

Об уравнении Эйлера $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ и тройках Рамануджана

Н. Н. Осипов, А. В. Савватеев

Когда сумма трех кубов целых чисел может оказаться равной единице? В статье рассказывается об экспоненциальных тройках (x_n, y_n, z_n) С. Рамануджана и других бесконечных сериях целочисленных решений уравнения Л. Эйлера $x^3 + y^3 + z^3 = 1$, уже полиномиального типа, впервые найденных К. Малером и позднее обобщенных Д. Лемером.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, никакой куб целого числа нельзя нетривиальным образом представить в виде суммы двух таких кубов (это частный случай хорошо известной *великой теоремы Ферма*). А что будет, если брать суммы трех кубов целых чисел? Здесь уже есть нетривиальные примеры типа неожиданного равенства

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3, \quad (0.1)$$

обнаруженного Л. Эйлером (1770). Более того, таких примеров даже бесконечно много. Ясно, что задача описания всех равенств

$$a^3 + b^3 + c^3 = d^3$$

с целыми числами a, b, c, d эквивалентна решению диофантова уравнения (называемого далее *уравнением Эйлера*)

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

в рациональных числах. Обычно диофантовы уравнения с тремя и более неизвестными решаются с большим трудом (а чаще вообще никак

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075–02–2024–1429).

А. В. Савватеев выражает исключительную признательность Кавказскому математическому центру Адыгейского государственного университета за финансовую поддержку во время работы над статьей.

не решаются), однако в случае уравнения Эйлера есть сравнительно простой способ найти все тройки (x, y, z) рациональных чисел, которые ему удовлетворяют. Таких троек существует целое бесконечное семейство, которое можно описать несложными формулами с двумя свободными параметрами (см. ниже предложение 4).

Уравнение Эйлера можно также решать в целых числах, но здесь ответ уже не записывается в столь простой явной форме.

Это явление хорошо известно в теории диофантовых уравнений: если уравнение удастся решить в рациональных числах и решений оказывается бесконечно много, то выискивать среди них все решения в целых числах зачастую не проще, чем непосредственно решать исходное уравнение в целых числах. Вот пример, на котором данное явление можно прочувствовать. Все рациональные точки кривой $x^3 - x^2y - y^3 - xy = 0$ описываются формулами

$$x = -\frac{t}{t^3 + t - 1}, \quad y = -\frac{t^2}{t^3 + t - 1}, \quad (0.2)$$

где t — произвольное рациональное число (это простой и элементарно доказываемый факт). В то же время, целые точки данной кривой — это только $(x, y) \in \{(-1, -1), (0, 0), (18, 12)\}$, но попытка отыскать их по формулам (0.2) приведет к необходимости решать так называемые уравнения Туэ (см., например, [5, гл. IV]), элементарные методы решения которых неизвестны.

Тем не менее, можно относительно легко предъявить однопараметрическое семейство решений (3.6) полиномиального типа, впервые обнаруженное К. Малером (см. [16]). Позднее Д. Лемер [15] привел и другие примеры полиномиальных семейств решений, которых оказалось даже бесконечно много. Более того, Лемер указал простой способ, с помощью которого можно получать однопараметрические семейства решений в целых числах, однако зависимость от параметра в этих семействах является уже экспоненциальной. Следует отметить, что задолго до Лемера пример такого экспоненциального семейства решений, причем в довольно экзотической форме, обнаружил С. Рамануджан (см. с. 341 в книге [21]).

В настоящей статье мы хотим подробно рассказать об этих результатах про уравнение Эйлера (и вокруг него), к исследованию которого причастны многие выдающиеся математики. Кроме того, мы дополним результат Лемера, касающийся однопараметрических семейств решений полиномиального типа, а также укажем на одну небольшую неточность в его статье [15]. Эту неточность удалось обнаружить благодаря современным средствам символьных вычислений, которые мы

задействовали для проверки корректности решения некоторых сопутствующих диофантовых уравнений 2-й степени с двумя неизвестными, упоминаемых в статье Лемера. В наше время подобная практика — применять для разного рода вычислений *системы компьютерной алгебры* — кажется совершенно естественной, но во времена Малера и Лемера (первая половина XX века) это было невозможно.

Попутно мы рассматриваем некоторое семейство кубических кривых, связанное с уравнением Эйлера (см. § 2, формула (2.1)). Представленные здесь результаты (относящиеся скорее к элементарной алгебраической геометрии, чем к диофантовым уравнениям) почти не связаны с остальными результатами, излагаемыми в статье, но могут быть интересны сами по себе. Идея рассмотреть подобное семейство кривых возникла при изучении специальной эллиптической кривой, заданной уравнением

$$a^3 + b^3 + c^3 = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^3 \quad (0.3)$$

в однородных координатах $[a : b : c]$.

Кривая (0.3) содержит точку $[3 : 4 : 5]$ (что сразу следует из равенства Эйлера (0.1)), а также бесконечно много других рациональных точек.

Вот набросок элементарного доказательства последнего утверждения (пример подобного, но более детализированного рассуждения читатель может найти, например, в статье [19]). Положим $c = 1$ и сделаем замену $a = (u + v)/2$, $b = (u - v)/2$. Тогда кривая (0.3) запишется в виде

$$u^3 + 6uv^2 - 3u^2 - 3u + 7 = 0. \quad (0.4)$$

Стартуя с точки $(u_0, v_0) = (7/5, -1/5)$, лежащей на кривой (0.4), определим последовательность точек (u_j, v_j) рекуррентной формулой $(u_{j+1}, v_{j+1}) = \Phi(u_j, v_j)$, где

$$\Phi(u, v) = \left(\frac{4u(u^3 - 3u^2 - 3u + 7)}{3u^4 - 8u^3 + 6u^2 + 7}, \frac{u^6 + 30u^5 - 105u^4 + 140u^3 - 105u^2 - 42u + 49}{12uv(3u^4 - 8u^3 + 6u^2 + 7)} \right).$$

Эта громоздкая формула имеет простой геометрический смысл: если точка (u, v) принадлежит кривой (0.4), то $\Phi(u, v)$ — это вторая точка пересечения касательной, проведенной к этой кривой в точке (u, v) , с этой же кривой. В частности, все точки (u_j, v_j) оказываются лежащими на кривой (0.4). Далее можно показать, что все эти точки попарно различны (ввиду того, что знаменатели рациональных чисел u_j в несократимом представлении строго возрастают).

Поскольку при изложении основных результатов статьи мы часто будем апеллировать к теории уравнений Пелля (и, вообще, теории

диофантовых уравнений 2-й степени с двумя неизвестными), для удобства читателя в § 1 приводятся необходимые для дальнейшего факты из этой теории. Более подробное изложение можно найти, например, в книге [8] (см. также небольшое по объему, но довольно содержательное учебное пособие [7] или главу «Уравнения Пелля» в книге [4]).

§ 1. ОБ УРАВНЕНИЯХ ПЕЛЛЯ

Обычно под *уравнением Пелля* подразумевают уравнение вида

$$x^2 - Ay^2 = 1, \quad (1.1)$$

где A — натуральное число, не являющееся точным квадратом. Мы же этот термин будем использовать для уравнений более общего вида

$$x^2 - Ay^2 = B, \quad (1.2)$$

где $B \neq 0$ — целое число, а уравнение (1.1) при этом называть *классическим уравнением Пелля*.

Можно, конечно, задаться вопросом, как быть с уравнением (1.2) в случае, когда A является точным квадратом. Но это легкий вопрос: ввиду того, что левая часть уравнения в этом случае разлагается на множители с целыми коэффициентами, он сводится к нахождению всех делителей числа $B \neq 0$. В частности, множество решений всегда будет конечным.

Решая уравнение Пелля в целых числах, удобно под решением понимать не только пару (x, y) целых чисел, удовлетворяющих уравнению (1.2), но и одно вещественное число $x + y\sqrt{A}$ (такое соответствие взаимно однозначно из-за иррациональности $\sqrt{A}$). Теория уравнений Пелля базируется на следующей фундаментальной связи между уравнением (1.2) и *ассоциированным* с ним (т. е. с тем же коэффициентом A) уравнением (1.1): если $x + y\sqrt{A}$ — некоторое решение уравнения (1.2), $x_0 + y_0\sqrt{A}$ — одно из решений уравнения (1.1), то их произведение

$$(x + y\sqrt{A})(x_0 + y_0\sqrt{A}) = (xx_0 + Ayy_0) + (xy_0 + yx_0)\sqrt{A}$$

будет еще одним решением уравнения (1.2).

Другой фундаментальный факт теории относится к классическим уравнениям Пелля (1.1): все они нетривиально разрешимы, т. е. имеют решения, отличные от $(\pm 1, 0)$. Далее через

$$\varepsilon = x_0 + y_0\sqrt{A} \quad (1.3)$$

мы будем обозначать *минимальное* (с наименьшими натуральными x_0, y_0) решение этого уравнения. Все решения уравнения (1.1) можно

описать простой формулой

$$x + y\sqrt{A} = \pm \varepsilon^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В частности, уравнение (1.1) имеет бесконечно много решений в целых числах. Как следствие, любое частное решение $X + Y\sqrt{A}$ уравнения Пелля (1.2) может быть «размножено» до бесконечной серии решений вида

$$x + y\sqrt{A} = \pm(X + Y\sqrt{A})\varepsilon^n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.4)$$

Множество решений уравнения (1.2) в целых числах описывается более сложным образом: оно состоит, вообще говоря, из нескольких бесконечных серий решений типа (1.4), а именно:

$$x + y\sqrt{A} = \pm(X_j + Y_j\sqrt{A})\varepsilon^n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.5)$$

Здесь $X_j + Y_j\sqrt{A}$ — так называемые *базисные решения* уравнения (1.2), ε — минимальное решение (1.3) ассоциированного уравнения (1.1). Еще один фундаментальный факт теории утверждает, что множество базисных решений всегда конечно (быть может, пусто).

