u^n}{n!} \tag{34}$$

или, используя нашу символику, как

$$h_{a,b}(u) = -\lambda_2 u + e^{\mu \mathscr{B} u}.$$

Это объясняет загадочное появление чисел Бернулли во многих формулах в алгебраической топологии, в частности, для так называемой сигнатуры и рода Тодда алгебраических многообразий [5].

Эйлерова характеристика отвечает вырожденному случаю закона умножения (31) с нулевым дискриминантом, когда ряд Хирцебруха обрывается на первом члене: $h_F(u) = 1 + u$, так что здесь числа Бернулли не видны.

А вот род Тодда, появляющийся в фундаментальной теореме Римана — Роха — Хирцебруха и формуле Атьи — Зингера для индекса, отвечает полиномиальной формальной группе с законом умножения

$$x * y = F(x, y) = x + y - xy$$

и рядом Хирцебруха

$$h_F(u) = \frac{u}{1 - e^{-u}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n \frac{u^n}{n!} = u + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{u^n}{n!}.$$

В классической формуле Хирцебруха [5] для сигнатуры многообразий появляется L-род, отвечающий закону умножения

$$x * y = F(x, y) = \frac{x + y}{1 + xy},$$

который задаёт закон сложения для гиперболического тангенса, и ряду Хирцебруха

$$h_F(u) = \frac{u}{\operatorname{th} u} = u \operatorname{cth} u = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} B_{2n} \frac{u^{2n}}{(2n)!}$$

(см. выше формулу (6)).

Наконец, самый общий рациональный закон умножения

$$x * y = F_{a,b} := \frac{x + y + axy}{1 - bxy}$$

отвечает знаменитому χ_y-роду Хирцебруха [5].

А именно, следуя Хирцебруху, положим без ограничения общности в формуле (34) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = y$ и получим ряд Хирцебруха

$$h_y(u) = \frac{u(1 + ye^{-u(1+y)})}{1 - e^{-u(1+y)}} = -yu + \frac{u(y+1)}{1 - e^{-u(1+y)}} = -yu + \sum_{n=0}^{\infty} (y+1)^n B_n \frac{u^n}{n!},$$

что отвечает в обозначениях Хирцебруха функции $Q(y; u)$ (см. [5, с. 29]). Соответствующий χ_y-род задает альтернированные суммы чисел Ходжа алгебраических многообразий и является мощным средством для их вычисления. Род Тодда и L-род являются частными случаями, отвечающими $y = 0$ и $y = 1$.

В заключение скажем, что важная роль формальных групп в алгебраической топологии (и, в частности, в теории комплексных кобордизмов), впервые была прояснена в работах С. П. Новикова и его школы [7], но обсуждение этой глубокой связи выходит далеко за пределы нашей статьи.

Список литературы

[1] *Abel N. H.* Recherche des fonctions de deux quantités variables indépendantes x et y, telles que $f(x, y)$, qui ont la propriété que $f(z, f(x, y))$ est une fonction symétrique de z, x et y // Crelle's Journal, 1826. OEuvres completes, I. Christiania (1881). P. 61–65.

[2] *Coleman R. F.*, *McGuinness F. O.* Rational formal group laws // Pacific Journal of Mathematics. 1991. Vol. 147, № 1. P. 25–27.

[3] *Кнут Д.*, *Грэхем Р.*, *Паташник О.* Конкретная математика. Основания информатики. М.: Бином, 2009.

[4] *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: ГИФМЛ, 1959.

[5] *Хирцебрух Ф.* Топологические методы в алгебраической геометрии. М.: Мир, 1973.

[6] *Милнор Дж.*, *Сташеф Дж.* Характеристические классы. М.: Мир, 1979.

[7] *Бухштабер В. М.*, *Мищенко А. С.*, *Новиков С. П.* Формальные группы и их роль в аппарате алгебраической топологии // УМН. 1971. Т. 26, вып. 2. С. 131–154.

Александр Петрович Веселов, Loughborough University,
Лафборо, Великобритания

A.P.Veselov@lboro.ac.uk