Формально базисное решение $X + Y\sqrt{A}$ уравнения (1.2) можно определить как удовлетворяющее двойному неравенству

$$q \leq X + Y\sqrt{A} < q\varepsilon,$$

где $q > 0$ — некоторое фиксированное число. Теоретически q можно брать произвольным (например, в книге [4] взято $q = 1$), но для поиска базисных решений методом brute force оптимальным оказывается выбор $q = q_{\text{opt}}$, где

$$q_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{|B|}{\varepsilon}}.$$

При $q = q_{\text{opt}}$ базисные решения $X + Y\sqrt{A}$ можно найти из следующих явных условий (см., например, [8, разд. 4.4.5]):

1) если $B > 0$, то

$$-\sqrt{\frac{B(x_0 - 1)}{2A}} \leq Y < \sqrt{\frac{B(x_0 - 1)}{2A}}, \quad X = \sqrt{AY^2 + B};$$

2) если $B < 0$, то

$$\sqrt{\frac{|B|}{A}} \leq Y < \sqrt{\frac{|B|(x_0 + 1)}{2A}}, \quad X = \pm \sqrt{AY^2 + B},$$

а также

$$Y = \sqrt{\frac{|B|(x_0 + 1)}{2A}}, \quad X = -\sqrt{AY^2 + B}.$$

Можно показать, что если $q \neq q_{\text{opt}}$, то интервал перебора для Y будет шире, чем в случае $q = q_{\text{opt}}$.

Очевидно, если $|B|$ или x_0 велики, то такой переборный метод поиска базисных решений практически нереализуем.

Следует отметить, что минимальное решение $\varepsilon = x_0 + y_0\sqrt{A}$ классического уравнение Пелля (1.1) может оказаться довольно большим даже в случае небольшого A . Так, например, при $A = 61$ имеем

$$\varepsilon = 1766319049 + 226153980\sqrt{61}.$$

Более общий пример: если $A = 5^{2k-1}$, то

$$\varepsilon = (9 + 4\sqrt{5})^{5^{k-1}},$$

где k — любое натуральное число (читателю предлагается доказать в качестве упражнения).

Тем не менее, техника базисных решений может оказаться полезной при исследовании *параметрических* уравнений Пелля (когда коэффициенты A и B зависят от параметра d , пробегающего бесконечный ряд значений). Приведем один иллюстрирующий пример.

ПРИМЕР 1. Докажем, что при любом целом $d \geq 2$ уравнение Пелля

$$x^2 - (d^2 + 2)y^2 = -3 \tag{1.6}$$

неразрешимо в целых числах x , y .

Здесь важно, что для минимального решения (x_0, y_0) ассоциированного классического уравнения Пелля есть простая формула при любом $d \geq 1$, а именно,

$$(x_0, y_0) = (d^2 + 1, d),$$

при этом x_0 не слишком сильно растет с ростом d .

Нетрудно убедиться, что пара $(d^2 + 1, d)$ является решением соответствующего классического уравнения Пелля. Предположим, что оно не минимально, т. е. $(x_0, y_0) \neq (d^2 + 1, d)$. Тогда

$$d^2 + 1 + d\sqrt{d^2 + 2} = (x_0 + y_0\sqrt{d^2 + 2})^n$$

для некоторого целого $n \geq 2$. Имеем

$$y_0 \geq 1 \quad \text{и} \quad x_0 = \sqrt{(d^2 + 2)y_0^2 + 1} \geq \sqrt{d^2 + 3} > d,$$

так что

$$d^2 + 1 + d\sqrt{d^2 + 2} = (x_0 + y_0\sqrt{d^2 + 2})^n \geq (x_0 + y_0\sqrt{d^2 + 2})^2 > (d + \sqrt{d^2 + 2})^2.$$

Но неравенство

$$d^2 + 1 + d\sqrt{d^2 + 2} > (d + \sqrt{d^2 + 2})^2$$

невозможно ни при каком $d \geq 1$.

Теперь для базисных решений $X + Y\sqrt{d^2 + 2}$ уравнения (1.6) имеем

$$0 < Y \leq \sqrt{\frac{|B|(x_0 + 1)}{2A}} = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

откуда находим единственное возможное значение $Y = 1$. Но тогда

$$X^2 = (d^2 + 2)Y^2 - 3 = d^2 - 1,$$

и видно, что при $d \geq 2$ такого целого X не существует. Следовательно, базисных решений нет, а значит, уравнение (1.6) неразрешимо при любом $d \geq 2$.

Для контраста приведем также пример параметрического уравнения Пелля, когда подобные рассуждения будут безуспешны:

$$x^2 - (d^2 + d)y^2 = d^3 + 2d + 2$$

(найдено по ссылке [27]). Здесь $x_0 = 2d + 1$ (что лучше, чем в примере 1), однако правая часть $B = d^3 + 2d + 2$ слишком сильно растет с ростом d , что не позволяет ограничить Y равномерно по d . Очевидно, таких примеров можно привести много.

В заключение скажем несколько слов о решении общего уравнения 2-й степени

$$au^2 + buv + cv^2 + du + ev + f = 0 \quad (1.7)$$

с двумя неизвестными u, v в целых числах. С теоретической точки зрения наиболее интересен случай, когда уравнение (1.7) геометрически задает *гиперболу*, причем число $A = b^2 - 4ac > 0$ (дискриминант квадратичной формы в левой части (1.7)) не является точным квадратом.

Во всех остальных случаях (когда уравнение (1.7) задает эллипс или параболу, а также когда оно задает гиперболу, но дискриминант A есть точный квадрат) исследование будет проще в том смысле, что можно обойтись без теории уравнений Пелля.

Считая $a \neq 0$, уравнение (1.7) *методом Лагранжа* можно привести к виду (1.2), где

$$B = (bd - 2ae)^2 - (b^2 - 4ac)(d^2 - 4af) \neq 0,$$

при этом

$$x = (b^2 - 4ac)v + bd - 2ae, \quad y = 2au + bv + d.$$

Тогда любое решение (u, v) уравнения (1.7) находится по формулам

$$u = \frac{-bx + (b^2 - 4ac)y - 2a(be - 2dc)}{2a(b^2 - 4ac)}, \quad v = \frac{x - bd + 2ae}{b^2 - 4ac},$$

где (x, y) — решение уравнения (1.2), удовлетворяющее системе сравнений

$$\begin{cases} x \equiv bd - 2ae \pmod{b^2 - 4ac}, \\ -bx + (b^2 - 4ac)y \equiv 2a(be - 2dc) \pmod{2a(b^2 - 4ac)}. \end{cases}$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнения (1.2) и отбору нужных решений. Последнее, хотя бы теоретически, можно осуществить, опираясь на *периодичность* решений $x + y\sqrt{A}$ из каждой серии (1.5) по любому заранее заданному модулю m (в нашем случае речь идет о модуле $m = 2a(b^2 - 4ac)$). Эта периодичность, в свою очередь, следует из существования такого натурального числа $K = K(m)$, что

$$\varepsilon^K \equiv 1 \pmod{m}$$

(читателю предлагается доказать в качестве упражнения; сравнение квадратичных иррациональностей по модулю m здесь следует понимать «покоординатно», т. е. $x + y\sqrt{A} \equiv x' + y'\sqrt{A} \pmod{m}$ означает одновременное выполнение сравнений $x \equiv x' \pmod{m}$ и $y \equiv y' \pmod{m}$). Предлагаемый способ решения уравнения (1.7) не всегда удобен практически, но он позволяет сделать важный качественный вывод: если на гиперболе (1.7) лежит хотя бы одна целая точка, то таких точек на ней бесконечно много.

Пример 2. В качестве иллюстрации решим уравнение

$$21u^2 + 43uv + 21v^2 + 16u + 16v + 4 = 0 \quad (1.8)$$

в целых числах. Здесь разумно отступить от общей схемы и сделать замену неизвестных $x = (u + v)/2$, $y = (u - v)/2$. Тогда уравнение (1.8) примет вид

$$85x^2 + 32x + 4 - y^2 = 0.$$

Если теперь положить $z = 85x + 16$, то получим

$$z^2 - 85y^2 = -84. \quad (1.9)$$

Нас интересуют те решения (z, y) уравнения (1.9), для которых

$$z \equiv 16 \pmod{85}. \quad (1.10)$$

Минимальное решение соответствующего классического уравнения Пелля есть

$$\varepsilon = 285769 + 30996\sqrt{85},$$

а множество базисных решений уравнения (1.9) — это

$$\{(\pm 1, 1), (\pm 16, 2), (\pm 101, 11), (\pm 341, 37), (\pm 424, 46), (\pm 1429, 155)\}.$$

Пусть $\varepsilon^n = S_n + T_n \sqrt{85}$. Поскольку $S_1 = 285769 \equiv -1 \pmod{85}$, индукцией по n нетрудно показать, что для любого $n \in \mathbb{Z}$ имеет место сравнение

$$S_n \equiv (-1)^n \pmod{85}.$$

Отсюда следует, что условию (1.10) удовлетворяют только решения (z, y) , получаемые из следующих шести серий:

$$z + y\sqrt{85} = \begin{cases} (16 \pm 2\sqrt{85})(-\varepsilon)^n, \\ (101 \pm 11\sqrt{85})(-\varepsilon)^n, \\ (-1429 \pm 155\sqrt{85})(-\varepsilon)^n, \end{cases}$$

где в каждой серии $n \in \mathbb{Z}$. Далее можно обнаружить, что $\varepsilon = \varepsilon_1^3$, где

$$\varepsilon_1 = \frac{83 + 9\sqrt{85}}{2}.$$

Это позволяет объединить указанные шесть серий в две серии:

$$z + y\sqrt{85} = (16 \pm 2\sqrt{85})(-\varepsilon_1)^n. \quad (1.11)$$

Все решения (u, v) уравнения (1.8) теперь можно найти по формулам

$$u = \frac{z + 85y - 16}{85}, \quad v = \frac{z - 85y - 16}{85}.$$

Если в формуле (1.11) взять знак «плюс», то получим половину решений $(u, v) = (u_n, v_n)$, где

$$u_n = \frac{1}{85} \left((93 + 9\sqrt{85})(-\varepsilon_1)^n + (93 - 9\sqrt{85})(-\varepsilon_1)^{-n} - 16 \right),$$

$$v_n = \frac{1}{85} \left((-77 - 7\sqrt{85})(-\varepsilon_1)^n + (-77 + 7\sqrt{85})(-\varepsilon_1)^{-n} - 16 \right).$$

Выбор знака «минус» даст симметричную половину $(u, v) = (v_{-n}, u_{-n})$.

§ 2. СЕМЕЙСТВО КРИВЫХ $C_{(\alpha, \beta, \gamma)}$

На комплексной проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$ рассмотрим семейство кривых $C_{(\alpha, \beta, \gamma)}$, заданных уравнением

$$a^3 + b^3 + c^3 = (\alpha a + \beta b + \gamma c)^3 \quad (2.1)$$

в однородных координатах $[a : b : c]$ (первоначальные сведения об алгебраических кривых читатель может найти в книгах [6, гл. III] или [3, гл. 2]). Тройку параметров $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ будем предполагать отличной от $(0, 0, 0)$.

Предложение 1. Уравнение (2.1) является приводимым над $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда в тройке (α, β, γ) куб одной из компонент равен единице, а кубы двух других компонент равны.

Доказательство. Однородный многочлен

$$F(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - (\alpha a + \beta b + \gamma c)^3$$

может разлагаться в произведение только однородных многочленов.

При $c = 0$ имеем

$$F(a, b, 0) = a^3 + b^3 - (\alpha a + \beta b)^3 \neq 0,$$

поэтому можно положить, например, $c = 1$ и далее выяснять, когда многочлен

$$f(a, b) = F(a, b, 1) = a^3 + b^3 + 1 - (\alpha a + \beta b + \gamma)^3$$

будет разложим над $\mathbb{C}$. Поскольку $\deg f(a, b) = 3$, в случае разложимости одним из сомножителей обязан быть линейный многочлен, при этом возможны два случая.

1. При некотором $k \in \mathbb{C}$ многочлен $f(k, b) \in \mathbb{C}[b]$ есть тождественно нулевая функция. Тогда все его коэффициенты должны быть нулевыми, т. е.

$$1 - \beta^3 = 0, \quad \beta^2(k\alpha + \gamma) = 0, \quad \beta(k\alpha + \gamma)^2 = 0, \quad k^3 + 1 = (k\alpha + \gamma)^3,$$

откуда находим $\beta^3 = 1$, $k\alpha + \gamma = k^3 + 1 = 0$ и, следовательно, $\alpha^3 = \gamma^3$.

2. При некоторых $k, l \in \mathbb{C}$ многочлен $f(a, ka + l) \in \mathbb{C}[a]$ задает тождественно нулевую функцию. Тогда

$$k^3 + 1 = (k\beta + \alpha)^3, \quad l^3 + 1 = (l\beta + \gamma)^3, \quad (2.2)$$

$$(l\beta + \gamma)(k\beta + \alpha)^2 = k^2l, \quad (l\beta + \gamma)^2(k\beta + \alpha) = kl^2. \quad (2.3)$$

Если $k^3 + 1 = 0$, то $k\beta + \alpha = 0$, $l = 0$, откуда находим $\gamma^3 = 1$ и $\alpha^3 = \beta^3$. Если $l^3 + 1 = 0$, то аналогично получим $\alpha^3 = 1$ и $\beta^3 = \gamma^3$. Предположим, что $k^3 + 1 \neq 0$ и $l^3 + 1 \neq 0$. Тогда $k\beta + \alpha \neq 0$ и $l\beta + \gamma \neq 0$. Разделив первое из равенств (2.3) на второе, получим

$$\frac{k\beta + \alpha}{l\beta + \gamma} = \frac{k}{l},$$

откуда

$$l\beta + \gamma = \frac{l}{k} \cdot (k\beta + \alpha)$$

и далее

$$\frac{l}{k} \cdot (k\beta + \alpha)^3 = k^2l.$$

Значит, $(k\beta + \alpha)^3 = k^3$ и, как следствие, $k^3 + 1 = k^3$, что невозможно.

В явном виде разложение многочлена $f(a, b)$ в случае $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \alpha, 1)$ будет приведено далее (см. тождество (3.1)). $\square$

Если бы в случае $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Q}^3$ мы исследовали вопрос о приводимости уравнения (2.1) над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то при доказательстве предложения 1 можно было бы «махнуть дубинкой» — для анализа уравнений (2.2) применить великую теорему Ферма для показателя 3, согласно которой все рациональные точки кривой $x^3 + y^3 = 1$ суть $(x, y) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$.

Пусть есть еще одна тройка параметров $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, но с ограничением

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1. \quad (2.4)$$

Рассмотрим подсемейство кривых $C_{(\alpha, \beta, \gamma)}$, определяемое условием

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 1. \quad (2.5)$$

Пусть $P = [x : y : z]$. Тогда $P \in C_{(\alpha, \beta, \gamma)}$ и, в частности, $P \in C_{(x^2, y^2, z^2)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть для троек параметров (α, β, γ) и (x, y, z) выполнены условия (2.4) и (2.5).

(а) Проведем через точку $P = [x : y : z]$ касательную к кривой $C_{(\alpha, \beta, \gamma)}$ и предположим, что она (касательная) пересекает кривую $C_{(\alpha, \beta, \gamma)}$ в точке $Q \neq P$. Тогда Q лежит на кривой $C_{(x^2, y^2, z^2)}$.

(б) Точка $P = [x : y : z]$ является особой точкой кривой $C_{(x^2, y^2, z^2)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Уравнение касательной в точке $P = [x : y : z]$ имеет вид

$$k_a(a - x) + k_b(b - y) + k_c(c - z) = 0, \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} k_a &= \frac{\partial}{\partial a} (a^3 + b^3 + c^3 - (\alpha a + \beta b + \gamma c)^3) \Big|_{[a:b:c]=P} = \\ &= 3a^2 - 3\alpha(\alpha a + \beta b + \gamma c)^2 \Big|_{[a:b:c]=P} = 3x^2 - 3\alpha \end{aligned}$$

и аналогично $k_b = 3y^2 - 3\beta$, $k_c = 3z^2 - 3\gamma$. Учитывая (2.4) и (2.5), равенство (2.6) можно записать в виде

$$x^2 a + y^2 b + z^2 c = \alpha a + \beta b + \gamma c.$$

Теперь утверждение о том, что $Q = [a : b : c]$ лежит на кривой $C_{(x^2, y^2, z^2)}$, непосредственно следует из (2.1).

Уравнение касательной (2.6) можно было бы сразу записать в более простой форме

$$k_a a + k_b b + k_c c = 0$$

(см. [3, упр. 2.1.9]). Равенство $xk_a + yk_b + zk_c = 0$ следует из тождества Эйлера для однородных многочленов (см., например, теорему 10.2 [6, гл. I]).

(b) Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} (a^3 + b^3 + c^3 - (x^2a + y^2b + z^2c)^3) \Big|_{[a:b:c]=P} = \\ = 3a^2 - 3x^2(x^2a + y^2b + z^2c)^2 \Big|_{[a:b:c]=P} = 3x^2 - 3x^2 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

и аналогично с остальными частными производными. $\square$

Таким образом, при условии (2.4) кривая $C_{(x^2, y^2, z^2)}$ является особой: на ней есть особая точка $P = [x : y : z]$. Можно показать, что в неприводимом случае особая точка P будет двойной (причем простой двойной при условии $xyz \neq 0$). В частности, кубическая кривая $C_{(x^2, y^2, z^2)}$ будет рациональной (определение кратности особой точки, рациональной кривой и сопутствующие факты см., например, в книге [3, гл. 2]). Чтобы написать явные формулы рациональной параметризации, положим $c = z$ (считая $z \neq 0$) и затем всюду заменим z^3 на $1 - x^3 - y^3$. Тогда уравнение кривой $C_{(x^2, y^2, z^2)}$ в соответствующей аффинной карте примет вид

$$a^3 + b^3 + 1 - x^3 - y^3 = (x^2a + y^2b + 1 - x^3 - y^3)^3. \quad (2.7)$$

Проводя прямую $b = t(a - x) + y$ (здесь t — параметр) через точку (x, y) и находя вторую точку пересечения этой прямой с кривой (2.7), получим¹⁾

$$\begin{aligned} a &= \frac{x(y^6 - 1)t^3 + 3y(x^3y^3 - y^3 + 1)t^2 + 3x^2y^2(x^3 - 2)t + x(x^6 - 3x^3 + 2)}{(y^6 - 1)t^3 + 3x^2y^4t^2 + 3x^4y^2t + x^6 - 1}, \\ b &= \frac{y(y^6 - 3y^3 + 2)t^3 + 3x^2y^2(y^3 - 2)t^2 + 3x(x^3y^3 - x^3 + 1)t^2 + y(x^6 - 1)}{(y^6 - 1)t^3 + 3x^2y^4t^2 + 3x^4y^2t + x^6 - 1}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Это и есть искомая рациональная параметризация кривой (2.7). График ее вещественной части может выглядеть по-разному, в зависимости от значений параметров x, y (один из вариантов представлен на рис. 1).

Имеются ли на кривой $C_{(x^2, y^2, z^2)}$ другие особые точки, кроме точки $P = [x : y : z]$? Известно, что на неприводимой кубической кривой более одной особой точки быть не может (см., например, [6, гл. III, разд. 4.3]). Остается не столь интересный случай приводимой кривой $C_{(x^2, y^2, z^2)}$, который можно явно описать с помощью предложения 1.

Есть ли еще случаи вырождения кривых $C_{(\alpha, \beta, \gamma)}$, помимо указанного в п. (b) предложения 2? Покажем, что нет.

¹⁾ Здесь было бы уместно применение системы компьютерной алгебры.

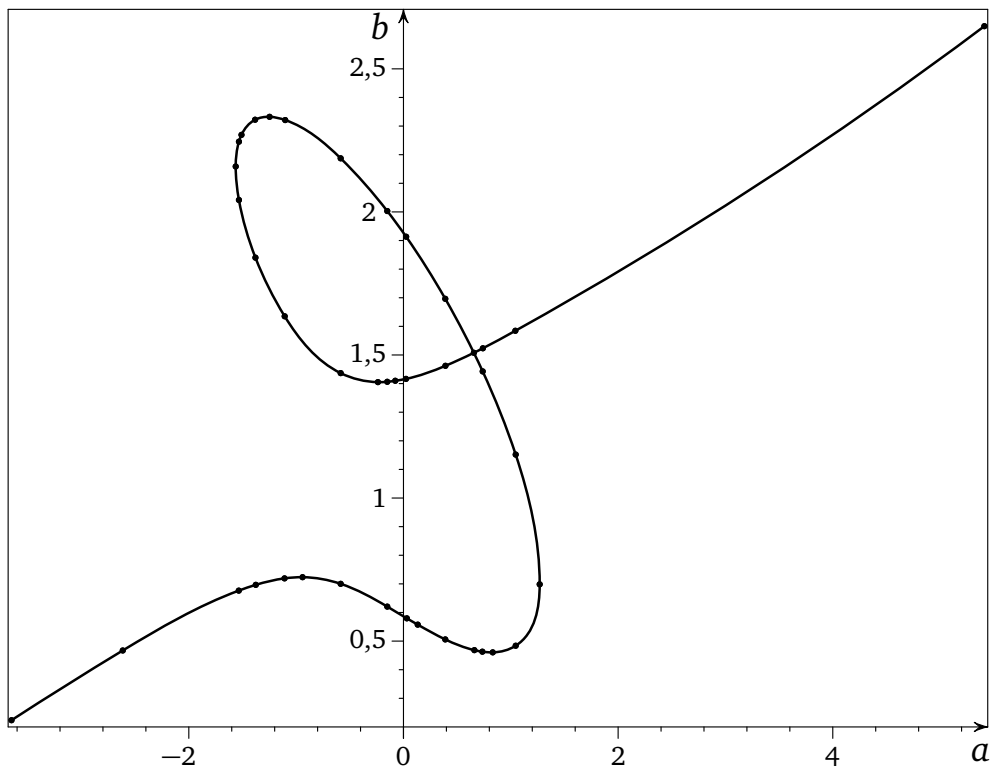


Рис. 1. График вещественной части кривой (2.7) при $x = 2/3$, $y = 3/2$

Предложение 3. Если кривая $C_{(\alpha, \beta, \gamma)}$ является особой, то существует такая тройка $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, удовлетворяющая условию (2.4), что $(\alpha, \beta, \gamma) = (x^2, y^2, z^2)$.

Доказательство. Запишем (α, β, γ) в виде (x^2, y^2, z^2) , где $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ (здесь x, y, z определены с точностью до знака). Если $[a_0 : b_0 : c_0]$ — особая точка кривой $C_{(x^2, y^2, z^2)}$, то

$$\begin{aligned} a_0^2 &= (x^2 a_0 + y^2 b_0 + z^2 c_0)^2 x^2, \\ b_0^2 &= (x^2 a_0 + y^2 b_0 + z^2 c_0)^2 y^2, \\ c_0^2 &= (x^2 a_0 + y^2 b_0 + z^2 c_0)^2 z^2, \\ a_0^3 + b_0^3 + c_0^3 &= (x^2 a_0 + y^2 b_0 + z^2 c_0)^3. \end{aligned}$$

Ясно, что $x^2 a_0 + y^2 b_0 + z^2 c_0 \neq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} a_0 &= \pm x(x^2 a_0 + y^2 b_0 + z^2 c_0), \\ b_0 &= \pm y(x^2 a_0 + y^2 b_0 + z^2 c_0), \\ c_0 &= \pm z(x^2 a_0 + y^2 b_0 + z^2 c_0). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a_0^3 + b_0^3 + c_0^3 = (\pm x^3 \pm y^3 \pm z^3)(x^2 a_0 + y^2 b_0 + z^2 c_0)^3 = (x^2 a_0 + y^2 b_0 + z^2 c_0)^3.$$

После сокращения на $(x^2 a_0 + y^2 b_0 + z^2 c_0)^3$ получим $\pm x^3 \pm y^3 \pm z^3 = 1$. Учитывая неоднозначность в выборе тройки (x, y, z) , можно считать, что выполнено именно условие (2.4). $\square$

Далее мы рассмотрим семейство кривых $C_{(\alpha, \beta, \gamma)}$ при дополнительном предположении $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Q}^3$. В этом случае критерий приводимости кривой $C_{(\alpha, \beta, \gamma)}$ (см. предложение 1) упрощается: одна из компонент тройки параметров (α, β, γ) должна быть равна единице, а две другие должны совпасть. Предложение 3 также можно уточнить: при условии неприводимости такая кривая будет особой, только когда $(\alpha, \beta, \gamma) = (x^2, y^2, z^2)$, при этом выполнено условие (2.4) и все числа x, y, z рациональны. Последнее требование вытекает из такого утверждения: если $(x^2, y^2, z^2) \in \mathbb{Q}^3$, выполнено условие (2.4) и каждое из чисел x, y, z отлично от единицы, то $(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$.

Доказательство этого несложного, но содержательного утверждения предоставляется читателю. Здесь возникает более общий вопрос: может ли неприводимая кубическая кривая, задаваемая многочленом с рациональными коэффициентами, иметь особую точку, которую нельзя задать тройкой рациональных однородных координат? Ответ: нет (если бы такое случилось, то особых точек было бы больше одной — та, которая дана, и все алгебраически сопряженные с ней)²⁾.

Таким образом, чтобы выяснить, для каких $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Q}^3$ неприводимая кривая $C_{(\alpha, \beta, \gamma)}$ будет рациональной, осталось описать все решения (x, y, z) уравнения (2.4) в рациональных числах. Такое описание давно известно (см., например, [18, гл. 11]).

Предложение 4. Если не учитывать решения вида $(1, t, -t)$, то все решения (x, y, z) уравнения (2.4) в рациональных числах даются формулами

$$\begin{aligned} x &= \frac{(p^2 - pq + q^2)^2 - p - q}{(p - q)^3 - q^3 - 1}, \\ y &= -\frac{(p^2 - pq + q^2)^2 - p + 2q}{(p - q)^3 - q^3 - 1}, \\ z &= \frac{p^3 + q^3 - 1}{(p - q)^3 - q^3 - 1}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

²⁾ В приводимом случае такое возможно: например, особые точки кривой $(a - b)(a^2 - 2b^2 + 2c^2) = 0$ суть $[\sqrt{2} : \sqrt{2} : 1]$ и $[-\sqrt{2} : -\sqrt{2} : 1]$.

где $(p, q) \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{(-1, -1), (1, 0)\}$. При этом пара (p, q) получается из тройки (x, y, z) следующим образом:

$$p = \frac{xz - yz + x}{z^2 + z + 1}, \quad q = \frac{xz + y}{z^2 + z + 1}. \quad (2.10)$$

Доказательство. Пусть $(x, y, z) \neq (1, t, -t)$ — решение уравнения (2.4) в рациональных числах. Имеем $x^3 + y^3 = 1 - z^3$, что можно переписать как

$$(x + y)(x + y\omega)(x + y\omega^2) = (1 - z)(1 - z\omega)(1 - z\omega^2), \quad (2.11)$$

где $\omega = (-1 + \sqrt{-3})/2$ (кубический корень из единицы). Определим теперь пару $(p, q) \in \mathbb{Q}^2$ равенством

$$\frac{x + y\omega}{1 - z\omega} = p + q\omega. \quad (2.12)$$

Нетрудно видеть, что $(p, q) \notin \{(-1, -1), (1, 0)\}$. Явные выражения для p и q даются формулами (2.10). Сопрягая (2.12), получим

$$\frac{x + y\omega^2}{1 - z\omega^2} = p + q\omega^2. \quad (2.13)$$

Наконец, после подстановок (2.12) и (2.13) равенство (2.11) примет вид

$$(x + y)(p^2 - pq + q^2) = 1 - z. \quad (2.14)$$

Формулы (2.9) получаются, если решить систему линейных уравнений (2.12)–(2.14) относительно x, y, z (определитель этой системы пропорционален $(p - q)^3 - q^3 - 1$ и потому отличен от нуля, так как $(p, q) \notin \{(-1, -1), (1, 0)\}$). Можно проверить, что отображения, задаваемые формулами (2.9) и (2.10), являются взаимно обратными. $\square$

Еще один способ описать все решения уравнения (2.4) в рациональных числах читатель может найти в книге [2, § 51] (см. также более позднее издание [11, § 36]).

§ 3. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА $x^3 + y^3 + z^3 = 1$

Диофантово уравнение (2.4) принято называть уравнением Эйлера (см., например, [18, гл. 11]). Известно, что оно имеет бесконечное множество решений в целых числах, но само это множество, по-видимому, не допускает простого описания. Тем не менее, можно легко предъявить некоторые бесконечные серии решений в целых числах³⁾.

³⁾ Здесь мы не имеем в виду тривиальную серию решений вида $(1, t, -t)$.

Для отыскания таких серий можно оттолкнуться от предложения 1, где описываются все тройки параметров (α, β, γ) , для которых однородный многочлен

$$a^3 + b^3 + c^3 - (\alpha a + \beta b + \gamma c)^3$$

разложим. В частности, этот многочлен разлагается на множители в случае тройки вида $(\alpha, \alpha, 1)$. А именно, при $c = 1$ разложение имеет вид

$$a^3 + b^3 + 1 - (\alpha(a + b) + 1)^3 = -(a + b) \cdot q_\alpha(a, b), \quad (3.1)$$

где квадратичный сомножитель $q_\alpha(a, b)$ в правой части выглядит так:

$$q_\alpha(a, b) = (\alpha^3 - 1)a^2 + (2\alpha^3 + 1)ab + (\alpha^3 - 1)b^2 + 3\alpha^2(a + b) + 3\alpha.$$

Предположим, что при некотором $\alpha \in \mathbb{Q}$ на кривой, заданной уравнением

$$q_\alpha(a, b) = 0, \quad (3.2)$$

есть целая точка (a, b) . Тогда в силу тождества (3.1) она задает тройку

$$(x, y, z) = (-a, -b, \alpha(a + b) + 1) \quad (3.3)$$

целых чисел, удовлетворяющую уравнению (2.4). Обратно, пусть есть некоторая тройка (x, y, z) целых чисел, удовлетворяющая (2.4), при этом $x + y \neq 0$. Положим

$$\alpha = \frac{1 - z}{x + y}.$$

Тогда $\alpha \in \mathbb{Q}$ и, как опять-таки вытекает из тождества (3.1), на кривой (3.2) лежит целая точка $(a, b) = (-x, -y)$.

Пусть теперь параметр $\alpha \in \mathbb{Q}$ таков, что дискриминант

$$\Delta = (2\alpha^3 + 1)^2 - 4(\alpha^3 - 1)^2 = 3(4\alpha^3 - 1)$$

квадратичной формы, входящей в состав $q_\alpha(a, b)$, положителен, но не является квадратом рационального числа. Тогда уравнение (3.2) определяет гиперболу, и можно надеяться, что на ней лежит бесконечно много целых точек (a, b) , которые и дадут искомую бесконечную серию троек (3.3) целых чисел, удовлетворяющих уравнению Эйлера (2.4).

Фактически от $\alpha \in \mathbb{Q}$ требуется выполнение только следующих условий:

$$\alpha > 2^{-2/3}, \quad \alpha \neq 1.$$

Первое есть просто решение неравенства $3(4\alpha^3 - 1) > 0$, а второе следует из того факта, что эллиптическая кривая

$$3(4\alpha^3 - 1) = \delta^2 \quad (3.4)$$

бirationально эквивалентна кривой Ферма $x^3 + y^3 = 1$ и потому имеет только две рациональные точки $(\alpha, \delta) \in \{(1, -3), (1, 3)\}$. Как

следствие, если $\alpha \neq 1$, то число $3(4\alpha^3 - 1)$ не является квадратом рационального числа.

Бирациональная эквивалентность означает, что с помощью формул

$$x = \frac{3+\delta}{6\alpha}, \quad y = \frac{3-\delta}{6\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{x+y}, \quad \delta = \frac{3(x-y)}{x+y}$$

мы можем установить биективное соответствие между рациональными точками этих кривых. Как уже упоминалось, все рациональные точки кривой Ферма суть $(x, y) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$, поэтому все рациональные точки кривой (3.4) — это $(\alpha, \delta) \in \{(1, -3), (1, 3)\}$.

Более того, если α удовлетворяет условиям выше и на гиперболе (3.2) лежит хотя бы одна целая точка, то таких точек на ней автоматически бесконечно много (см. § 1). В статье [15] указываются некоторые целые значения α , а именно,

$$\alpha \in \{4, 7, 55, 79\},$$

для которых такой поиск целочисленных решений уравнения (2.4) будет удачным. Отметим, что при $\alpha = 55$ на гиперболе (3.2) на самом деле нет ни одной целой точки (читатель может это проверить, воспользовавшись какой-нибудь системой компьютерной алгебры, умеющей решать уравнения 2-й степени с двумя неизвестными в целых числах, например [23, 24]; см. также [25])⁴⁾. Источником этой досадной ошибки является банальная невнимательность при цитировании данных: вместо правильного решения $(-1544, 1537, 368)$ уравнения (2.4) из статьи [17] Лемер приводит ошибочное $(-1544, 1537, 386)$, на основе которого затем получает $\alpha = (1 - z)/(x + y) = 55$ (а должно быть $\alpha = 367/7$).

Можно задаться целью выписать подряд все целые значения α , для каждого из которых на гиперболе (3.2) есть целые точки. Начало этого ряда будет таким:

$$3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, 19, 21, 25, 27, 28, 31, 36, 37, 39, 43, 48, 49, \dots \quad (3.5)$$

Опираясь на факт существования параметрического решения

$$(x, y, z) = (-9t^4 + 3t, 9t^4, -9t^3 + 1) \quad (3.6)$$

уравнения (2.4), можно установить, что ряд (3.5) бесконечен. Действительно, для тройки (3.6) имеем

$$\alpha = \frac{1-z}{x+y} = \frac{1 - (-9t^3 + 1)}{(-9t^4 + 3t) + 9t^4} = \frac{9t^3}{3t} = 3t^2,$$

⁴⁾ Или просто заметить, что сравнение $q_{55}(a, b) \equiv 0 \pmod{m}$ неразрешимо при $m = 5^2$ или $m = 11^2$ (см. далее предложение 5).

поэтому на гиперболе (3.2) при $\alpha = 3t^2$ имеется целая точка

$$(a, b) = (9t^4 - 3t, -9t^4) \quad (3.7)$$

и, как следствие, ряд (3.5) содержит все числа вида $3t^2$ ($t = 1, 2, \dots$).

Решение (3.6) уравнения Эйлера впервые было найдено К. Малером в 1936 году. В статье [16] он находит это решение, манипулируя «хорошо известным» тождеством

$$x^3 + y^3 + z^3 = u^3,$$

где

$$x = \rho^2 - \sigma\rho_1, \quad y = \sigma_1\rho_1 - \rho^2, \quad z = \rho_1^2 - \rho\sigma_1, \quad u = \rho_1^2 - \rho\sigma,$$

при этом

$$\begin{aligned} \rho &= a^2 + 3b^2, & \rho_1 &= a_1^2 + 3b_1^2, \\ \sigma &= aa_1 + 3bb_1 + 3ab_1 - 3a_1b, & \sigma_1 &= aa_1 + 3bb_1 - 3ab_1 + 3a_1b. \end{aligned}$$

Разумеется, решение (3.6) можно получить из общего решения (2.9) уравнения (2.4) в рациональных числах (см. предложение 4). До этого нужно дополнительно потребовать, чтобы $(p - q)^3 - q^3 = 0$, что равносильно условию $p = 2q$. Тогда $(x, y, z) = (-9q^4 + 3q, 9q^4, -9q^3 + 1)$, что с точностью до обозначений совпадает с (3.6).

Более того, Лемер в статье [15] предъявляет даже бесконечную серию параметрических решений типа (3.6), воспользовавшись тем удачным обстоятельством, что в случае $\alpha = 3t^2$ дискриминант равен

$$\Delta = 3(4\alpha^3 - 1) = 324t^6 - 3,$$

а для такого Δ можно указать решение классического уравнения Пелля

$$X^2 - \Delta Y^2 = 1 \quad (3.8)$$

в многочленах от t с целыми коэффициентами. Это позволяет стандартным образом «размножить» точку (3.7) (см. § 1), а затем и само решение (3.6). Ниже в предложении 6 мы дадим полное описание целых точек на гиперболе (3.2) при $\alpha = 3t^2$.

Имеем $\Delta = 324t^6 - 3 = 9d^2 - 3$, где $d = 6t^3$. Для классического уравнения Пелля $X^2 - (9d^2 - 3)Y^2 = 1$ минимальным решением является $(X_0, Y_0) = (6d^2 - 1, 2d)$.

В самом деле, если решение $(6d^2 - 1, 2d)$ не минимально, то

$$6d^2 - 1 + 2d\sqrt{9d^2 - 3} = (X_0 + Y_0\sqrt{9d^2 - 3})^n$$

для некоторого $n \geq 2$, где (X_0, Y_0) — минимальное решение. Поскольку $Y_0 \geq 1$, имеем

$$X_0 = \sqrt{(9d^2 - 3)Y_0^2 + 1} \geq \sqrt{9d^2 - 2} > 3d - 1,$$

т. е. $X_0 \geq 3d$. Но тогда

$$6d^2 - 1 + 2d\sqrt{9d^2 - 3} \geq (X_0 + Y_0\sqrt{9d^2 - 3})^2 \geq (3d + \sqrt{9d^2 - 3})^2,$$

что невозможно ни при каком $d \geq 1$. Таким образом, при $\Delta = 324t^6 - 3$ минимальным решением (3.8) будет $(X_0, Y_0) = (216t^6 - 1, 12t^3)$.

Можно указать еще один простой пример бесконечной последовательности, содержащейся внутри ряда (3.5).

ПРИМЕР 3. При $\alpha = t^2$ ($t = 2, 3, \dots$) на гиперболе (3.2) лежит точка $(a, b) = (t, -t)$. Таким образом, ряд (3.5) содержит все точные квадраты, кроме 1. К сожалению, здесь $\Delta = 12t^6 - 3$ и соответствующее уравнение (3.8) уже не имеет решений в многочленах от t с рациональными коэффициентами (легкое упражнение, см. доказательство аналогичного утверждения далее в примере 4). И хотя точку $(t, -t)$ можно «размножить» при любом конкретном t , получить на этом пути результат, аналогичный результату Лемера, не удастся.

Следующее простое наблюдение могло бы помочь автору статьи [15] избежать оплошности с числом $\alpha = 55$. Для краткости будем называть *числами Лёша* (Loeschian numbers, по имени немецкого экономиста А. Löesch, см. OEIS [26]) те целые числа, которые можно представить формой $\xi^2 - \xi\eta + \eta^2$, где переменные ξ и η принимают целые значения.

Предложение 5. Для того, чтобы на гиперболе (3.2) были целые точки, необходимо, чтобы α было числом Лёша.

Доказательство. Воспользуемся следующим критерием: α является числом Лёша тогда и только тогда, когда каноническое разложение α не содержит простых чисел $p \equiv 2 \pmod{3}$ в нечетной степени.

Конечно, данный критерий не так широко известен, как классический критерий представимости целого числа суммой двух квадратов целых чисел (см., например, часть IV главы «Суммы квадратов» в книге [4]), но может быть доказан совершенно аналогичным образом.

Запишем уравнение гиперболы (3.2) в виде

$$a^2 - ab + b^2 = \alpha(a^2(a+b)^2 + 3\alpha(a+b) + 3). \quad (3.9)$$

Достаточно показать, что в каноническом разложении числа α не может быть простых чисел $p \equiv 2 \pmod{3}$ в нечетных степенях (и тогда по критерию α будет числом Лёша).

Действительно, предположим, что показатель $\nu_p(\alpha)$ нечетен. Заметим, что показатель $\nu_p(a^2 - ab + b^2)$, напротив, всегда четен (поскольку

из сравнения $a^2 - ab + b^2 \equiv 0 \pmod{p}$ вытекает $a \equiv b \equiv 0 \pmod{p}$, а значит, $a^2 - ab + b^2 \equiv 0 \pmod{p^2}$). Кроме того, мы имеем

$$v_p(\alpha^2(a+b)^2 + 3\alpha(a+b) + 3) = 0.$$

Все это делает равенство (3.9) невозможным. $\square$

В частности, при $\alpha = 55 = 5 \cdot 11$ уравнение (3.9) неразрешимо в целых числах, так как 5 и 11 — простые числа $\equiv 2 \pmod{3}$.

Если число α рационально и на кривой (3.2) есть целая точка, то утверждение о представимости α квадратичной формой $\xi^2 - \xi\eta + \eta^2$ останется в силе, но при условии, что значения переменных ξ и η теперь считаются рациональными. В самом деле, любая целая точка (a, b) на кривой (3.2) порождает тройку (3.3), удовлетворяющую (2.4). Тогда (см. предложение 4, формулы (2.9)) получаем

$$\alpha = \frac{1-z}{x+y} = p^2 - pq + q^2$$

для некоторых рациональных p и q . Более того, если воспользоваться формулами (2.10), то для p и q можно даже дать явные формулы:

$$p = -\frac{\alpha(a^2 - b^2) + 2a - b}{\alpha^2(a+b)^2 + 3\alpha(a+b) + 3}, \quad q = -\frac{\alpha(a^2 + ab) + a + b}{\alpha^2(a+b)^2 + 3\alpha(a+b) + 3}.$$

Чтобы исчерпать этот локальный сюжет, читатель мог бы в качестве упражнения доказать следующий факт⁵⁾: если целое число α представимо формой $\xi^2 - \xi\eta + \eta^2$ с рациональными ξ и η , то оно представимо этой формой и с целыми ξ и η .

Является ли необходимое условие из предложения 5 достаточным? Рассмотрим следующий пример.

ПРИМЕР 4. Пусть $\alpha = t^2 + 3$ ($t = 0, 1, \dots$). Поскольку

$$t^2 + 3 = (t+1)^2 - (t+1)(t-1) + (t-1)^2,$$

такие α являются числами Лёша. С помощью [25] нетрудно убедиться, что для каждого $t \in \{0, 1, \dots, 10\}$ на гиперболe (3.2) действительно найдутся целые точки. Вместе с тем, можно показать, что не существует никакого параметрического решения уравнения (3.2) вида

$$(a, b) = (a(t), b(t)),$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — многочлены с рациональными коэффициентами.

⁵⁾ Предостережение: для произвольной квадратичной формы это утверждение неверно (например, форма $\xi^2 - 34\eta^2$ представляет число -1 с рациональными ξ и η , но не представляет с целыми).

Удобно перейти к неизвестным $u = a + b$, $v = a - b$. Тогда уравнение (3.2) примет вид

$$9v^2 = \Delta u^2 + 36\alpha^2 u + 36\alpha, \quad (3.10)$$

где, напомним, $\Delta = 3(4\alpha^3 - 1)$. Отметим, что переход к уравнению (3.10) равносильный, так как условие $u \equiv v \pmod{2}$ обратного перехода выполняется автоматически.

При $\alpha = t^2 + 3$ мы получим уравнение

$$9v^2 = (12t^6 + 108t^4 + 324t^2 + 321)u^2 + 36(t^2 + 3)^2 u + 36(t^2 + 3).$$

Это уравнение не имеет решений $(u, v) = (u(t), v(t))$ в многочленах с рациональными коэффициентами. Действительно, если $u(t)$ — нулевой многочлен, то

$$9v(t)^2 = 36(t^2 + 3),$$

что невозможно ни для какого многочлена $v(t)$. Иначе пусть C — старший коэффициент многочлена $u(t)$. Тогда старший коэффициент правой части уравнения равен $12C^2$, в то время как старший коэффициент левой части имеет вид $9D^2$, где D — старший коэффициент многочлена $v(t)$. Значит, $9D^2 = 12C^2$, но для ненулевых рациональных C и D это невозможно.

Возникает подозрение, что такая оптимистичная ситуация с целыми точками будет не всегда. И действительно, при $t = 21$ впервые получаем контрпример — для соответствующего $\alpha = 444$ на гиперболе (3.2) нет ни одной целой точки.

При $\alpha = 444$ уравнение (3.10) принимает вид

$$9v^2 = 1\,050\,340\,605u^2 + 7\,096\,896u + 15\,984.$$

Можно ли установить неразрешимость этого уравнения в целых числах, не прибегая к системам компьютерной алгебры? (И это при том, что в рациональных числах оно разрешимо.) Вопрос не совсем риторический, особенно в свете периодически возникающей дискуссии о доверии результатам компьютерных вычислений.

Пример 4 показывает, что условие « α — число Лёша» не является достаточным для существования целых точек на гиперболе (3.2). Начало ряда чисел Лёша α , для которых на гиперболе (3.2) нет целых точек, таково:

$$129, 189, 219, 273, 279, 336, 372, 399, 409, 444, \dots$$

На момент написания статьи эта последовательность отсутствовала в OEIS.

Отметим, что в статье [15] рассматриваются только целые значения α . Но для дробных значений α также имеет смысл искать целые точки на гиперболе (3.2), так как тройка (3.3) и в этом случае обязана быть целочисленной.

ПРИМЕР 5. Используя [25] (и предложение 5 для предварительного отбора), можно проверить, что дробным значением $\alpha = m/n$ с наименьшей *высотой* (т. е. суммой $m+n$), для которого на гиперболе (3.2) есть целые точки, является $\alpha = 12/7$. При таком значении α одной из целых точек гиперболы (3.2) будет $(a, b) = (-243\,876, 105\,570)$, что дает тройку

$$(x, y, z) = (243\,876, -105\,570, -237\,095).$$

У этого метода поиска целочисленных решений уравнения (2.4) — через поиск целых точек на гиперболе (3.2) — есть существенный недостаток: решения при этом получаются, как правило, очень большие (содержат сотни и тысячи десятичных знаков для некоторых значений α из примера 4). Увы, но это объективный недостаток: нахождение целых точек на гиперболах сводится к решению уравнений Пелля, а в теории таких уравнений хорошо известен феномен, когда уравнение с небольшими коэффициентами может иметь огромные наименьшие решения (см. § 1).

По поводу общего уравнения

$$x^3 + y^3 + z^3 = k \tag{3.11}$$

существует большое количество публикаций и даже откровенной рекламы (читатель ради любопытства может пройти по ссылке [28]). Отметим лишь следующие два случая.

1. Случай $k=2$. Если в формулах (2.8) взять $(x, y) = (0, -1)$, то получим

$$a = 6t^2, \quad b = 6t^3 - 1,$$

при этом $a^3 + b^3 + 2 = (b+2)^3$. Это дает параметрическое решение, которое впервые обнаружил А. С. Веребрюсов в 1908 году (см. статью [1]).

2. Случай $k=3$. В 1953 году Л. Морделл задал вопрос о наличии пятого решения уравнения $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ (четыре очевидных решения — это $(1, 1, 1)$ и $(4, 4, -5)$ вместе с перестановками). Ответ был получен лишь спустя 65 лет: нашлось решение

$$(x, y, z) = (569\,936\,821\,221\,962\,380\,720, \\ -569\,936\,821\,113\,563\,493\,509, -472\,715\,493\,453\,327\,032).$$

Подробности есть, например, в статье [10]. Просматривая эту работу, поражаешься нетривиальности инструментов, применяемых для решения этого, казалось бы, элементарного вопроса. Совершенно очевидно, что никакой прямой brute force не позволил бы найти предъявленное решение, компоненты которого суть числа порядка 10^{20} . Здесь используются довольно тонкие методы из разных областей теории чисел и, конечно, современная многопроцессорная вычислительная техника.

Вместе с тем, сравнительно легко (и разными способами) можно показать, что для произвольного рационального k уравнение (3.11) имеет бесконечно много решений в рациональных числах (см. [22]).

§ 4. Тройки РАМАНУДЖАНА

По-видимому, впервые бесконечную серию целочисленных решений уравнения Эйлера (2.4) обнаружил С. Рамануджан. В статье [13] показано, как эту серию решений можно было бы получить на основе следующего *тождества Рамануджана*:

$$(3u^2 + 5uv - 5v^2)^3 + (4u^2 - 4uv + 6v^2)^3 + (5u^2 - 5uv - 3v^2)^3 = (6u^2 - 4uv + 4v^2)^3$$

(см. [9, разд. 8.5]). Найденную серию решений Рамануджан преподносит в интригующей форме, а именно, в виде серии равенств

$$a_n^3 + b_n^3 = c_n^3 + (-1)^n, \quad (4.1)$$

где a_n, b_n, c_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) определяются как коэффициенты ряда Тейлора для рациональных функций

$$A(s) = \frac{9s^2 + 53s + 1}{s^3 - 82s^2 - 82s + 1}, \quad B(s) = \frac{-12s^2 - 26s + 2}{s^3 - 82s^2 - 82s + 1}, \\ C(s) = \frac{-10s^2 + 8s + 2}{s^3 - 82s^2 - 82s + 1}$$

соответственно в окрестности точки $s = 0$. Различные доказательства равенств (4.1) можно найти в статьях [12, 14], а одно интересное обобщение — в статье [20].

Если положить

$$x_n = (-1)^n b_n, \quad y_n = (-1)^{n+1} c_n, \quad z_n = (-1)^n a_n,$$

то из (4.1) получим

$$x_n^3 + y_n^3 + z_n^3 = 1. \quad (4.2)$$

Разлагая рациональные функции $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ в сумму простейших дробей, нетрудно получить явные формулы для коэффициентов a_n, b_n, c_n (см. [13]). В итоге *тройки Рамануджана* (x_n, y_n, z_n) , являющиеся решениями уравнения Эйлера, в явном виде выглядят так:

$$x_n = \frac{1}{85} ((77 + 7\sqrt{85})(-\varepsilon_1)^n + (77 - 7\sqrt{85})(-\varepsilon_1)^{-n} + 16), \\ y_n = \frac{1}{85} ((-93 - 9\sqrt{85})(-\varepsilon_1)^n + (-93 + 9\sqrt{85})(-\varepsilon_1)^{-n} + 16), \\ z_n = \frac{1}{85} ((64 + 8\sqrt{85})(-\varepsilon_1)^n + (64 - 8\sqrt{85})(-\varepsilon_1)^{-n} - 43),$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{83 + 9\sqrt{85}}{2}.$$

Ясно, что, будучи верными для $n = 0, 1, 2, \dots$, равенства (4.2) и для любого $n \in \mathbb{Z}$ будут верны⁶⁾. Заметим теперь, что справедливы также и равенства

$$4 = \frac{1 - z_n}{x_n + y_n}, \quad 0 \neq n \in \mathbb{Z}, \quad (4.3)$$

в чем можно убедиться непосредственной подстановкой указанных выше выражений для x_n, y_n, z_n . Но тогда из (4.2) и (4.3) вытекает, что при $n \neq 0$ целые точки

$$(a, b) = (-x_n, -y_n) \quad (4.4)$$

лежат на гиперболе (3.2) при $\alpha = 4$, т. е. удовлетворяют уравнению

$$21a^2 + 43ab + 21b^2 + 16a + 16b + 4 = 0.$$

Для точки $(a, b) = (-x_0, -y_0) = (-2, 2)$ это тоже верно. Дальнейшее исследование показывает, что точки (a, b) вида (4.4), где $n \in \mathbb{Z}$, составляют ровно половину всех целых точек на указанной гиперболе.

Действительно, соответствующее диофантово уравнение уже было решено нами в примере 2, остается только заметить, что $(-x_n, -y_n) = (u_n, u_n)$ для любого $n \in \mathbb{Z}$ (формулы для u_n, v_n даны в конце примера 2).

Тем самым открывается простой путь к получению бесконечных серий решений уравнения Эйлера типа троек Рамануджана (x_n, y_n, z_n) : для этого следует взять какое-нибудь конкретное число α из списка (3.5) (или подходящее дробное число, см. пример 5), найти бесконечную серию целых точек (a, b) на гиперболе (3.2) в явном виде, затем вычислить по формуле (3.3) соответствующую серию троек (x, y, z) и, наконец, подобрать рациональные функции $A(s), B(s), C(s)$, чтобы оформить все это в стиле Рамануджана.

Продемонстрируем этот метод на примере $\alpha = 3$. Здесь вместо уравнения (3.2) удобнее решать уравнение (3.10), которое в данном случае принимает вид

$$9v^2 = 321u^2 + 324u + 108,$$

при этом $a = (u + v)/2$, $b = (u - v)/2$. После подстановки $u = (w - 54)/107$ нужно будет решить уравнение Пелля

$$w^2 - 321v^2 = -936$$

⁶⁾ Вместо этого Рамануджан выписывает двойственную к (4.1) серию равенств, в которой используются уже коэффициенты ряда Лорана для рациональных функций $A(s), B(s), C(s)$ в окрестности $s = \infty$.

и среди его решений (w, v) отобрать те, что удовлетворяют условию

$$w \equiv 54 \pmod{107}.$$

Минимальное решение ассоциированного классического уравнения Пелля есть $\varepsilon_2 = 215 + 12\sqrt{321}$, а само уравнение Пелля имеет только одну пару базисных решений $(\pm 267, 15)$. Поскольку

$$215 \equiv 1 \pmod{107}, \quad -267 \equiv 54 \pmod{107},$$

искомые пары (w, v) находятся в сериях

$$w + v\sqrt{321} = (-267 \pm 15\sqrt{321})\varepsilon_2^n.$$

Все решения (a, b) уравнения (3.2) при $\alpha = 3$ теперь можно найти по формулам

$$a = \frac{w + 107v - 54}{214}, \quad b = \frac{w - 107v - 54}{214}.$$

Если в формуле для (w, v) выбрать знак «плюс», то в итоге получим такую серию троек Рамануджана (x_n, y_n, z_n) :

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{214}((-669 + 37\sqrt{321})\varepsilon_2^n + (-669 - 37\sqrt{321})\varepsilon_2^{-n} + 54), \\ y_n &= \frac{1}{107}((468 - 26\sqrt{321})\varepsilon_2^n + (468 + 26\sqrt{321})\varepsilon_2^{-n} + 27), \\ z_n &= \frac{1}{214}((-801 + 45\sqrt{321})\varepsilon_2^n + (-801 - 45\sqrt{321})\varepsilon_2^{-n} - 110). \end{aligned}$$

Равенства (4.2) по-прежнему в силе. Соответствующие рациональные функции таковы:

$$\begin{aligned} A(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n s^n = \frac{6(446s^2 - 429s + 1)}{s^3 - 431s^2 + 431s - 1}, \\ B(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n s^n = \frac{-9(417s^2 - 430s + 1)}{s^3 - 431s^2 + 431s - 1}, \\ C(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} z_n s^n = \frac{2(1615s^2 - 1729s + 4)}{s^3 - 431s^2 + 431s - 1}. \end{aligned}$$

Все они имеют только рациональные коэффициенты, так как получаются в результате суммирования «сопряженных» геометрических прогрессий.

В статье [15] Д. Лемер в случае $\alpha = 3t^2$, где t — любое натуральное число, предъявил явные формулы для соответствующих троек $(x_n(t), y_n(t), z_n(t))$, однако он не объяснил, почему эти формулы являются универсальными (в том смысле, что в них задействованы все целые точки гиперболы (3.2) при $\alpha = 3t^2$). Далее мы докажем этот факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть t — любое натуральное число. При $\alpha = 3t^2$ все целые точки (a, b) гиперболы (3.2) с учетом симметрии описываются формулами

$$\begin{aligned} a &= \frac{t}{2\Delta/3} \left((a_1(t) + a_2(t)\sqrt{\Delta})\varepsilon^n + (a_1(t) - a_2(t)\sqrt{\Delta})\varepsilon^{-n} - 54t^3 \right), \\ b &= \frac{t}{\Delta/3} \left((b_1(t) + b_2(t)\sqrt{\Delta})\varepsilon^n + (b_1(t) - b_2(t)\sqrt{\Delta})\varepsilon^{-n} - 27t^3 \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $\Delta = 324t^6 - 3$, $\varepsilon = 216t^6 - 1 + 12t^3\sqrt{\Delta}$, а многочлены $a_i(t)$ и $b_i(t)$ таковы:

$$\begin{aligned} a_1(t) &= 972t^9 - 324t^6 + 18t^3 + 3, & a_2(t) &= -54t^6 + 18t^3 - 1, \\ b_1(t) &= -486t^9 + 18t^3, & b_2(t) &= 27t^6 - 1. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в рассмотренном выше частном случае $\alpha = 3$, будем сразу решать уравнение (3.10), которое можно записать в виде

$$v^2 = \frac{108t^6 - 1}{3} u^2 + 36t^4 u + 12t^2$$

(в частности, u должно делиться на 3). Введем обозначения:

$$R = 972t^8 - 36t^2, \quad X_0 = 216t^6 - 1, \quad Y_0 = 12t^3.$$

Теперь после подстановки

$$u = \frac{w - 54t^4}{\Delta/3}$$

мы получим параметрическое уравнение Пелля

$$w^2 - \Delta v^2 = -R. \quad (4.6)$$

Требуется найти все его решения (w, v) , удовлетворяющие условию

$$w \equiv 54t^4 \pmod{\Delta/3}. \quad (4.7)$$

Как уже отмечалось, для уравнения Пелля (4.6) известно минимальное решение ассоциированного с ним классического уравнения Пелля — это

$$\varepsilon = X_0 + Y_0\sqrt{\Delta} = 216t^6 - 1 + 12t^3\sqrt{\Delta}.$$

Любое решение (w, v) уравнения (4.6) можно получить по формуле

$$w + v\sqrt{\Delta} = \pm(W + V\sqrt{\Delta})\varepsilon^n,$$

где $n \in \mathbb{Z}$, а (W, V) — одно из базисных решений этого уравнения. Имеем

$$L = \sqrt{\frac{R(X_0 + 1)}{2\Delta}} = 18t^4 - \frac{1}{4t^2} + O\left(\frac{1}{t^8}\right), \quad t \rightarrow \infty.$$

Видно, что L — нецелое число⁷⁾. Базисные решения (W, V) уравнения (4.6) определяются условиями

$$\sqrt{\frac{R}{\Delta}} \leq V < L, \quad W = \pm \sqrt{\Delta V^2 - R}$$

(см. § 1). Заметим теперь, что $X_0 \equiv 1 \pmod{\Delta/3}$. Как следствие, чтобы выполнить условие (4.7), достаточно найти только те базисные решения (W, V) , для которых

$$W \equiv 54t^4 \pmod{\Delta/3}, \quad (4.8)$$

а это существенно легче, чем искать все базисные решения⁸⁾.

Приступим к отысканию базисных решений (W, V) уравнения (4.6), удовлетворяющих условию (4.8). Имеем

$$V^2 = \frac{108t^6 - 1}{3} U^2 + 36t^4 U + 12t^2, \quad (4.9)$$

где число

$$U = \frac{W - 54t^4}{\Delta/3}$$

является целым (и, очевидно, ненулевым). Тогда

$$-3t - 1 < -\frac{\sqrt{\Delta L^2 - R} + 54t^4}{\Delta/3} < U < \frac{\sqrt{\Delta L^2 - R} - 54t^4}{\Delta/3} < 3t \quad (4.10)$$

(проверка крайних неравенств с помощью системы компьютерной алгебры предоставляется читателю в качестве упражнения). Обозначим правую часть уравнения (4.9) через $f(t)$.

Рассмотрим сначала случай $U > 0$. Считая U константой, можно получить следующее асимптотическое равенство:

$$\sqrt{f(t)} = 6Ut^3 + 3t + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \rightarrow \infty.$$

Попробуем доказать, что $V = 6Ut^3 + 3t$. Для этого получим двойное неравенство

$$(6Ut^3 + 3t - 1)^2 < f(t) < (6Ut^3 + 3t + 1)^2,$$

опираясь на оценки (4.10). Действительно, левое неравенство равносильно неравенству

$$12Ut^3 + 3t^2 + 6t - \frac{U^2 + 3}{3} > 0,$$

⁷⁾ Строго говоря, асимптотическая формула только намекает на то, что L — нецелое число, но привести доказательство нетрудно.

⁸⁾ Вполне возможно, что уравнение (4.6) при любом $t \geq 1$ имеет в точности одну пару базисных решений. С помощью [24] мы проверили это для всех $t \leq 100$, но доказательства в общем случае у нас нет.

а правое — неравенству

$$12Ut^3 - 3t^2 + 6t + \frac{U^2 + 3}{3} > 0.$$

Очевидно, оба последних неравенства верны при $0 < U < 3t$. Но тогда $f(t) = (6Ut^3 + 3t)^2$ и $V = 6Ut^3 + 3t$. Однако

$$f(t) - (6Ut^3 + 3t)^2 = \frac{(3t - U)(3t + U)}{3},$$

т. е. $U = 3t$ — противоречие, которое означает, что случай $U > 0$ невозможен.

В случае $U < 0$ рассуждения аналогичны. А именно, из двойного неравенства

$$(-6Ut^3 - 3t - 1)^2 < f(t) < (-6Ut^3 - 3t + 1)^2,$$

вытекает, что $V = -6Ut^3 - 3t$. Тогда $U = -3t$ и, следовательно, $V = 18t^4 - 3t$. Видно, что условие $V < L$ выполнено, при этом

$$W = 54t^4 + U \frac{\Delta}{3} = -324t^7 + 54t^4 + 3t.$$

Итак, единственное базисное решение уравнения (4.6) с условием (4.8) — это

$$(W, V) = (-324t^7 + 54t^4 + 3t, 18t^4 - 3t).$$

Теперь все решения (w, v) уравнения (4.6), удовлетворяющие условию (4.7), находятся из формулы

$$w + v\sqrt{\Delta} = (-324t^7 + 54t^4 + 3t \pm (18t^4 - 3t)\sqrt{\Delta})\varepsilon^n.$$

Выберем здесь для определенности знак корня «плюс». Поскольку

$$a = \frac{w + v}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{w - 54t^4}{\Delta/3} + v \right),$$

$$b = \frac{w - v}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{w - 54t^4}{\Delta/3} - v \right),$$

мы в итоге приходим к формулам (4.5). Точки (a, b) указанного вида составляют ровно половину всех целых точек гиперболы (3.2) при $\alpha = 3t^2$. $\square$

При $n = 0$ по формулам (4.5) получим точку (3.7), а вместе с ней (применяя формулу (3.3)) и решение (3.6), с которого все и началось.

Благодарности

Авторы благодарят А. Д. Рябичева за проявленное внимание к статье и ряд полезных замечаний, несомненно способствовавших улучшению текста статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Веребрюсовъ А. С.* Объ уравненій $x^3 + y^3 + z^3 = 2u^3$ // Математический сборник. 1908. Т. 26, № 4. С. 622–624.
- [2] *Диксон Л. Е.* Введение в теорию чисел. Тбилиси: Изд-во АН Грузинской ССР, 1941.
- [3] *Казарян М. Э., Ландо С. К., Прасолов В. В.* Алгебраические кривые. По направлению к пространствам модулей. М.: МЦНМО, 2019.
- [4] *Спивак А. В.* Арифметика-2. М.: Бюро Квантум, 2008.
- [5] *Спринджук В. Г.* Классические диофантовы уравнения от двух неизвестных. М.: Наука, 1982.
- [6] *Уокер Р.* Алгебраические кривые. М.: ИЛ, 1952.
- [7] *Чанга М. Е.* Элементарная теория уравнений Пелля. М.: МПГУ, 2019.
- [8] *Andreescu T., Andrica D.* Quadratic Diophantine Equations. New York: Springer, 2015.
- [9] *Andrews G. E., Berndt B. C.* Ramanujan's Lost Notebook. Part IV. New York: Springer, 2013.
- [10] *Booker A. R., Sutherland A. V.* On a question of Mordell. <https://arxiv.org/abs/2007.01209>.
- [11] *Dickson L. E.* Introduction to the theory of numbers. New York: Dover, 1957.
- [12] *Han J. H., Hirschhorn M. D.* Another Look at an Amazing Identity of Ramanujan // Mathematics Magazine. 2006. Vol. 79, № 4. P. 302–304.
- [13] *Hirschhorn M. D.* An Amazing Identity of Ramanujan // Mathematics Magazine. 1995. Vol. 68, № 3. P. 199–201.
- [14] *Hirschhorn M. D.* A Proof in the Spirit of Zeilberger of an Amazing Identity of Ramanujan // Mathematics Magazine. 1996. Vol. 69, № 4. P. 267–269.
- [15] *Lehmer D. H.* On the diophantine equation $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ // J. London Math. Soc. 1956. Vol. 31. P. 275–280.
- [16] *Mahler K.* Note On Hypothesis K of Hardy and Littlewood // J. London Math. Soc. 1936. Vol. 11. P. 136–138.
- [17] *Miller J. C. P., Woollett M. F. C.* Solutions of the Diophantine equation $x^3 + y^3 + z^3 = k$ // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 101–110.
- [18] *Mordell L. J.* Diophantine equations. London: Academic Press Inc., 1969.
- [19] *Netay I. V., Savvateev A. V.* Sharygin triangles and elliptic curves // Bull. Korean Math. Soc. 2017. Vol. 54, № 5. P. 1597–1617.
- [20] *Panzone P. A.* On a Formula of S. Ramanujan // Amer. Math. Monthly. 2015. Vol. 122, № 1, P. 65–69.

- [21] *Ramanujan S.* The Lost Notebook and Other Unpublished Papers. New Delhi: Narosa, 1988.
- [22] *Richmond H. W.* On rational solutions of $x^3 + y^3 + z^3 = R$ // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1930. Vol. 2. P. 92–100.
- [23] <https://www.wolfram.com/mathematica>.
- [24] <https://pari.math.u-bordeaux.fr>.
- [25] <https://www.alpertron.com.ar/QUAD.HTM>.
- [26] <https://oeis.org/A003136>.
- [27] <https://mathoverflow.net/questions/459745>.
- [28] https://en.wikipedia.org/wiki/Sums_of_three_cubes.

Николай Николаевич Осипов, Сибирский федеральный
университет (Красноярск)
nnosipov@rambler.ru

Алексей Владимирович Савватеев, Адыгейский государственный
университет (Майкоп), МФТИ, ЦЭМИ РАН
hibiny@mail.ru